Préparation à l'agrégation interne de Mathématiques 2008-2009

Jean-Marie Monier

Corrigé de l'épreuve d'entraînement du 6 décembre 2008

I.

1. Notons $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

On a :

$$X^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & y(x+t) \\ z(x+t) & t^2 + yz \end{pmatrix}.$$

a)

$$X^2 = 0 \iff \begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ y(x+t) = 0 \\ z(x+t) = 0 \\ t^2 + yz = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} t = -x \\ x^2 + yz = 0 \end{cases} \right).$$

On conclut, le cas $X = 0$ rentrant dans la formule générale :

$$\mathcal{S}_{a)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \; ; \; x^2 + yz = 0 \right\},$$

ou encore :

$$\mathcal{S}_{a)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -\dfrac{x^2}{y} & -x \end{pmatrix} \; ; \; (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \; ; \; z \in \mathbb{R} \right\}.$$

b)

$$X^2 = -\mathrm{I}_2 \iff \begin{cases} x^2 + yz = -1 \\ y(x+t) = 0 \\ z(x+t) = 0 \\ t^2 + yz = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + t = 0 \\ x^2 + yz = -1. \end{cases}$$

On conclut :

$$\mathcal{S}_{b)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \; ; \; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; x^2 + yz = -1 \right\},$$

ou encore (le cas $y = 0$ étant impossible, puisqu'on aurait alors $x^2 = -1$) :

$$\mathcal{S}_{b)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -\dfrac{1 + x^2}{y} & -x \end{pmatrix} \; ; \; (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\}.$$

c) Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque : $A^2 = 0$.

Si X est solution de (1), alors $X^4 = (X^2)^2 = A^2 = 0$, donc X est nilpotente. D'après le cours, puisque $X \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente, on a $X^2 = 0$, d'où $A = X^2 = 0$, contradiction.

On conclut : $\mathcal{S}_{c)} = \varnothing$.

2. *a)*

$$AX = C \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+z=1 \\ y+t=-1, \end{cases}$$

donc $\mathcal{S}_{a)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 1-x & -1-y \end{pmatrix} \; ; \; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Il est clair que $\mathcal{S}_{a)}$ est un espace affine réel, de dimension 2.

b)

$$XB = C \iff \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x-y & -x+y \\ z-t & -z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-y=1 \\ z-t=1, \end{cases}$$

donc $\mathcal{S}_{b)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x-1 \\ z & z-1 \end{pmatrix} \; ; \; (x,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Il est clair que $\mathcal{S}_{b)}$ est un espace affine réel de dimension 2.

c) On calcule le produit matriciel AXB :

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}}^{X} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}^{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} & \underbrace{\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix}}_{AX} & \underbrace{\begin{pmatrix} x+z-y-t & -x-z+y+t \\ x+z-y-t & -x-z+y+t \end{pmatrix}}_{AXB} \end{array}$$

d'où :

$$AXB = C \iff \begin{pmatrix} x+z-y-t & -x-z+y+t \\ x+z-y-t & -x-z+y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \iff x+z-y-t=1,$$

donc $\mathcal{S}_{c)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & x-y+z-1 \end{pmatrix} \; ; \; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Il est clair que $\mathcal{S}_{c)}$ est un espace affine réel de dimension 3.

II.

1. • On a, par opérations sur les lignes ou sur les colonnes :

$$\mathrm{rg}\big(M_a - (1+3a)\mathrm{I}_3\big) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3a & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -2-a & 2+a \\ -3a & -2-a & 2+a \end{pmatrix} \underset{L_3=L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3a & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -2-a & 2+a \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_2=-C_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3a & -1+4a \\ -3a & 2+a \end{pmatrix} \underset{L_2 \longleftarrow L_2-L_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3a & -1+4a \\ 0 & 3-3a \end{pmatrix}.$$

On conclut :

$$\boxed{\mathrm{rg}\big(M_a-(1+3a)\mathrm{I}_3\big) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad a \neq 0 \quad \text{et} \quad a \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad a = 0 \quad \text{ou} \quad a = 1 \end{cases}}$$

