Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

Corrigé de la 2ème épreuve 2007

I. La fonction racine cubique

A. Dérivée au sens généralisé

1) • Montrons d'abord que g est continue sur I.

Raisonnons par l'absurde : s'il existait $a \in I$ tel que g ne soit pas continue en a, alors, comme g est croissante, on aurait $\lim\limits_{a^+} g - \lim\limits_{a^-} g > 0$, et donc g n'atteindrait pas les points de $]\lim\limits_{a^-} g\,;\lim\limits_{a^+} g[$, contradiction avec la surjectivité de g.

Ainsi, g est continue sur I.

• Puisque g est continue et strictement croissante sur l'intervalle I et que $g(I) = J$, d'après le théorème de la bijection monotone, l'application réciproque $g^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et strictement croissante.

• Soit $a \in J$. On vient de voir que g est continue en a. Notons $b = g^{-1}(a) \in I$ et :

$$\tau : I - \{b\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \tau(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b}.$$

On a, pour tout $x \in J - \{a\}$: $\quad \dfrac{g^{-1}(x) - g^{-1}(a)}{x - a} = \left(\dfrac{x - a}{g^{-1}(x) - g^{-1}(a)}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\tau\big(g^{-1}(x)\big)}.$

D'une part, puisque g^{-1} est continue en a : $g^{-1}(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} g^{-1}(a) = b$.

D'autre part, puisque g est dérivable au sens généralisé en b, on a : $\tau(y) \underset{y \longrightarrow b}{\longrightarrow} g'(b) \in \overline{\mathbb{R}}$.

On a donc, par composition des limites : $\tau\big(g^{-1}(x)\big) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} g'(b)$.

De plus, comme g est strictement croissante, τ est à valeurs > 0, donc $g'(b) \in [0\,;+\infty]$.

Avec les conventions $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, on a donc : $\dfrac{1}{\tau\big(g^{-1}(x)\big)} \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{g'(b)}$.

Ainsi : $\dfrac{g^{-1}(x) - g^{-1}(a)}{x - a} \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{g'(b)} \in [0\,;+\infty]$.

Ceci montre que g^{-1} est dérivable au sens généralisé en tout point a de J et que :

$$\forall\, a \in J, \quad (g^{-1})'(a) = \frac{1}{g'\big(g^{-1}(a)\big)}.$$

2) a) Puisque g admet un maximum local en c, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$]c - \alpha\,; c + \alpha[\subset I \quad \text{et} \quad \forall\, x \in]c - \alpha\,; c + \alpha[, \quad g(x) \leqslant g(c).$$

On a alors :
$$\begin{cases} \forall\, x \in]c - \alpha\,; c[, \quad \dfrac{g(x) - g(c)}{x - c} \geqslant 0 \\[2ex] \forall\, x \in]c\,; c + \alpha[, \quad \dfrac{g(x) - g(c)}{x - c} \leqslant 0, \end{cases}$$

d'où, en passant à la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers c, puisque g est dérivable au sens généralisé en c : $g'(c) \geqslant 0$ et $g'(c) \leqslant 0$, donc $g'(c) = 0$.

2) b) Considérons l'application $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\quad \forall\, x \in I, \quad h(x) = g(x) - \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a).$

On a ainsi : $h(b) = h(a) = g(a)$.

Puisque g est continue sur I, par opérations, h est continue sur I.

Il est immédiat, par opérations sur les limites, que h est dérivable au sens généralisé en tout point de I et que : $\quad \forall\, x \in I, \quad h'(x) = g'(x) - \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}, \qquad$ avec la convention : $\pm\infty + \lambda = \pm\infty$.

L'application h est continue sur le segment $[a\,;b]$, donc, d'après un théorème du Cours, h est bornée sur ce segment et y atteint ses bornes. Notons $m = \operatorname*{Inf}_{x \in [a;b]} h(x), \quad M = \operatorname*{Sup}_{x \in [a;b]} h(x)$.

Si $m = M$, alors h est constante sur $[a\,;b]$, donc, pour $c = \dfrac{a + b}{2}$, par exemple, on a $h'(c) = 0$, et donc $g'(c) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$.

Supposons $m < M$. Comme $h(a) = h(b)$, on a nécessairement $m \neq h(a)$ ou $M \neq h(a)$. Quitte à remplacer g par $-g$, on peut se ramener au cas $M \neq h(a) = h(b)$. On a alors $c \in \,]a\,;b[$. D'après 2)a), il en résulte $h'(c) = 0$, et donc $g'(c) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$.

3) a) Puisque g est continue sur $\overline{J_x}$ et dérivable sur J_x, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in J_x$ tel que : $g'(c_x) = \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$. Par définition de la borne inférieure et de la borne supérieure, on a alors, avec les conventions habituelles dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\operatorname{Inf}\big\{g'(y)\,;\, y \in J_x\big\} \leqslant g'(c_x) \leqslant \operatorname{Sup}\big\{g'(y)\,;\, y \in J_x\big\}$$

d'où le résultat voulu.

