Corrigé de l'épreuve d'Analyse du Concours 2006

Jean-Marie Monier

Partie I

1) On a :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = \big(u_1'(t),\, u_2'(t)\big) = \big(u_2(t),\, -u_1(t) - q u_1(t)^3\big),$$

donc u est solution de l'équation différentielle (E) $\;x' = f(t,x)$, où :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (t\,; x_1, x_2) \longmapsto (x_2,\, -x_1 - q x_1^3).$$

2) En notant $z = u_1 + \mathrm{i}u_2$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$z'(t) = u_1'(t) + \mathrm{i}u_2'(t) = u_2(t) - \mathrm{i}u_1(t) = -\mathrm{i}\big(u_1(t) + \mathrm{i}u_2(t)\big) = -\mathrm{i}z(t).$$

Par résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants et sans second membre, il existe donc $C \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}.$$

En notant $C = a + \mathrm{i}b,\; (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on obtient :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\;\; u_1(t) + \mathrm{i}u_2(t) = z(t) = C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = (a+\mathrm{i}b)(\cos t - \mathrm{i}\sin t) = (a\cos t + b\sin t) + \mathrm{i}(-a\sin t + b\cos t),$$

donc :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u_1(t) = a\cos t + b\sin t \\ u_2(t) = -a\sin t + b\cos t. \end{cases}$$

On conclut :

$$\exists\, (a,b) \in \mathbb{R}^2,\; \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = (a\cos t + b\sin t,\; -a\sin t + b\cos t).$$

L'arc paramétré u est le cercle de centre $O(0,0)$, de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, parcouru dans le sens indirect.

3) a) On a :

$$\Big(x_1^2 + \frac{q}{2}x_1^4 + x_2^2\Big)' = 2x_1x_1' + 2qx_1^3x_1' + 2x_2x_2' = 2(x_1 + qx_1^3)x_1' + 2x_2x_2'$$
$$= 2(x_1 + qx_1^3)x_2 + 2x_2(-x_1 - qx_1^3) = 0.$$

Il existe donc $p \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x_1^2 + \frac{q}{2}x_1^4 + x_2^2 = p.$$

Autrement dit, l'image de u est incluse dans la courbe

$$C_p = \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\; x_1^2 + \frac{q}{2}x_1^4 + x_2^2 = p\Big\}.$$

3) b) Il est clair que : $\;p = x_1^2 + \dfrac{q}{2}x_1^4 + x_2^2 \geqslant 0$.

De plus, si $p = 0$, alors $x_1 = x_2 = 0$, donc u est constante égale à $(0,0)$.

3) c) La courbe C_p est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées et par rapport à l'origine, elle ressemble à un cercle ovalisé.
En notant
$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \longmapsto F(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{q}{2}x_1^4 + x_2^2,$$
la tangente en un point de C_p est normale au gradient $\overrightarrow{\operatorname{grad} F(x_1,\, x_2)}$.
En particulier, en chaque point d'intersection de C_p avec un axe de coordonnées, la tangente à C_p en ce point est parallèle à l'autre axe de coordonnées.

3) d) L'application $z : t \in \mathbb{R} \longmapsto u_1(t) + \mathrm{i}u_2(t) \in \mathbb{C}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car u_1 et u_2 sont dérivables et, d'après le système différentiel, u_1' et u_2' sont aussi dérivables, donc continues.
De plus, comme $p > 0$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\big(u_1(t),\, u_2(t)\big) \neq (0, 0)$, donc $z(t) \neq 0$.
Ainsi, l'application $Z : t \in \mathbb{R} \longmapsto Z(t) = \dfrac{z(t)}{|z(t)|}$ est de classe C^1 sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
D'après le **théorème de relèvement**, il existe $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad Z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}.$$
En notant $\rho : t \in \mathbb{R} \longmapsto |z(t)| \in \mathbb{R}$, ρ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs > 0 et on a :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = \rho(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)},$$
d'où :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u_1(t) = \rho(t) \cos\theta(t) \\ u_2(t) = \rho(t) \sin\theta(t). \end{cases}$$