• Ceci montre que $M_a - (1+3a)\mathrm{I}_3$ n'est pas inversible, donc, d'après le cours :

$$\boxed{1+3a \text{ est valeur propre de } M_a}$$

• De plus, d'après le théorème du rang :

$$\boxed{\dim\big(\mathrm{SEP}\,(M_a,\,1+3a)\big) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a\neq 0 \quad \text{et} \quad a \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad a = 0 \quad \text{ou} \quad a = 1. \end{cases}}$$

2. • On a :

$$M_aV = \begin{pmatrix} 1 & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -1+2a & 2+a \\ -3a & -2-a & 3+4a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V.$$

Comme $V \neq 0$, ceci montre que 1 est valeur propre de M_a et que V est un vecteur propre de M_a pour la valeur propre 1.

D'après le théorème de d'Alembert, le polynôme caractéristique χ_{M_a} de M_a est scindé sur $\mathbb{C}$, donc, en notant $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les zéros de χ_{Ma}, on a :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}\,(M_a) = 3 + 6a.$$

Si $a \neq 0$, alors 1 et $1+3a$ sont valeurs propres de M_a et sont distinctes, donc la troisième valeur propre de M_a est : $3 + 6a - \big(1 + (1+3a)\big) = 1 + 3a$.

Si $a = 0$, d'après I.1, 1 est valeur propre au moins double, donc la troisième valeur propre est $3 - (1+1) = 1$.

On conclut : les valeurs propres de M_a sont :

$$\boxed{1 \text{ (simple) et } 1+3a \text{ (double), si } a \neq 0, \quad 1 \text{ (triple) si } a = 0.}$$

3.a. Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après I.2, χ_{M_a} est scindé sur $\mathbb{R}$, donc, d'après un théorème du cours (CNS de trigonalisation d'une matrice carrée), on conclut :

$$\boxed{M_a \text{ est trigonalisable (dans } \mathbf{M}_3(\mathbb{R}))}$$

3.b. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, d'après I.1 et I.2, $1+3a$ est valeur propre double et la dimension du sous-espace propre associé est 1, donc M_a n'est pas diagonalisable.

Si $a = 0$, alors 1 est valeur propre triple et la dimension du sous-espace propre associé est 2 (d'après I.1), donc M_a n'est pas diagonalisable.

Si $a = 1$, alors les valeurs propres de M_a sont $1+3a$ (double) et 1 (simple), et la dimension du sous-espace propre associé à $1+3a$ est égale à 2 d'après I.1, donc M_a est diagonalisable.

On conclut que M_a est diagonalisable si et seulement si $a = 1$, ou encore :

$$\boxed{\text{L'ensemble des valeurs de } a \text{ pour lesquelles } M_a \text{ est diagonalisable est } \{1\}}$$

4.a. • Il s'agit de diagonaliser M_1.

D'après I.3b), M_1 est diagonalisable, $\mathrm{Sp}\,(M_1) = \{1,\,4\}$, $\dim\mathrm{SEP}\,(M_1, 1) = 1$, $\dim\mathrm{SEP}\,(M_1, 4) = 2$.

On a : $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

On a vu en I.2 : $M_1 V = V$.

On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$M \in \mathrm{SEP}\,(M_1, 4) \iff M_1 X = 4X \iff \begin{cases} x - 3y + 3z = 4x \\ -3x + y + 3z = 4y \\ -3x - 3y + 7z = 4z \end{cases} \iff x + y - z = 0.$$

Une base de $\mathrm{SEP}\,(M_1, 4)$ est donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

En notant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, P est inversible et $M_1 = PDP^{-1}$.

• Notons $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $R = P\Delta P^{-1}$.

Il est clair que $\Delta^2 = D$, donc :

$$R^2 = (P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = M_1.$$

Ainsi, R est une carrée de M_1.

Il reste à exprimer R.