3) b) Puisque $g'(y) \underset{y \,\longrightarrow\, a,\ y \neq a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\operatorname{Inf}\big\{g'(y)\,;\, y \in J_x\big\} \underset{x \,\longrightarrow\, a,\ x \neq a}{\longrightarrow} \ell \quad \text{et} \quad \operatorname{Sup}\big\{g'(y)\,;\, y \in J_x\big\} \underset{x \,\longrightarrow\, a,\ x \neq a}{\longrightarrow} \ell,$$

et donc, d'après l'encadrement obtenu en a) dans $\overline{\mathbb{R}}$: $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \underset{x \,\longrightarrow\, a,\ x \neq a}{\longrightarrow} \ell$.

Ceci montre que g est dérivable au sens généralisé en a et que : $g'(a) = \ell$.

B. La fonction racine cubique

1) a) L'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ y \longmapsto g(y) = y^3$ est continue, strictement croissante, de limite $-\infty$ en $-\infty$, de limite $+\infty$ en $+\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection monotone, g est bijective et l'application réciproque $f = g^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est continue, strictement croissante, de limite $-\infty$ en $-\infty$, de limite $+\infty$ en $+\infty$.

De plus, g est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbb{R}$, donc, d'après A.1), f est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{g'\big(f(x)\big)} = \frac{1}{3\big(f(x)\big)^2}.$$

En particulier : $f'(0) = \dfrac{1}{g'\big(f(0)\big)} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$.

Et : $$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{|x|^{-2/3}}{3}.$$

1) b) D'après a) :

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{|x|^{-2/3}}{3} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Ainsi, f' est paire et $f' \,|_{]0\,;+\infty[}$ est strictement décroissante. On a donc, pour tout $(s,t) \in (\mathbb{R}^*)^2$:

$$f'(s) \leqslant f'(t) \iff f'(|s|) \leqslant f'(|t|) \iff |s| \geqslant |t|.$$

De plus, le même raisonnement montre aussi que :

$$\forall\,(s,t) \in (\mathbb{R}^*)^2, \quad f'(s) < f'(t) \iff |s| > |t|,$$

ce qui nous servira dans la question c) suivante.

1) c) Par opérations, h est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{-a, a\}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-a, a\}, \quad h'(x) = f'(x+a) - f'(x-a).$$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-a, a\}$.

• Si $x < 0$, alors $|x+a| < |x|+|a| = (-x)+a = -(x-a) \leqslant |x-a|$, donc, d'après b) : $f'(x+a) > f'(x-a)$, d'où $h'(x) > 0$.

• Si $x > 0$, alors $|x-a| < |x| + |a| = |x+a|$, donc, d'après b) : $f'(x-a) > f'(x+a)$, d'où $h'(x) < 0$.

Ceci montre que h est strictement croissante sur $]-\infty\,;a[$ et sur $]-a\,;0[$, et que h est strictement décroissante sur $]0\,;a[$ et sur $]a\,;+\infty[$. Comme de plus h est continue sur $\mathbb{R}$, il en résulte que h est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$, donc h atteint son maximum en 0.

1) d) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Si $x = y$, alors l'inégalité demandée est triviale : $0 \leqslant 2\,|f(0)|$.

Supposons donc $x \neq y$. Notons $z = \dfrac{x+y}{2}$ et $a = \left|\dfrac{x-y}{2}\right|$, de sorte que :

$$\begin{cases} x = z + a \\ y = z - a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = z - a \\ y = z + a. \end{cases}$$

On a, dans les deux cas : $|f(x) - f(y)| = \big|f(z+a) - f(z-a)\big|$.
D'autre part, comme f est (strictement) croissante et que $z - a \leqslant z + a$ (car $a > 0$), on a :

$$\big|f(z+a) - f(z-a)\big| = f(z+a) - f(z-a).$$

D'après c), on a :

$$f(z+a) - f(z-a) \leqslant f(0+a) - f(0-a) = f(a) - f(-a).$$

Enfin, comme f est impaire :

$$f(a) - f(-a) = 2\,f(a) = 2\,f\Big(\Big|\frac{x-y}{2}\Big|\Big) = 2\,\Big|f\Big(\frac{x-y}{2}\Big)\Big|.$$

On conclut : $|f(x) - f(y)| \leqslant 2\,\Big|f\Big(\dfrac{x-y}{2}\Big)\Big|$.

1) e) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque f est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall\, t \in [-\eta\,;\eta], \quad |f(t)| = |f(t) - f(0)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x - y| \leqslant \eta$.

On a alors $\left|\dfrac{x-y}{2}\right| \leqslant \dfrac{\eta}{2} \leqslant \eta$, donc : $\left|f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\right| \leqslant \varepsilon$, puis, d'après d) : $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

On a montré :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big(\ |x - y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\ \Big),$$

et on conclut que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque : On peut montrer un peu plus simplement que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, par exemple de la façon suivante.