3) e) • On a :
$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -u_1 - q u_1^3 \end{cases} \iff \begin{cases} \rho' \cos\theta - \rho\,\theta' \sin\theta = \rho \sin\theta \\ \rho' \sin\theta + \rho\,\theta' \cos\theta = -\rho\cos\theta - q\rho^3 \cos^3\theta \end{cases} \left| \begin{matrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{matrix} \right| \begin{matrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{matrix}.$$
En combinant ces deux équations avec les coefficients indiqués, de façon à éliminer θ dans les premiers membres, on déduit :
$$\begin{cases} \rho' = -q\rho^3 \cos^3\theta \sin\theta \\ \rho\,\theta' = -\rho - q\rho^3 \cos^4\theta, \end{cases}$$
d'où, puisque ρ ne s'annule en aucun point :
$$\theta' = -1 - q\rho^2 \cos^4\theta.$$
• Il en résulte : $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \theta'(t) \leqslant -1$, d'où :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \theta'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \theta(0) - t$$
et donc : $\theta(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, $\theta(\mathbb{R})$ est un intervalle commençant en $-\infty$. En particulier, $\theta(\mathbb{R})$ contient au moins un intervalle de longueur $> 2\pi$, donc C_p est décrite en entier ; c'est-à-dire que la trajectoire de u est exactement C_p.

Partie II

1) L'application $g : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto g(t) = \mathrm{e}^{-Kt}h(t)$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et :

$$\forall\, t \in [a\,;b], \quad g'(t) = \mathrm{e}^{-Kt}\big(h'(t) - Kh(t)\big) \leqslant 0.$$

Il en résulte que g est décroissante, donc :

$$\forall\, t \in [a\,;b], \quad \mathrm{e}^{-Kt}h(t) = g(t) \leqslant g(a) = \mathrm{e}^{-Ka}h(a) = 0,$$

d'où :

$$\forall\, t \in [a\,;b], \quad h(t) \leqslant 0.$$

2) a) Puisqu'on raisonne ici par l'absurde, on suppose qu'il existe $t^* > t_0$ tel que : $t^* \in I \cap J$ et $\alpha(t^*) > u(t^*)$.

Considérons $F = \big\{t \in [t_0\,;t^*]\,;\, u(t) = \alpha(t)\big\}$.

Comme $\alpha(t_0) \leqslant u(t_0)$ et $\alpha(t^*) > u(t^*)$ et que α et u sont continues sur l'intervalle $[t_0\,;t^*]$, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, appliqué à $\alpha - u$, il existe $t_2 \in [t_0\,;t^*]$ tel que $\alpha(t_2) = u(t_2)$. Ceci montre : $F \neq \varnothing$.

D'autre part, $F = (\alpha - u)^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $\alpha - u$, donc F est fermé dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, F est une partie fermée bornée non vide de $\mathbb{R}$, donc F est un compact non vide de $\mathbb{R}$.

Il en résulte que F admet une borne supérieure t_1 dans $\mathbb{R}$ et que $t_1 \in F$.

On a alors :

- $t_1 \neq t^*$ car $u(t_1) = \alpha(t_1)$ et $u(t^*) < \alpha(t^*)$
- $u(t_1) = \alpha(t_1)$
- $\forall\, t \in \,]t_1\,;t^*], \quad t \notin F$, donc $\forall\, t \in \,]t_1\,;t^*], \quad u(t) < \alpha(t)$.