On calcule P^{-1}, par exemple par résolution de système, et on obtient : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule alors R par produit de trois matrices :

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{\Delta} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{P^{-1}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{P\Delta} & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{P\Delta P^{-1} = R} \end{array}.$$

On peut contrôler :

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix} = M_1.$$

4.b. • On remarque : $m = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\,\mathrm{I}_2$.

Notons, pour $t \in \mathbb{R}$: $r_t = 2 \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

On a : $$r_t^2 = 4\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = m,$$
et les r_t sont deux à deux distinctes lorsque t décrit, par exemple, $[0\,;2\pi[$.

Ceci montre que m admet une infinité de racines carrées dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

• Pour toute racine carrée r de m dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, notons $R = P\begin{pmatrix}1 & (0)\\ (0) & r\end{pmatrix}P^{-1} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$R^2 = \left(P\begin{pmatrix}1 & (0)\\ (0) & r\end{pmatrix}P^{-1}\right)^2 = P\begin{pmatrix}1 & (0)\\ (0) & r\end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix}1 & (0)\\ (0) & m\end{pmatrix}P^{-1} = PDP^{-1} = M_1,$$

donc R est une racine carrée de M_1 dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

D'autre part, l'application $r \longmapsto R$ ainsi définie est clairement injective.

On conclut que M_1 admet une infinité de racines carrées dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

5. • On a :

$$N = M_0 - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix} - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix},$$

$$N^2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix} = 0.$$

• On a donc, puisque $N^2 = 0$: $\quad M_0 = \mathrm{I}_3 + N = \mathrm{I}_3 + N + \frac{1}{4}N^2 = \left(\mathrm{I}_3 + \frac{1}{2}N\right)^2$.

On conclut qu'il existe $(\alpha,\,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha\mathrm{I}_3 + \beta N$ soit une racine carrée de M_0 dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Il suffit en effet de prendre $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{2}$.

6.a. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$M_{-1/3}X = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1 & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3}\\ 1 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3}\\ 1 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + \frac{7}{3}y - \frac{7}{3}z = 0\\ x - \frac{5}{3}y + \frac{5}{3}z = 1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}3x + 7y - 7z = 0\\ 3x - 5y + 5z = 3\end{cases} \iff \begin{cases}3x + 7(y-z) = 0\\ 3x - 5(y-z) = 3\end{cases} \iff \begin{cases}36x = 21\\ 12(y-z) = -3\end{cases} \iff \begin{cases}x = \frac{7}{12}\\ y - z = -\frac{1}{4}.\end{cases}$$

6.b. Notons $U_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix}\frac{7}{12}\\ -\frac{1}{4}\\ 0\end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On a alors :

$$M_{-1/3}U_2 = U_1, \quad M_{-1/3}U_1 = 0, \quad M_{-1/3}U_3 = U_3.$$

Ainsi, la matrice de u dans $\mathcal{B} = (U_1,\, U_2,\, U_3)$ est : $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.c. • Notons $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$XU = UX \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & d & f \\ 0 & g & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} \iff d = 0, \quad a = e, \quad c = f, \quad f = 0, \quad g = 0, \quad h = g$$

$$\iff c = d = f = g = h = 0, \quad a = e.$$

Ainsi, les matrices commutant avec U sont les matrices $X = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$, $(a, b, i) \in \mathbb{R}^3$.

• Supposons que U admette une racine carrée R dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Alors, $R^2 = U$, d'où :

$$UR = R^2 R = R^3 = RR^2 = RU,$$

donc R commute avec U. D'après ce qui précède, il existe $(a, b, i) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $R = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

D'où :

$$R^2 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix}.$$

Puis : $\quad R^2 = U \iff \begin{cases} a^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ i^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ 0 = 1 \\ i^2 = 1 \end{cases}$, contradiction.

On conclut que U n'admet pas de racine carrée dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

6.d. Si $M_{-1/3}$ admettait une racine carrée dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, alors, par changement de base (comme plus haut en I.4a)), U admettrait une racine carrée, contradiction.