• On a :

$$\forall\, (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \sqrt[3]{\alpha + \beta} \leqslant \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta},$$

inégalité évidente par élévation aux cubes.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que, par exemple, $x \leqslant y$.

$*$ Si $x \geqslant 0$, alors $y \geqslant 0$, donc : $\sqrt[3]{y} \leqslant \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y - x}$, donc : $0 \leqslant \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x} \leqslant \sqrt[3]{y - x}$,
puis : $|\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x}| \leqslant \sqrt[3]{y - x}$.

$*$ Si $y \leqslant 0$, en notant $X = -y$, $Y = -x$, on a alors $0 \leqslant X \leqslant Y$, d'où, d'après le cas précédent : $|\sqrt[3]{Y} - \sqrt[3]{X}| \leqslant \sqrt[3]{Y - X}$, c'est-à-dire : $|-\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}| \leqslant \sqrt[3]{y - x}$.

$*$ Si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $(-x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, donc :

$$0 \leqslant \sqrt[3]{y - x} = \sqrt[3]{y + (-x)} \leqslant \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{-x} = \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x}.$$

Finalement :

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x}| \leqslant \sqrt[3]{|y - x|}.$$

• Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Notons $\eta = \varepsilon^3$. On a alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|x - y| \leqslant \eta \iff |x - y| \leqslant \varepsilon^3 \iff \sqrt[3]{|y - x|} \leqslant \varepsilon \implies |\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x}| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui montre que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par mise sous forme canonique d'un trinôme en y :

$$x^2 + xy + y^2 = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 \geqslant \frac{3}{4}x^2.$$

2) b) Soit $(x_0, x) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0 \neq 0$ et $x \neq x_0$. Notons $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$. On a :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{y^3 - y_0^3} = \frac{1}{y^2 + yy_0 + y_0^2} \leqslant \frac{1}{\dfrac{3}{4}y_0^2} = \frac{4}{3y_0^2} = 4f'(x_0).$$

D'autre part, comme f est strictement croissante, on a : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$.

On conclut :

$$0 < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 4f'(x_0).$$

C. Construction d'une suite dense

1) a) • L'application $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations.

• L'application g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R},\ \ g'(t) = \cos t - t \sin t$.

L'application f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ f'(x) = \dfrac{1}{3\big(f(x)\big)^2}$.

Par composition, $g \circ f$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ (g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) f'(x).$$

• On a : $f'(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} +\infty$ et $g'\big(f(x)\big) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$, donc : $(g \circ f)'(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} +\infty$.

D'après A.3), on en déduit que $g \circ f$ est dérivable au sens généralisé en 0 et que $(g \circ f)'(0) = +\infty$.

1) b) On a, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) f'(x) = \big(\cos f(x) - f(x) \sin f(x)\big) \frac{1}{3\big(f(x)\big)^2} = \frac{\cos f(x)}{3\big(f(x)\big)^2} - \frac{\sin f(x)}{3 f(x)}.$$

Comme cos et sin sont bornées sur $\mathbb{R}$ et que $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il s'ensuit : $(g \circ f)'(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) a) On a : $\quad g(k\pi) = k\pi \cos k\pi = (-1)^k k\pi, \qquad g\big((k+1)\pi\big) = (-1)^{k+1}(k+1)\pi.$

Comme $k\pi \geqslant |x|$, x est entre $(-1)^k k\pi$ (au sens large) et $-(-1)^k(k+1)\pi$ (au sens strict). Comme g est continue sur l'intervalle joignant $(-1)^k\pi$ et $-(-1)^k(k+1)\pi$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $y(k,x) \in [k\pi\,;(k+1)\pi[$ tel que $g\big(y(k,x)\big) = x$.

2) b) On a : $\quad x - a_{n_k} = g\big(y(k,x)\big) - g\big(f(n_k)\big) = (g \circ f)\big(y(k,x)^3\big) - (g \circ f)(n_k).$

D'après le théorème des accroissements finis, appliqué à $g \circ f$ sur $[n_k\,; y(k,x)^3]$, il existe $c_k \in]n_k\,; y(k,x)^3[$ tel que :

$$x - a_{n_k} = \big(y(k,x)^3 - n_k\big)(g \circ f)'(c_k).$$

Comme n_k est la partie entière de $y(k,x)^3$, on a : $0 \leqslant y(k,x)^3 - n_k < 1$.

D'autre part, $c_k \geqslant n_k \geqslant y(k,x)^3 - 1 \geqslant (k\pi)^3 - 1 \underset{k\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et, d'après 1) b), $(g \circ f)'(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, par composition des limites : $(g \circ f)'(c_k) \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il s'ensuit, par opérations : $x - a_{n_k} \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $a_{n_k} \underset{k\infty}{\longrightarrow} x$.

