Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 30 octobre 2007

Exercices d'entraînement

Thème : Séries entières, séries de Fourier

1 Déterminer le rayon de convergence R des séries entières $\sum_n a_n z^n$ suivantes :

$$a)\ \sum_{n\geqslant 0} \ln(n!) z^n \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 0} (\mathrm{e}^{\sqrt{n+1}} - \mathrm{e}^{\sqrt{n}}) z^n \qquad c)\ \sum_{n\geqslant 2} \frac{(\ln n)^{n+1}}{3^{n^2-1}} z^n \qquad d)\ \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{C}_{5n}^{2n} z^n \qquad e)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2n}}{n!} z^{3n}.$$

2 Déterminer le rayon de convergence R et la somme S des séries entières suivantes, dans lesquelles la variable x est réelle :

$$a)\ \sum_{n\geqslant 0} (n^2 - n + 6) x^n \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1} \left(n + 2 - \frac{1}{n}\right) x^n \qquad c)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} x^n \qquad d)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2n+1} x^n.$$

3 Pour les fonctions f suivantes, où l'on donne $f(x)$ (x : variable réelle), montrer que f est développable en série entière en 0 et calculer le développement en série entière en 0 ; on précisera le rayon de convergence R :

$$a)\ \frac{2x+1}{(x^2-1)(x+2)} \qquad b)\ \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \qquad c)\ \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad d)\ \operatorname{Arctan} \frac{1+x}{1+2x}.$$

4 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto |\cos t|$.

a) Vérifier que f est continue par morceaux et π-périodique et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f.

b) Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

c) En déduire les sommes de séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

* *