On conclut :

$$\boxed{M_{-1/3} \text{ n'admet pas de racine carrée dans } \mathbf{M}_3(\mathbb{R})}$$

III.

1. Supposons $\mathcal{S}_1 \neq \varnothing$. Il existe donc $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AX = C$.
Soit $Y \in \mathrm{Im}\,(C)$. Il existe $Z \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $Y = CZ$. On a alors :

$$Y = CZ = (AX)Z = A(XZ) \in \mathrm{Im}\,(A).$$

On conclut :

$$\mathrm{Im}\,(C) \subset \mathrm{Im}\,(A).$$

2.a. D'après le cours, puisque $r = \mathrm{rg}\,(A)$, il existe $P, Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PJQ$, où $J = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.b. • Notons $C_1, ..., C_n$ les colonnes de C, et $A_1, ..., A_n$ les colonnes de A.

Puisque $\mathrm{Im}\,(C) \subset \mathrm{Im}\,(A)$, on a : $\forall\, j \in \{1, ..., n\}, \quad C_j \in \mathrm{Vect}\,(A_1, ..., A_n)$,

donc, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, il existe $x_{1j}, ..., x_{nj} \in \mathbb{R}$ tels que : $C_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} A_i$.

En notant $X = (x_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on a donc, par produit matriciel : $AX = C$.

Ceci montre que (1) admet au moins une solution, notée X_0.

• On alors :

$$AX_0 = C \iff PJQX_0 = C \iff JQX_0 = P^{-1}C \implies J(JQX_0) = J(P^{-1}C) \implies J^2QX_0 = JP^{-1}C.$$

Mais il est clair que $J^2 = J$. On a donc : $JP^{-1}C = J^2QX_0 = JQX_0 = P^{-1}C$.

Considérons $X_1 = Q^{-1}P^{-1}C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$AX_1 = (PJQ)(Q^{-1}P^{-1}C) = P(JP^{-1}C) = P(P^{-1}C) = C,$$

donc X_1 est une solution de (1).

On conclut :

$$\boxed{\text{Une solution de (1) est } X = Q^{-1}P^{-1}C}$$

2.c. • Il est clair que $\mathcal{S}_1$ est un espace affine réel et que sa direction est l'espace vectoriel des $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AX = 0$. On a, avec les notations précédentes :

$$AX = 0 \iff PJQX = 0 \iff J(QX) = 0.$$

En notant $QX = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$, où $Y_1 \in \mathbf{M}_r(\mathbb{R})$, on a :

$$J(QX) = 0 \iff \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} Y_1 = 0 \\ Y_2 = 0. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de $AX = 0$ est donc

$$\left\{ Q^{-1}Y \,;\, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix},\ Y_3 \in \mathbf{M}_{n-r,r}(\mathbb{R}),\ Y_4 \in \mathbf{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Il est clair, puisque l'application $Y \longrightarrow Q^{-1}Y$ est linéaire, que cet espace vectoriel est de dimension $(n-r)r + (n-r)^2 = n(n-r)$.

On conclut :

$$\boxed{\dim\,(\mathcal{S}_1) = n(n-r)}$$

Ce résultat est cohérent avec celui obtenu dans l'exemple du I 2 a.

3.a. On a, en utilisant la transposition des matrices : (2) $XB = C \iff {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}X = {}^{\mathrm{t}}C$.

Munissons $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $(.\,|\,.)$. D'après 1. et 2., on a :

$$\mathcal{S}_2 \neq \varnothing \iff \mathrm{Im}\,({}^{\mathrm{t}}C) \subset \mathrm{Im}\,({}^{\mathrm{t}}B).$$

Mais : $\operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}C) = \big(\operatorname{Ker}(C)\big)^{\perp}$. En effet :

• Soit $V \in \operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}C)$. Il existe $U \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = {}^{\mathrm{t}}CU$. On a, pour tout $Z \in \operatorname{Ker}(C)$:

$$(V \mid Z) = ({}^{\mathrm{t}}CU \mid Z) = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}CU)Z = ({}^{\mathrm{t}}UC)Z = {}^{\mathrm{t}}U(CZ) = {}^{\mathrm{t}}U0 = 0,$$

donc $V \in \big(\operatorname{Ker}(C)\big)^{\perp}$.