2) b) Puisque f est localement lipschitzienne en x, il existe $\varepsilon > 0$ et $C \geqslant 0$ tels que :

$$\forall\, t \in [t_1 - \varepsilon\,;t_1 + \varepsilon],\ \forall\, x_1, x_2 \in [u(t_1) - \varepsilon\,;\,u(t_1) + \varepsilon], \quad \big|f(t,x_1) - f(t,x_2)\big| \leqslant C|x_1 - x_2|.$$

Puisque α et u sont continues en t_1, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\begin{cases} \eta \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \eta \leqslant t^* - t_1 \\ \forall\, t \in [t_1 - \eta\,;\,t_1 + \eta], \quad \begin{cases} |u(t) - u(t_1)| \leqslant \varepsilon \\ |\alpha(t) - \alpha(t_1)| \leqslant \varepsilon. \end{cases} \end{cases}$$

En notant $t_2 = t_1 + \eta$, on a alors : $t_2 \in \,]t_1\,;t^*]$ et, pour tout $t \in [t_1\,t_2]$:

$$\begin{cases} |t - t_1| \leqslant t_2 - t_1 = \eta \leqslant \varepsilon \\ |u(t) - u(t_1)| \leqslant \varepsilon \\ |\alpha(t) - \alpha(t_1)| \leqslant \varepsilon, \end{cases}$$

d'où :

$$\big|f\big(t,\alpha(t)\big) - f\big(t,u(t)\big)\big| \leqslant C|\alpha(t) - u(t)|.$$

2) c) • On a, pour tout $t \in [t_1\,; t_2]$:

$$\alpha'(t) - u'(t) \leqslant |\alpha'(t) - u'(t)| = \big|f\big(t, \alpha(t)\big) - f\big(t, u(t)\big)\big| \leqslant C\big|\alpha(t) - u(t)\big| = C\big(\alpha(t) - u(t)\big).$$

D'après 1), il en résulte :

$$\forall\, t \in [t_1\,; t_2], \quad \alpha(t) - u(t) \leqslant 0,$$

ce qui contredit :

$$\forall\, t \in [t_1\,; t^*], \quad u(t) < \alpha(t)$$

obtenu en 2) a).

• Ce raisonnement par l'absurde montre :

$$\forall\, t \geqslant t_0, \quad t \in I \cap J \implies \alpha(t) \leqslant u(t).$$

3) a) L'application $\alpha : I =]-\infty\,; \lambda[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \alpha(t) = \dfrac{1}{\lambda - t}$ est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$, $\big(t, \alpha(t)\big) \in U = \mathbb{R}^2$. Enfin :

$$\forall\, t \in I, \quad \alpha'(t) = \frac{1}{(\lambda - t)^2} = \big(\alpha(t)\big)^2 \leqslant \big(\alpha(t)\big)^2 + \big(\sin\big(t\alpha(t)\big)\big)^2 = f\big(t, \alpha(t)\big).$$

On conclut : α est une barrière inférieure de (E).

3) b) Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) et $t_0 \in I$ tel que $u(t_0) > 0$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\lambda \neq t_0$ et $\alpha(t_0) = \dfrac{1}{\lambda - t_0} = u(t_0)$. En effet, il suffit de prendre $\lambda = t_0 + \dfrac{1}{u(t_0)}$. Alors, d'après a), α est une barrière inférieure de (E), donc, d'après 2), si I n'est pas majoré :

$$\forall\, t \geqslant t_0, \quad u(t) \geqslant \alpha(t) = \frac{1}{\lambda - t}.$$

Mais alors $u(t) \underset{t \longrightarrow \lambda^-}{\longrightarrow} +\infty$, contradiction avec u continue sur $[t_0\,; +\infty[$.
Il en résulte, par raisonnement par l'absurde, que I est majoré.

4) • *Définition d'une barrière supérieure*

On suppose que I est un intervalle réel non trivial et $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable telle que, pour tout $t \in I$, le point $\big(t, \beta(t)\big)$ appartient à U et que l'on, ait l'inégalité $\beta'(t) \geqslant f\big(t, \beta(t)\big)$.
On dit alors que β est une barrière supérieure de l'équation (E) sur l'intervalle I.