3) D'après 2), pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(n_k)_k$ d'entiers naturels telle que $a_{n_k} \underset{k\infty}{\longrightarrow} x$, donc x est adhérent à l'ensemble $\{a_n\,; n \in \mathbb{N}\}$. Ceci montre que $\{a_n\,; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4) • On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ 0 \leqslant \lambda_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Comme la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (exemple de Riemann, $2 > 1$), par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \lambda_n$ converge.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\qquad |a_n| = |n^{1/3} \cos(n^{1/3})| \leqslant n^{1/3},$

donc : $\quad |f(a_n)| = |\sqrt[3]{a_n}| = \sqrt[3]{|a_n|} \leqslant \sqrt[3]{n^{1/3}} = n^{1/9}, \quad$ puis : $\quad |\lambda_n f(a_n)| \leqslant \dfrac{n^{1/9}}{n^2 + 1} \leqslant \dfrac{1}{n^{2 - \frac{1}{9}}}$.

Comme la série numérique $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^{2-\frac{1}{9}}}$ converge (exemple de Riemann, $2 - \dfrac{1}{9} > 1$), par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} |\lambda_n f(a_n)|$ converge.

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_n \lambda_n f(a_n)$ est absolument convergente, donc convergente.

II. Construction de la fonction F

1) a) Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Alors K est borné, donc il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $K \subset [-A\,;A]$.

On a, d'après I.B.1)d) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad \big|f(x-a_n) - f(-a_n)\big| \leqslant 2\left|f\Big(\frac{x}{2}\Big)\right|.$$

En particulier :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [-A\,;A],\quad \big|f(x-a_n) - f(-a_n)\big| \leqslant 2f\Big(\frac{A}{2}\Big) = 2\Big(\frac{A}{2}\Big)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}A^{\frac{1}{3}},$$

puis :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [-A\,;A],\quad \big|\lambda_n f(x-a_n) - \lambda_n f(-a_n)\big| \leqslant 2^{\frac{2}{3}}A^{\frac{1}{3}}\lambda_n.$$

Comme la série numérique $\displaystyle\sum_n \lambda_n$ converge, il en résulte, par définition de la convergence normale, que la série d'applications $\displaystyle\sum_n \Big(x \longmapsto \big(\lambda_n f(x-a_n) - \lambda_n f(-a_n)\big)\Big)$ est normalement convergente (donc uniformément convergente) sur $[-A\,;A]$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad \lambda_n f(x-a_n) &= \big(\lambda_n f(x-a_n) - \lambda_n f(-a_n)\big) + \lambda_n f(-a_n)\\ &\underset{f \text{ est impaire}}{=} \big(\lambda_n f(x-a_n) - \lambda_n f(-a_n)\big) - \lambda_n f(a_n).\end{aligned}$$

Comme la série d'applications $\displaystyle\sum_n \Big(x \longmapsto \big(\lambda_n f(x-a_n) - f(-a_n)\big)\Big)$ converge uniformément sur $[-A\,;A]$ et que la série numérique $\displaystyle\sum_n \lambda_n f(a_n)$ converge, par opération, la série d'applications $\displaystyle\sum_n \big(x \longmapsto f(x-a_n)\big)$ converge uniformément sur $[-A\,;A]$, donc converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

1) b) • Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \longmapsto \lambda_n f(x-a_n)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et que la série d'applications $\displaystyle\sum_n x \longmapsto f(x-a_n)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$, d'après un théorème du Cours, F est continue sur $\mathbb{R}$.

• Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que les λ_n sont tous > 0, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \lambda_n f(x-a_n) < \lambda_n f(y-a_n).$$

Par sommation infinie d'inégalités dont l'une au moins est stricte (elles sont toutes strictes ici), pour des séries convergentes, on a donc : $F(x) < F(y)$, et on conclut que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1) c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Supposons $x > a_0$. On a, comme ci-dessus, mais en sommant de 1 à l'infini (au lieu de 0 à l'infini) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n) > \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n f(a_0 - a_n),$$

c'est-à-dire : $F(x) - \lambda_0 f(x - a_0) > F(a_0)$, d'où : $F(x) - F(a_0) > \lambda_0 f(x - a_0)$.

- De même, si $x < a_0$, on obtient : $F(x) - F(a_0) < \lambda_0 f(x - a_0)$.

Remarque : Les inégalités strictes en conclusion, sont plus logiques que les inégalités larges demandées par l'énoncé.

1) d) On a, pour $x > a_0$: $F(x) > F(a_0) + \lambda_0 f(x - a_0) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc : $F(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On a, pour $x < a_0$: $F(x) < F(a_0) + \lambda_0 f(x - a_0) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc : $F(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

1) e) On a vu que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $F(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $F(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
D'après le théorème de la bijection monotone, on conclut que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, que F^{-1} est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et que $F^{-1}(y) \underset{y \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $F^{-1}(y) \underset{y \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2) Soient $x, x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq x_0$, et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\
= \;& \frac{1}{x - x_0}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f(x - a_k) - \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f(x_0 - a_k)\Big) \\
= \;& \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \\
= \;& \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{\lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0}}_{\geqslant 0} \\
\geqslant \;& \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0},
\end{aligned}$$

car les λ_k sont tous > 0 et f est croissante.