Ceci montre : $\operatorname{Im}(C) \subset \big(\operatorname{Ker}(C)\big)^{\perp}$.

• On a, par les dimensions et le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}C) = \operatorname{rg}({}^{\mathrm{t}}C) = \operatorname{rg}(C) = n - \dim \operatorname{Ker}(C) = \dim \big(\operatorname{Ker}(C)\big)^{\perp}.$$

On conclut : $\operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}C) = \big(\operatorname{Ker}(C)\big)^{\perp}$.

De même : $\operatorname{Im}({}^{\mathrm{t}}B) = \big(\operatorname{Ker}(B)\big)^{\perp}$.

Ainsi :

$$\mathcal{S}_2 \neq \varnothing \iff \big(\operatorname{Ker}(C)\big)^{\perp} = \big(\operatorname{Ker}(B)\big)^{\perp} \iff \operatorname{Ker}(C) = \operatorname{Ker}(B).$$

3.b. On vient de voir :

$$XB = C \iff {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}X = {}^{\mathrm{t}}C.$$

Comme l'ensemble des solutions de ${}^{\mathrm{t}}BY = {}^{\mathrm{t}}C$ est un espace affine de dimension $(n-s)n$, où s est le rang de ${}^{\mathrm{t}}B$, c'est-à-dire aussi celui de B, et que l'application $Y \longmapsto {}^{\mathrm{t}}Y$ est linéaire, on conclut :

$$\boxed{\mathcal{S}_2 \text{ est un espace affine de dimension } n(n-s), \text{ où } s = \operatorname{rg}(B)}$$

Ce résultat est cohérent avec celui obtenu dans l'exemple du I 2 b.

4.a. On remarque que la troisième colonne A_3 de A est égale à la somme des deux premières A_1 et A_2, et que (A_1, A_2) est libre, donc : $\operatorname{rg}(A) = 2$.

4.b. Puisque $A_3 = A_1 + A_2$, postmultiplions A par une matrice inversible dont la troisième colonne est $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, par exemple :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}^{\text{notée } R} \\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\-1&1&0\end{pmatrix}}_{A} & \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}}_{AR} \end{array}$$

puis, comme la troisième ligne de AR est combinaison linéaire de ses deux premières lignes avec coefficients 2 et 1, prémultiplions AR par une matrice inversible dont la troisième ligne est $(2 \quad -1 \quad 1)$:

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}}^{AR} \\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}}_{\text{notée } S} & \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\text{notée } K} \end{array}$$

Ainsi : $SAR = K$.

Il est clair que $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$.

Notons $U = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, qui est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

On calcule le produit matriciel UK :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}^{K} \\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{U} & \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{UK=J}\end{array}$$

On a ainsi : $(US)AR = J$, d'où, en notant $P = (US)^{-1}$ et $Q = R^{-1}$: $A = PJQ$.

Les calculs de R^{-1}, US, $(US)^{-1}$ sont immédiats, et on obtient : $A = PJQ$, où

$$P = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

On peut contrôler ce résultat par produit matriciel.

4.c. α) On a vu plus haut : $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}\,(A_1, A_2)$.