Énoncé du lemme de la barrière supérieure

Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E), β une barrière supérieure de (E) sur I, $t_0 \in I \cap J$ tel que $\beta(t_0) \geqslant u(t_0)$. On a alors :

$$\forall\, t \in I \cap J, \quad t \geqslant t_0 \implies \beta(t) \geqslant u(t).$$

Démonstration du lemme de la barrière supérieure

Analogue à la démonstration du lemme de la barrière inférieure, en changeant de sens certaines inégalités.
Ou bien encore, appliquer le lemme de la barrière inférieure à $g : (t, x) \longmapsto -f(t, -x)$.

5) a) Soient $u_1 : J_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $u_2 : J_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de (E) telles qu'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$.

• D'après le lemme de la barrière inférieure, avec $\alpha = u_1$ et $u = u_2$, on déduit :

$$\forall\, t \geqslant t_0,\quad t \in J_1 \cap J_2 \implies u_1(t) \leqslant u_2(t),$$

puis, par rôles symétriques :

$$\forall\, t \geqslant t_0,\quad t \in J_1 \cap J_2 \implies u_1(t) = u_2(t).$$

• Comme on le verra plus loin en III 5) a), l'application $v : -J \longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto u(-t)$, où $-J = \{t \in J\,;\, -t \in J\}$, est solution de $x' = -f(-t, x)$. On peut appliquer le résultat précédent à cette nouvelle équation différentielle, puis revenir à $-t$ pour $t \in -J$, et on déduit :

$$\forall\, t \leqslant t_0,\quad t \in J_1 \cap J_2 \implies u_1(t) = u_2(t).$$

Finalement : $u_1 = u_2$.

5) b) i) D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Mais f n'est pas localement lipschitzienne en x. En effet, si f l'était, il existerait $\varepsilon > 0$ et $C \geqslant 0$ tels que :

$$\forall\, t, x \in [-\varepsilon\,;\varepsilon],\quad \big|f(t,x) - f(t,0)\big| \leqslant C|x|.$$

Mais :

$$\frac{\big|f(t,x) - f(t,0)\big|}{|x|} = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} +\infty,$$

contradiction.

5) b) ii) On suppose ici $u > 0$. Alors :

$$u' = \sqrt{|u|} \iff \frac{u'}{\sqrt{u}} = 1 \iff (2\sqrt{u})' = 1$$

$$\iff \exists\, C \in \mathbb{R},\quad 2\sqrt{u} = t + C \iff \exists\, C \in \mathbb{R},\quad u = \Big(\frac{t+C}{2}\Big)^2.$$

Comme $u > 0$, la valeur $t = -C$ est exclue.
De plus, $u' = \sqrt{u} > 0$, donc u est strictement croissante.
On conclut que les solutions strictement positives de (E) sont les applications :

$$t \in I \subset]-C\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto \Big(\frac{t+C}{2}\Big)^2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

5) b) iii) Les applications

$$u_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si}\ \ t \leqslant 0 \\ \dfrac{t^2}{4} & \text{si}\ \ t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$u_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si}\ \ t \leqslant 1 \\ \Big(\dfrac{t-1}{2}\Big)^2 & \text{si}\ \ t \geqslant 1 \end{cases}$$

sont solutions de (E), coïncident en 0, mais ne sont pas égales.

Partie III

1) Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall t \in]p\,;q[, \quad |g'(t)| \leqslant M.$
D'après l'**inégalité des accroissements finis**, on a alors :

$$\forall (u,v) \in]p\,;q[^2, \quad \big|g(u)-g(v)\big| \leqslant M|u-v|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. En notant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{M+1}$, on a :

$$\forall (u,v) \in]p\,;q[^2, \quad \Big(|u-v| \leqslant \eta \implies |g(u)-g(v)| \leqslant \varepsilon\Big).$$

En particulier :

$$\forall (u,v) \in]p\,;q[^2, \quad \begin{cases} |u-q| \leqslant \eta \\ |v-q| \leqslant \eta \end{cases} \implies \begin{cases} q-\eta \leqslant u < q \\ q-\eta \leqslant v < q \end{cases} \implies |u-v| \leqslant \eta \implies |g(u)-g(v)| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci montre que g satisfait la **CNS de Cauchy d'existence d'une limite (finie) en** q, donc g admet une limite finie en q.