3) D'après 2) appliqué à $x = a_n$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} - \{a_n\}$:

$$\frac{F(x) - F(a_n)}{x - a_n} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(a_n - a_k)}{x - a_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(a_n - a_k)}{x - a_n}}_{\geqslant 0} + \lambda_n \frac{f(x - a_n) - f(a_n - a_n)}{x - a_n}$$

$$\geqslant \lambda_n \frac{f(x - a_n)}{x - a_n} = \lambda_n \frac{1}{f(x - a_n)^2} \underset{x \longrightarrow a_n}{\longrightarrow} +\infty.$$

Il en résulte : $\dfrac{F(x) - F(a_n)}{x - a_n} \underset{x \longrightarrow a_n}{\longrightarrow} +\infty$, donc F est dérivable au sens généralisé en a_n et $F'(a_n) = +\infty$.

4) a) L'application $S_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x - a_k)$ est dérivable en x_0, comme somme d'un nombre fini d'applications dérivables en x_0, et : $\quad S_n'(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k)$.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in]x_0 - \varepsilon\,; x_0 + \varepsilon[,\quad \left| \frac{S_n(x) - S_n(x_0)}{x - x_0} - S_n'(x_0) \right| \leqslant 1,$$

d'où :

$$1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{x(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} = 1 + \frac{S_n(x) - S_n(x_0)}{x - x_0} \geqslant S_n'(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0 - a_k).$$

4) b) Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Puisque la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \lambda_n f'(x - a_n)$ est divergente (hypothèse) et à termes $\geqslant 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k) \geqslant A + 1$.

D'après a), il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x - x_0| < \varepsilon$:

$$1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k) \geqslant A + 1,$$

donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geqslant A,$$

puis :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geqslant A.$$

On a montré :

$$\forall\, A \geqslant 0,\ \exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in]x_0 - \varepsilon\,; x_0 + \varepsilon[,\quad \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \geqslant A,$$

c'est-à-dire : $\quad \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \underset{x \,\longrightarrow\, x_0}{\longrightarrow} +\infty$.

Ceci montre que F est dérivable au sens généralisé en x_0 et que $F'(x_0) = +\infty$.

5) a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq x_0$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0}.
\end{aligned}$$

On a, d'après I.B.2)b) :

$$\forall\, k \geqslant n+1,\quad 0 \leqslant \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leqslant 4 f'(x_0 - a_k),$$

d'où :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} + 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k).$$

5) b) Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Puisque la série $\sum_{k\geqslant 0} \lambda_k f'(x-a_k)$ converge (hypothèse), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\Big| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x-a_k) \Big| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Notons $\beta = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x-a_k)$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x-a_k)$.

Par opérations, φ est dérivable en x_0 et $\varphi'(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$.

Puisque $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} \underset{x \,\longrightarrow\, x_0}{\longrightarrow} \varphi'(x_0)$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in \left]x_0 - \alpha\,;x_0+\alpha\right[,\quad \Big| \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} - \varphi'(x_0) \Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

D'après 2) et 5)a), on a :

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} + 4\beta.$$

Notons $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x-a_k) = \varphi'(x_0) + \beta$. On a :

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} \geqslant \varphi'(x_0) - \frac{\varepsilon}{4} \geqslant \Big(\ell - \frac{\varepsilon}{4}\Big) - \frac{\varepsilon}{4} = \ell - \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} + 4\beta \leqslant \varphi'(x_0) + \frac{\varepsilon}{4} + 4\beta = \ell + \frac{\varepsilon}{4} + 3\beta \leqslant \ell + \varepsilon.$$

On obtient :

$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \leqslant \ell + \varepsilon.$$

On a ainsi montré :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in \left]x_0 - \alpha\,;x_0+\alpha\right[,\quad \Big| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - \ell \Big| \leqslant \varepsilon,$$

et on conclut : $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \underset{x \,\longrightarrow\, x_0}{\longrightarrow} \ell$.

Ceci établit que F est dérivable en x_0 et que : $F'(x_0) = \ell = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x-a_k)$.

6) D'après 3),4),5), F est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbb{R}$.
D'après I.A.1), F^{-1} est alors dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbb{R}$.
De plus, d'après 3),4),5) : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ F'(x) \in \left]0\,;+\infty\right[$, donc : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ (F^{-1})'(x) \in \left[0\,;+\infty\right[$
et donc $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ (F^{-1})'(x) \neq +\infty$.
Finalement : F^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

III. Parties denses de $\mathbb{R}$

A. Intersection d'ensembles ouverts denses

1) a) Récurrence sur n.

• Comme V_0 et I sont ouverts, $I \cap V_0$ est ouvert.

Comme V_0 est dense dans $\mathbb{R}$ et que I est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $I \cap V_0$ est non vide.