D'autre part, en notant C_2 la deuxième colonne de C, la famille (A_1, A_2, C_2) est libre car :

$$\det_{b.c.}(A_1, A_2, C_2) = \begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&1&1\end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Ainsi : $C_2 \notin \mathrm{Im}\,(A)$, donc $\mathrm{Im}\,(C) \not\subset \mathrm{Im}\,(A)$, et on conclut, d'après 1. :

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \varnothing}$$

4.c. β) On a :

$$AX = C \iff PJQX = C \iff JQX = P^{-1}C.$$

Notons $J = \begin{pmatrix}\mathrm{I}_2 & 0\\0&0\end{pmatrix}$, $QX = \begin{pmatrix}Y_1 & Y_2\\Y_3&Y_4\end{pmatrix}$, et $P^{-1}C = \begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. On a :

$$J(QX) = P^{-1}C \iff \begin{pmatrix}\mathrm{I}_2 & 0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_1 & Y_2\\Y_3&Y_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ (0\ \ 0) & 0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} Y_1 = \begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix} \\ \\ Y_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\end{cases} \iff QX = \begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\x&y&z\end{pmatrix}, \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\iff X = Q^{-1}Y = RY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x & 1+y & 2+z \\ -1+x & 2+y & 1+z \\ -x & -y & -z \end{pmatrix}.$$

On conclut :

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1+x & 1+y & 2+z \\ -1+x & 2+y & 1+z \\ -x & -y & -z \end{pmatrix}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}}$$

Ainsi, $\mathcal{S}_1$ est un espace affine de dimension 3, ce qui est conforme au résultat théorique obtenu plus haut : $(n-r)n = (3-2)3 = 3$.

IV. A.

1.a. Par hypothèse, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, en notant $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, on ait : $A = PDP^{-1}$.

Cherchons une solution particulière X de (1) sous la forme $X = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \operatorname{diag}(\mu_1, ..., \mu_n)$, et $(\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a :

$$\mathrm{e}^X = A \iff \mathrm{e}^{P\Delta P^{-1}} = PDP^{-1} \iff P\,\mathrm{e}^{\Delta}P^{-1} = PDP^{-1} \iff \mathrm{e}^{\Delta} = D$$

$$\iff \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\mu_1}, ..., \mathrm{e}^{\mu_n}) = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \iff \begin{cases} \mathrm{e}^{\mu_1} = \lambda_1 \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\mu_n} = \lambda_n \end{cases} \iff \begin{cases} \mu_1 = \ln \lambda_1 \\ \vdots \\ \mu_n = \ln \lambda_n. \end{cases}$$

Ceci montre que (1) admet au moins une solution, la matrice $X = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \operatorname{diag}(\ln \lambda_1, ..., \ln \lambda_n)$.

1.b. Soit $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{e}^X = A$. On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$X\Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}X^k\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}X^k\Big)X,$$

car tout polynôme en X commute avec X.

D'où, en faisant tendre l'entier N vers l'infini : $X\,\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^X X$.

Ainsi, $XA = AX$, donc X commute avec A.

1.c. Reprenons les notations de a. : $A = PDP^{-1}$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Soit $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $Y = P^{-1}XP$, de sorte que $X = PYP^{-1}$.

On a : $XA = AX \iff YD = DY$.

En notant $Y = (y_{ij})_{ij}$, on a :

$$YD = DY \iff \forall\, i,j, \quad \sum_{k=1}^{n} (Y)_{ik}(D)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (D)_{ik}(Y)_{kj} \iff \forall\, i,j, \quad y_{ij}\lambda_j = \lambda_i y_{ij}$$

$$\iff \forall\, i,j, \quad (\lambda_i - \lambda_j)y_{ij} = 0 \iff \forall\, i,j, \quad \big(i \neq j \implies y_{ij} = 0\big) \iff Y \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}).$$

Notons alors $Y = \operatorname{diag}(\nu_1, ..., \nu_n)$. On a, comme plus haut :

$$\mathrm{e}^X = A \iff \mathrm{e}^Y = D \iff \forall\, i \in \{1, ..., n\}, \quad \nu_i = \ln \lambda_i,$$

ce qui montre que (1) n'a qu'une solution.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale ; ce sont 1 et 2. Ainsi, A admet deux valeurs propres distinctes et A est d'ordre deux, donc A est diagonalisable, et ses valeurs propres sont strictement positives et (deux à deux) distinctes. D'après 1., l'équation (1) admet une solution et une seule.