2) a) Soit $t \geqslant t_0$, $t \in I \cap J$. On peut appliquer le lemme de la barrière inférieure au couple (α, u) et le lemme de la barrière supérieure au couple (β, u), puisque $\alpha(t_0) \leqslant u(t_0) \leqslant \beta(t_0)$. On a donc, pour tout $t \geqslant t_0$ tel que $t \in I \cap J$: $\alpha(t) \leqslant u(t)$ et $u(t) \leqslant \beta(t)$, c'est-à-dire $\big(t, u(t)\big) \in \Delta$.

2) b) Raisonnons par l'absurde : supposons que $I \cap [t_0\,;+\infty[$ n'est pas inclus dans J.

Il existe alors $t_1 \in I$ tel que $I \cap J \cap [t_0\,;+\infty[= [t_0\,;t_1|$, intervalle ouvert ou fermé en t_1.

D'après a) : $\forall t \in [t_0\,;t_1|, \quad \alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$.

Comme α et β sont continues en t_1, α et β sont bornées au voisinage de t_1, puis u est bornée au voisinage de t_1. Comme f est continue sur U, l'application composée $t \longmapsto f\big(t, u(t)\big)$ est alors bornée au voisinage de t_1, donc u' est bornée au voisinage de t_1. D'après 1), il en résulte que u admet une limite finie ℓ en t_1.

L'application $\widetilde{u} : t \begin{cases} u(t) & \text{si} \quad t \in [t_0\,;t_1[\\ \ell & \text{si} \quad t = t_1 \end{cases}$ est dérivable en tout point de $[t_0\,;t_1[$, vérifie (E) sur $[t_0\,;t_1[$, est dérivable en t_1 grâce au **théorème limité de la dérivée**, et, toujours par le théorème limite de la dérivée, vérifie l'équation différentielle (E) sur $[t_0\,;t_1]$, ce qui contredit la maximalité de u, cf. la définition de J.

On conclut : $I \cap [t_0\,;+\infty[\subset J$.

3) a) Les applications α, β sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(t) = t - \lambda \mathrm{e}^{-t} \leqslant t + \lambda \mathrm{e}^{-t} = \beta(t)$$

$$\alpha'(t) = \lambda \mathrm{e}^{-t} + 1 = \big(t - \alpha(t)\big) + 1 \leqslant f\big(t, \alpha(t)\big) \quad \text{car } \alpha(t) \leqslant t$$

$$\beta'(t) = 1 - \lambda \mathrm{e}^{-t} = \big(t - \beta(t)\big) + 1 \geqslant f\big(t, \beta(t)\big) \quad \text{car } \beta(t) \geqslant t.$$

Ceci montre que α et β définissent un entonnoir sur $\mathbb{R}$.

3) b) Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, $u : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale de (E) telle que $u(t_0) = x_0$.

Soit $\lambda > 0$ à choisir ultérieurement. On a :

$$\alpha(t_0) \leqslant u(t_0) \leqslant \beta(t_0) \iff t_0 - \lambda\,\mathrm{e}^{-t_0} \leqslant x_0 \leqslant t_0 + \lambda\,\mathrm{e}^{-t_0} \iff -\lambda\,\mathrm{e}^{-t_0} \leqslant x_0 - t_0 \leqslant \lambda\,\mathrm{e}^{-t_0}$$

$$\iff -\lambda \leqslant (x_0 - t_0)\,\mathrm{e}^{t_0} \leqslant \lambda \iff \lambda \geqslant |x_0 - t_0|\,\mathrm{e}^{t_0}.$$

Il existe donc un tel $\lambda > 0$, par exemple $\lambda = |x_0 - t_0|\,\mathrm{e}^{t_0} + 1$.

