Préparation à l'agrégation interne de mathématiques
Aide à la résolution pour les exercices du mercredi 13 juin 2007
Jean-Marie Monier

Exercice 1

1) Existence :

• L'application $f : x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x^4}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$.

• Prendre un équivalent en $+\infty$ pour conclure que f est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

2) Calcul :

Pour $X \in [1\,;+\infty[$, faire une ipp sur $[1\,;X]$ pour obtenir :

$$\int_1^X \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{X^{-3}}{-3} + \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}\int_1^X \frac{1}{x^3(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Pour cette dernière intégrale, utiliser le changement de variable $y = x^2$ puis une décomposition en éléments simples.
Enfin, faire tendre X vers $+\infty$.

Réponse : $I = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{1 - \ln 2}{6}$.

Exercice 2

1) S'assurer d'abord de l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Comme le comportement de x^n, pour $x \in [0\,;+\infty[$ fixé et n tendant vers l'infini, dépend de la position de x par rapport à 1, séparer I_n en $I_n = J_n + K_n$ par la relation de Chasles, avec le point intermédiaire 1.

• Comme, pour $x \in [0\,;1[$ fixé, $\dfrac{1+x^n}{1+x^{n+2}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$, former $|J_n - 1|$ et montrer que $J_n - 1$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n^2}$, par une majoration judicieuse.

• Raisonner de façon analogue pour K_n.

Conclure : $I_n = 2 + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

Exercice 3

L'application $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \exp\Big(\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\Big) - 1$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

Pour l'étude en $+\infty$, comme $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, faire un développement limité et obtenir :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{x} + \underset{x \longrightarrow +\infty}{o}\Big(\frac{\sin^2 x}{x}\Big).$$

• Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge, en utilisant une ipp sur $[1\,;X]$ puis faire $X \longrightarrow +\infty$.

• En notant $h(x)=f(x)-\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, on a $h(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{\sin^2 x}{x}$. Montrer, en utilisant une linéarisation, que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

En déduire que l'intégrale impropre proposée diverge à la borne $+\infty$.

Il est alors inutile de faire une étude à la borne 0.

Exercice 4

1) Ensemble de définition de f

Examiner les cas $x<0$, $x=0$, $x>0$. Conclure : $\mathrm{Def}\,(f)=[0\,;+\infty[$.

2) Continuité

Appliquer le théorème de continuité sous le signe $\displaystyle\int_0^1$, avec hypothèse de domination locale, pour conclure que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.

3) Dérivation

Appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int_0^1$, avec hypothèse de domination locale, pour conclure que f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\quad f'(x)=\int_0^1 \frac{1}{(x+t)(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

Calculer cette dernière intégrale à l'aide d'une décomposition en éléments simples, en séparant les cas $x\neq 1$, $x=1$, pour obtenir :

$$\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\quad f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x}\ln\dfrac{1+x}{2x} & \text{si}\quad x\neq 1\\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{si}\quad x=1.\end{cases}$$

Montrer que f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

4) Étude en 0

Montrer $f'(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} +\infty$ et conclure quant au graphique.

5) Étude en $+\infty$

À l'aide d'un encadrement, montrer $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \ln 2\,\ln x$.

En déduire $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et la nature de la branche infinie.

6) Former le tableau de variation de f.

7) Concavité

Appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int_0^1$ pour obtenir $f''(x)$ sous forme d'une intégrale et en déduire que f est concave.

8) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 5

a) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $f_x : t \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

En 0 : $f_x(t) \underset{t \longrightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$, et utiliser l'exemple de Riemann en $+\infty$.

En $+\infty$, $t^2 f_x(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Conclure.

b) 1) Ipp sur $[\varepsilon\,;X]$, puis $\varepsilon \longrightarrow 0$ et $X \longrightarrow +\infty$.

2) Récurrence sur n.

c) Utiliser le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int_0^{+\infty}$ avec hypothèse de domination locale.

On obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

d) Déduire de *c)* que Γ'' est à valeurs > 0.

e) $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

f) Puisque $\Gamma'' > 0$, Γ' est strictement croissante. Remarquer que $\Gamma(1) = \Gamma(2)$ et appliquer le théorème de Rolle pour obtenir l'existence d'un $\alpha \in]1\,;2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$. En déduire les variations de Γ.

Pour $x \geqslant 2$: $\Gamma(x) \geqslant \Gamma\big(\mathrm{E}(x)\big) = \big(\mathrm{E}(x)-1\big)! \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

g) Tracer la courbe représentative de Γ.

* *