On diagonalise A. À cet effet, on commence par calculer les sous-espaces propres.

- $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}\,(A, 1) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = x \\ 2y = y \end{cases} \iff y = 0,$

donc $\mathrm{SEP}\,(A, 1)$ est de dimension 1 et admet pour base (V_1), où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}\,(A, 2) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = 2x \\ 2y = 2y \end{cases} \iff y = x,$

donc $\mathrm{SEP}\,(A, 2)$ est de dimension 1 et admet pour base (V_2), où $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, P est inversible, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$, ce qui donne une diagonalisation de A.

D'après 1., l'équation (1) admet une solution et une seule, et celle-ci est $X = P\varDelta P^{-1}$, où $\varDelta = \mathrm{diag}\,(0, \ln 2)$, donc :

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ln 2 \end{pmatrix}}^{\varDelta} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{P^{-1}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \ln 2 \\ 0 & \ln 2 \end{pmatrix}}_{P\varDelta} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \ln 2 \\ 0 & \ln 2 \end{pmatrix}}_{P\varDelta P^{-1} = X} \end{array}$$

On conclut :

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \ln 2 \\ 0 & \ln 2 \end{pmatrix} \right\}}$$

IV. B.

1. Soit $(X, Y) \in \big(\mathbf{M}_3(\mathbb{R})\big)^2$.

Si (X, Y) est solution de (S), alors :

$$0 = Y(X\,\mathrm{e}^Y + \mathrm{e}^X) = YX\,\mathrm{e}^Y + Y\,\mathrm{e}^X = YX\,\mathrm{e}^Y + (-\mathrm{e}^Y) = (YX - \mathrm{I}_3)\mathrm{e}^Y.$$

Comme e^Y est inversible (d'inverse e^{-Y}), on déduit $YX - \mathrm{I}_3 = 0$, $YX = \mathrm{I}_3$, donc X est inversible et $Y = X^{-1}$.

En reportant dans (S), comme

$$\mathrm{e}^{X^{-1}} + X^{-1}\mathrm{e}^X = 0 \iff X\mathrm{e}^{X^{-1}} + \mathrm{e}^X = 0,$$

on conclut à l'équivalence logique demandée : (X, Y) est solution de (1) si et seulement si :

$$X \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R}), \qquad Y = X^{-1}, \qquad \text{(E)} \quad X\,\mathrm{e}^{X^{-1}} + \mathrm{e}^X = 0.$$

2. Soit $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant (E), c'est-à-dire telle que $X\,\mathrm{e}^{X^{-1}} + \mathrm{e}^X = 0$.

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(X) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(X)$. Il existe $V \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tel que $XV = \lambda V$.

On a alors $\mathrm{e}^X V = \mathrm{e}^\lambda V$. En, effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} X^k\Big) V = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(X^k V) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(\lambda^k V) = \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\lambda^k\Big) V,$$

d'où, en faisant tendre l'entier N vers l'infini : $\mathrm{e}^X V = \mathrm{e}^\lambda V$.

D'autre part, puisque X est inversible, on a $\lambda \neq 0$ et :

$$X^{-1}V = \lambda^{-1}X^{-1}(\lambda V) = \lambda^{-1}X^{-1}(XV) = \lambda^{-1}V.$$

D'où :

$$\begin{aligned}0 = (X\,\mathrm{e}^{X^{-1}} + \mathrm{e}^X)V = X\,\mathrm{e}^{X^{-1}}V + \mathrm{e}^X V = X\mathrm{e}^{\lambda^{-1}}V + \mathrm{e}^\lambda V \\ = \mathrm{e}^{\lambda^{-1}}XV + \mathrm{e}^\lambda V = \mathrm{e}^{\lambda^{-1}}\lambda V + \mathrm{e}^\lambda V = (\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda^{-1}} + \mathrm{e}^\lambda)V,\end{aligned}$$

puis, comme $V \neq 0$:

$$(*) \qquad \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda^{-1}} + \mathrm{e}^\lambda = 0.$$