D'après le théorème de l'entonnoir, on a alors $I \cap [t_0\,;+\infty[\subset J$, c'est-à-dire, puisque $I = \mathbb{R}$: $[t_0\,;+\infty[\subset J$.

Ceci montre que toute solution maximale de (E) est définie sur un intervalle non majoré.

De plus, pour $t \geqslant t_0$: $t - \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant u(t) \leqslant t + \lambda\,\mathrm{e}^{-t}$, donc $u(t) - t \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ceci montre que la représentation graphique de toute solution maximale de (E) admet la première bissectrice pour asymptote, lorsque $t \longrightarrow +\infty$.

4) Raisonnons par l'absurde : supposons que (E) admette au moins deux solutions u_1, u_2 sur I, différentes, telles que :

$$\forall\, t \in I, \quad \big(t, u_1(t)\big) \in A \quad \text{et} \quad \big(t, u_2(t)\big) \in A.$$

S'il existe $t_0 \in I$ tel que $u(t_0) = v(t_0)$, alors d'après l'unicité dans le **théorème de Cauchy et Lipschitz**, $u = v$, contradiction.

Donc : $\forall\, t \in I, \quad u(t) \neq v(t)$.

L'application $u - v$ est continue sur l'intervalle I et ne s'annule pas, donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, $u - v$ garde un signe strict fixe sur I. Quitte à échanger u et v, on peut supposer : $\forall\, t \in I, \quad v(t) > u(t)$.

Soit $t \in I$. Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x} \geqslant 0$, en particulier, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, \cdot) \geqslant 0$, donc $f(t, \cdot)$ est croissante sur $]u(t)\,; v(t)[$, d'où :

$$f\big(t, v(t)\big) - f\big(t, u(t)\big) = f(t, \cdot)\big(v(t)\big) - f(t, \cdot)\big(u(t)\big) \geqslant 0.$$

Ceci montre $v' - u' \geqslant 0$, donc $v - u$ est croissante sur I.

Mais $0 \leqslant v(t) - u(t) \leqslant \alpha(t) - \beta(t) \underset{t \longrightarrow t_0^-}{\longrightarrow} 0$, donc $v(t) - u(t) \underset{t \longrightarrow t_0^-}{\longrightarrow} 0$.

On déduit, sur un voisinage à gauche de t_0 : $v(t) - u(t) = 0$, contradiction.

On conclut : il existe au plus une solution u de (E) sur I telle que : $\forall\, t \in I, \quad \big(t, u(t)\big) \in A$.

5) a) Il est clair que u est dérivable sur J si et seulement si $\widehat{u}$ est dérivable sur $-J$ et qu'alors :

$$\forall\, t \in -J, \quad \widehat{u}\,'(t) = -u'(-t).$$

Supposons que u satisfait (E) : $\forall\, t \in J, \quad u'(t) = f\big(t, u(t)\big)$. Alors :

$$\forall\, t \in -J, \quad \widehat{u}\,'(t) = -u'(-t) = -f\big(-t, u(-t)\big) = -f\big(-t, \widehat{u}(t)\big).$$

En notant $\widehat{U} = \big\{(t, x) \in \mathbb{R}^2\,; (-t, x) \in U\big\}$ et $\widehat{f} : \widehat{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \longmapsto -f(-t, x)$, on voit alors que $\widehat{u}$ satisfait $(\widehat{\mathrm{E}})$: $x' = \widehat{f}(t, x)$.

De même pour la réciproque, ou bien encore, on remarque que $(J,\, u,\, f) \longmapsto (-J,\, \widehat{u},\, \widehat{f})$ est involutive.