Ainsi, $I \cap V_0$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Il existe donc $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$u_0 < v_0, \qquad [u_0\,;v_0] \subset I \cap V_0.$$

• Supposons construits $u_0, ..., u_n$, $v_0, ..., v_n$ convenant.

Comme V_{n+1} et $]u_n\,;v_n[$ sont ouverts, $]u_n\,;v_n[\cap V_{n+1}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Comme V_{n+1} est dense dans $\mathbb{R}$ et que $]u_n\,;v_n[$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $]u_n\,;v_n[\cap V_{n+1}$ est non vide.

Ainsi, $]u_n\,;v_n[\cap V_{n+1}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Il existe donc $u_{n+1}, v_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$u_{n+1} < v_{n+1}, \qquad [u_{n+1}\,;v_{n+1}] \subset]u_n\,;v_n[\cap V_{n+1}.$$

On a ainsi défini, par récurrence, un couple de suites $\big((u_n)_{n\geqslant 0},\, (v_n)_{n\geqslant 0}\big)$ convenant.

1) b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_0.$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée (par v_0), donc converge vers un réel λ.

La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée (par u_0), donc converge vers un réel μ.

Comme $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n < v_n$, on a, par passage à la limite : $\lambda \leqslant \mu$.

Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \lambda \leqslant \mu \leqslant v_n.$$

D'où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in [u_n\,;v_n] \subset]u_0\,;v_0[\subset I$$

et : $\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \ \lambda \in [u_n\,;v_n] \subset V_n,$ donc $\lambda \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = B.$

On conclut : $\lambda \in I \cap B$, ce qui montre que $I \cap B$ n'est pas vide.

2) D'après 1), pour tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$, on a $I \cap B \neq \varnothing$, donc B est dense dans $\mathbb{R}$.

3) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ V'_n = V_n - \{x_n\}$.

D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V'_n = V_n \cap (\mathbb{R} - \{x_n\})$, donc V'_n est ouvert comme intersection de deux ouverts.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme V_n est dense dans $\mathbb{R}$, V_n n'est évidemment pas un singleton, donc V'_n, obtenu à partir de V_n en lui enlevant un point, n'est pas vide.

Ainsi, V'_n est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, dense dans $\mathbb{R}$.

D'après 2), appliqué à $(V'_n)_{n\geqslant 0}$ à la place de $(V_n)_{n\geqslant 0}$, l'ensemble $B' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V'_n$ est dense dans $\mathbb{R}$. Mais :

$$B' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(V_n \cap (\mathbb{R} - \{x_n\})\big) = \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n\Big) - \{a_n\,; n \in \mathbb{N}\} = B - \{a_n\,; n \in \mathbb{N}\}.$$

On conclut que $B' = B - \{a_n\,; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

B. Parties de $\mathbb{R}$ contenant de gros ensembles compacts

1) a) La famille $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de C, car : $\forall\, k\in\mathbb{N},\quad c_k\in I_k$.

Comme C est compact (hypothèse), d'après la caractérisation de Borel et Lebesgue de la compacité, il existe un sous-recouvrement ouvert de C, c'est-à-dire qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\;C\subset \displaystyle\bigcup_{0\leqslant k\leqslant n} I_k$.

1) b) Notons, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$h_k : [a\,;b]\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto h_k(x)=\operatorname{Max}\big(0,\ \alpha_k-|x-c_k|\big).$$

Ainsi :

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in[a\,;b],\quad h_k(x)=\begin{cases}\alpha_k-|x-c_k|>0 & \text{si}\quad x\in I_k\\ 0 & \text{si}\quad x\notin I_k.\end{cases}$$

Notons $\;h=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} h_k$.

Il est clair que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, h_k est continue sur $\mathbb{R}$ et est $\geqslant 0$. Il en résulte, par addition, que h est continue sur $\mathbb{R}$ et $\geqslant 0$. De plus :

$$\forall\, x\in[a\,;b],\quad \Big(h(x)>0\iff x\in\bigcup_{0\leqslant k\leqslant n} I_k\Big).$$

Comme $\;C\subset\displaystyle\bigcup_{0\leqslant k\leqslant n} I_k$, on a : $\;\forall\, x\in C,\quad h(x)>0$.

Ainsi, h est continue sur C et à valeurs >0 sur C. Comme C est compact, h est minorée sur C et atteint sa borne inférieure. Notons $m=\inf\{h(x)\,;x\in C\}>0$. Notons :

$$g:[a\,;b]\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto\operatorname{Min}\Big(1,\ \frac{h(x)}{m}\Big)\leqslant 1.$$

Comme $h\geqslant 0$, on a : $\;\forall\, x\in[a\,;b],\quad g(x)\geqslant 0$.

Ainsi, g est à valeurs dans $[0\,;1]$.