On a :

$$(*) \implies \lambda = -\,\mathrm{e}^{\lambda-\lambda^{-1}} \in \,]-\infty\,;0[.$$

Notons, pour la commodité, $\mu = -\lambda \in \,]0\,;+\infty[$. Alors :

$$(*) \iff -\mu\,\mathrm{e}^{-\mu^{-1}} + \mathrm{e}^{-\mu} = 0 \iff \mu\,\mathrm{e}^{-\mu^{-1}} = \mathrm{e}^{-\mu} \iff \ln\mu - \mu^{-1} = -\mu \iff \mu - \mu^{-1} + \ln\mu = 0.$$

Considérons l'application $\varphi :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\mu \longmapsto \varphi(\mu) = \mu - \mu^{-1} + \ln\mu$.

L'application φ est dérivable et, pour tout $\mu \in \,]0\,;+\infty[$: $\varphi'(\mu) = 1 + \dfrac{1}{\mu^2} + \dfrac{1}{\mu} > 0$,

donc φ est strictement croissante.

De plus : $\varphi(1) = 0$.

Ainsi :

$$\varphi(\mu) = 0 \iff \mu = 1 \iff \lambda = -1.$$

On obtient : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(X) \subset \{-1\}$.

D'autre part, d'après le théorème de d'Alembert, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(X) \neq \varnothing$.

On conclut : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(X) = \{-1\}$.

• D'après le cours sur la trigonalisation ou sur la réduction de Dunford, puisque $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(X) = \{-1\}$, il existe $N \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ nilpotente telle que $X = -\mathrm{I}_3 + N$. De plus, comme I_3 et X sont réelles, N est réelle, donc $N \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

De même, comme X et Y jouent des rôles symétriques et que $Y = X^{-1}$, il existe $N' \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ nilpotente telle que $X^{-1} = Y = -\mathrm{I}_3 + N'$.

• On a :

$$\begin{cases} \mathrm{I}_3 = XX^{-1} = (-\mathrm{I}_3 + N)(-\mathrm{I}_3 + N') = \mathrm{I}_3 - N - N' + NN' \\ \mathrm{I}_3 = X^{-1}X = (-\mathrm{I}_3 + N')(-\mathrm{I}_3 + N) = \mathrm{I}_3 - N - N' + N'N, \end{cases}$$

donc :

$$NN' = N'N = N + N'.$$

3. Puisque N est carrée d'ordre 3 et nilpotente, on a $N^3 = 0$, donc : $\mathrm{e}^N = I + N + \frac{1}{2}N^2$ et de même pour N'.

D'où :

$$\begin{aligned}
& \text{(E)} \\
\iff\quad & (-I+N)\Big(I+N'+\frac{1}{2}N'^2\Big) + I + N + \frac{1}{2}N^2 = 0 \\
\iff\quad & 2N - N' + NN' - \frac{1}{2}N'^2 + \frac{1}{2}NN'^2 + \frac{1}{2}N^2 = 0 \\
\iff\quad & 2N - N' + (N+N') - \frac{1}{2}N'^2 + \frac{1}{2}(N+N')N' + \frac{1}{2}N^2 = 0 \\
\iff\quad & 3N + \frac{1}{2}(N+N') + \frac{1}{2}N^2 = 0 \\
\iff\quad & 7N + N' + N^2 = 0 \\
\iff\quad & N' = -7N - N^2.
\end{aligned}$$

Mais alors, comme $N + N' = NN'$, on a :

$$0 = N + N' - NN' = N - 7N - N^2 + 7N^2 - N^3 = -6N + 6N^2,$$

d'où $N^2 = N$.

Puis : $0 = N^3 = NN^2 = NN = N^2 = N$.

On déduit : $X = -\mathrm{I}_3,\ Y = -\mathrm{I}_3$.

La réciproque est évidente.

On conclut :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de (S) est } \{(-\mathrm{I}_3,\ -\mathrm{I}_3)\}}$$

* *