D'autre part, comme $x\longmapsto 1$ et $x\longmapsto\dfrac{h(x)}{m}$ sont continues sur $[a\,;b]$, par opération classique (minimum de deux fonctions continues), g est continue sur $[a\,;b]$.

On a, pour tout $x\in C$, $\;h(x)\geqslant m$, donc $\;\dfrac{h(x)}{m}\geqslant 1$, d'où $g(x)=1$.

Et, pour tout $\;x\in[a\,;b]-\displaystyle\bigcup_{0\leqslant k\leqslant n} I_k$, on a $h(x)=0$, donc $g(x)=\operatorname{Min}(1,0)=0$.

1) c) On a :

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\underset{g\geqslant 0}{\leqslant}\int_{\bigcup_{0\leqslant k\leqslant n} I_k} g(x)\,\mathrm{d}x\underset{g\geqslant 0}{\leqslant}\sum_{k=0}^{n}\int_{I_k} g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\text{Longueur}(I_k)=\sum_{k=0}^{n}2\alpha_k\underset{\alpha_k\geqslant 0}{\leqslant}2\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k\leqslant\varepsilon.$$

2) a) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$.

Par hypothèse, il existe un compact C tel que $C\subset A\cap[a\,;b]$ et il existe $\varepsilon>0$ tel que, pour toute application continue $g:[a\,;b]\longrightarrow[0\,;1]$, satisfaisant $g(x)=1$ pour tout $x\in C$, on ait $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\varepsilon$.

Supposons $A \cap [a\,;b]$ (au plus) dénombrable. Alors, C est (au plus) dénombrable. Il existe donc une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $A \cap [a\,;b]$ telle que $C = \{c_n\,;n \in \mathbb{N}\}$.

D'après 1) appliqué à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ à la place de ε, on aurait, pour la fonction g de 1)b) : $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$,

en contradiction avec $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \varepsilon$ de l'hypothèse.

Il en résulte que $A \cap [a\,;b]$ n'est pas (au plus) dénombrable.

2) b) D'après a), pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $A \cap [a\,;b]$ n'est pas vide, donc A est dense dans $\mathbb{R}$.

De plus, pour toute partie dénombrable D de A, comme $A \cap [a\,;b]$ n'est pas un singleton, $\big(A \cap [a\,;b]\big) - D$ n'est pas vide, ce qui montre que $A - D$ est dense dans $\mathbb{R}$.

IV. Densité de l'ensemble des points de pente infinie

A. Densité de l'ensemble des points de pente infinie

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \lambda_n g_T(x - a_n) \leqslant \lambda_n T.$

Comme la série numérique $\displaystyle\sum_n \lambda_n$ converge, la série numérique $\displaystyle\sum_n \lambda_n T$ converge, donc, d'après le théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série numérique $\displaystyle\sum_n \lambda_n g_T(x - a_n)$ converge.

1) b) • On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_T(x) = \mathrm{Inf}\,\big(T, f'(x)\big) = \mathrm{Inf}\,\Big(T,\ \frac{1}{3|x|^{2/3}}\Big) = \begin{cases} T & \text{si} \quad |x| \leqslant (3T)^{3/2} \\ \dfrac{1}{3|x|^{2/3}} & \text{si} \quad |x| > (3T)^{3/2}. \end{cases}$$

Il est alors clair que g_T est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc, par opérations, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $x \longmapsto \lambda_n g_T(x - a_n)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• D'autre part :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |\lambda_n g_T(x - a_n)| \leqslant \lambda_n T$$

et la série numérique $\displaystyle\sum_n \lambda_n T$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série d'applications $\displaystyle\sum_n x \longmapsto \lambda_n g_T(x - a_n)$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$.

Il en résulte, d'après un théorème du Cours, que G_T est continue sur $\mathbb{R}$.

1) c) • On a, par définition des g_T : $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad g_T(x - a_n) \leqslant f'(x - a_n)$,

donc, puisque les λ_n sont tous $\geqslant 0$: $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n g_T(x - a_n) \leqslant \lambda_n f'(x - a_n)$,

puis, par sommation de séries convergentes, ou de séries divergentes à termes réels $\geqslant 0$ ou égaux à $+\infty$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n g_T(x - a_n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f'(x - a_n),$$

c'est-à-dire, d'après II. : $\qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad G_T(x) \leqslant F'(x).$

Il en résulte : $\qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Sup}\,\{G_T(x)\,;T \in\,]0\,;+\infty[\} \leqslant F'(x).$

• Soient $x \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $M < F'(x)$.

Puisque $F'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x - a_k)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k) > M$.

$*$ Supposons qu'il existe $k_0 \in \{0, ..., n\}$ tel que $x = a_{k_0}$.

En notant $T = \dfrac{M+1}{\lambda_{k_0}}$, on a : $\lambda_{k_0} g_T(x - a_{k_0}) = M + 1$, donc $G_T(x) \geqslant \lambda_{k_0} g_T(x - a_{k_0}) \geqslant M + 1 > M$.

$*$ Sinon, on a : $\forall\, k \in \{0, ..., n\},\ x \neq a_k$.

Notons $M = \operatorname*{Max}_{0 \leqslant k \leqslant n} f'(x - a_k)$. On a alors :

$$\forall\, k \in \{0, ..., n\}, \quad f'(x - a_k) \leqslant T,$$

donc :

$$\forall\, k \in \{0, ..., n\}, \quad g_T(x - a_k) = f'(x - a_k),$$

puis :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k g_T(x - a_k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k) > M.$$

Ceci montre :

$$\exists\, T \in \mathbb{R}_+^*, \quad G_T(x) > M$$

et donc M n'est pas un majorant de $\{G_T(x)\,;t \in \,]0\,;+\infty[\}$, ce qui montre :

$$\operatorname{Sup}\{G_T(x)\,;T \in \,]0\,;+\infty[\} \geqslant F'(x).$$

Finalement :

$$\operatorname{Sup}\{G_T(x)\,;T \in \,]0\,;+\infty[\} = F'(x).$$

2) a) • Soit $x \in \mathbb{R}$.

$*$ S'il existe $T \in \,]0\,;+\infty[$ tel que $G_T(x) > M$, comme $F'(x) \geqslant G_T(x)$, on a : $F'(x) > M$.

$*$ Réciproquement, si $F'(x) > M$, alors,, comme $F'(x) = \operatorname{Sup}\{G_T(x)\,;T \in \,]0\,;+\infty[\}$, il existe $T \in \,]0\,;+\infty[$ tel que $G_T(x) > M$.

• Ceci montre :

$$x \in U_M \iff F'(x) > M \iff \exists\, T \in \,]0\,;+\infty[, \quad G_T(x) > M.$$

On a donc :

$$U_M = \bigcup_{T \in]0\,;+\infty[} \{x \in \mathbb{R}\,; G_T(x) > M\}.$$

2) b) • Pour tout $T \in \,]0\,;+\infty[$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}\,; G_T(x) > M\} = G_T^{-1}]M\,;+\infty[)$ est ouvert, comme image réciproque d'un ouvert par l'application continue G_T.

• On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F'(a_n) = +\infty > M,$$

donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in U_M,$$

d'où : $U_M \supset D = \{a_n\,; n \in \mathbb{N}\}$.

Comme D est dense dans $\mathbb{R}$, il en résulte que U_M (qui le contient) est dense dans $\mathbb{R}$.

3) On a :

$$\{x \in \mathbb{R}\,;F'(x) = +\infty\} = \{x \in \mathbb{R}\,;\forall\, M > 0,\ F'(x) > M\} = \{x \in \mathbb{R}\,;\forall\, M \in \mathbb{N}^*,\ \ F'(x) > M\} = \bigcap_{M\in\mathbb{N}^*} U_M.$$

Comme, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, U_M est un ouvert de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$, d'après III.A.2), $A = \bigcap_{M\in^*_N} U_M$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Comme Dest (au plus) dénombrable, d'après III.A.3), $A - D$ est encore dense dans $\mathbb{R}$.

B. Densité de l'ensemble des points de pente finie

1) Soit $x \in [a\,;b]$.

Si $x \in C$, alors $g(x) = 1$.

Si $x \notin C$, alors il existe $M > 0$ tel que $x \in U_M$, donc $F'(x) > M$.

Ainsi :

$$\forall\, x \in [a\,;b],\ \ \Big(g(x) = 1 \quad \text{ou} \quad F'(x) > M\Big),$$

donc :

$$\forall\, x \in [a\,;b],\ \ Mg(x) + F'(x) \geqslant M.$$

Considérons $\phi : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \phi(x) = M\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t + F(x)$. L'application ϕ est continue sur $[a\,;b]$, dérivable au sens généralisé en tout point de $]a\,;b[$ et :

$$\forall\, x \in]a\,;b[,\ \ \phi'(x) = Mg(x) + f'(x) \geqslant M.$$

D'après I.A.2)b), il en résulte : $\dfrac{\phi(b) - \phi(a)}{b-a} \geqslant M$.

Et : $\phi(b) = M\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t + F(b)$, $\ \phi(a) = F(a)$, donc : $M\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t + F(b) - F(a) \geqslant M(b-a)$.

2) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon < b$.

Notons $M = \dfrac{F(b) - F(a)}{b - a - \varepsilon}$, $\ C = \{x \in [a\,;b]\,; x \notin U_M\} \subset B \cap [a\,;b]$.

Soit $g : [a\,;b] \longrightarrow [0\,;1]$ continue telle que $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$.

On a, d'après 1) :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{M(b-a) - F(b) + F(a)}{M} = b - a - \frac{F(b) - F(a)}{M} = n - a - (b - a - \varepsilon) = \varepsilon.$$

D'après III.B., il en résulte que, pour toute partie dénombrable N de $\mathbb{R}$, $B - N$ est dense dans $\mathbb{R}$.

****