5) b) On a, pour tout $t \in -I$:

$$\widehat{\beta}(t) = \beta(-t) \leqslant \alpha(-t) = \widehat{\alpha}(t)$$

$$\widehat{\beta}\,'(t) = -\beta'(-t) \leqslant -f\big(-t, \beta(-t)\big) = \widehat{f}\big(t, \widehat{\beta}(t)\big)$$

$$\widehat{\alpha}\,'(t) = -\alpha'(-t) \geqslant -f\big(-t, \alpha(-t)\big) = \widehat{f}\big(t, \widehat{\alpha}(t)\big).$$

Ainsi, $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}$ définissent un entonnoir de $(\widehat{\mathrm{E}})$ sur l'intervalle $-I$.

5) c) L'équation (E) admet au moins une solution maximale $u : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Il existe $t_0 \in J$ tel que $\big(t_0, u(t_0)\big) \in A$. L'application $\widehat{u}$ est alors solution maximale de $(\widehat{\mathrm{E}})$ et $-t_0 \in -J$, $\big(-t_0, \widehat{u}(-t_0)\big) \in \widehat{A}$, où $\widehat{A}$ est l'entonnoir de $(\widehat{\mathrm{E}})$ défini par $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}$. D'après 3), $]-\infty\,; -t_0] \cap (-I) \subset -J$ et :

$$\forall\, t \leqslant -t_0,\quad t \in -I \implies \big(t, \widehat{u}(t)\big) \in \widehat{A},$$

donc $[t_0\,; +\infty[\, \cap I \subset J$ et :

$$\forall\, t \geqslant t_0,\quad t \in I \implies \big(t, u(t)\big) \in A.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe deux solutions maximales U_n, V_n de $(\widehat{\mathrm{E}})$ telles que : $U_n(-t_n) = \alpha(t_n)$ et $V_n(-t_n) = \beta(t_n)$ et U_n et V_n sont définies sur $[-t_n\,; +\infty[\, \cap I$, donc $u_n = \widehat{U}_n$ et $v_n = \widehat{V}_n$ sont deux solutions de (E) telles que : $u_n(t_n) = \alpha(t_n)$ et $v_n(t_n) = \beta(t_n)$, définies sur $[t_0\,; t_n]$ au moins.

5) d) • Soit $n \in \mathbb{N}$. Il se peut que $u_{n+1} = u_n$. Supposons $u_{n+1} \neq u_n$.
Comme u_n et u_{n+1} sont solutions de (E), d'après le **théorème de Cauchy et Lipschitz**, on a alors : $\forall\, t \in I,\ \ u_{n+1}(t) \neq u_n(t)$, et en particulier : $u_{n+1}(t_0) \neq u_n(t_0)$.
Supposons $u_{n+1}(t_0) > u_n(t_0)$. Comme $u_{n+1} - u_n$ est continue sur l'intervalle I et ne s'annule pas, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, on a : $\forall\, t \in I,\ \ u_{n+1}(t) > u_n(t)$.
En particulier : $u_{n+1}(t_n) > u_n(t_n) = \beta(t_n)$,
en contradiction avec : $\forall\, t \in I,\ \ \beta(t) \leqslant u_{n+1}(t) \leqslant \alpha(t)$.
Ce raisonnement par l'absurde montre : $u_{n+1}(t_0) \leqslant u_n(t_0)$.
On conclut : la suite $\big(u_n(t_0)\big)_n$ est décroissante.

• Par la même méthode, on montre que la suite $\big(v_n(t_0)\big)_n$ est croissante.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\quad u_n(t_n) = \alpha(t_n) \geqslant \beta(t_n) = v_n(t_n)$.
Comme u_n et v_n sont deux solutions de (E), comme plus haut, $u_n - v_n$ est de signe strict fixe sur I, donc, comme $(u_n - v_n)(t_0) \geqslant 0$, on déduit : $u_n - v_n \geqslant 0$, et, en particulier : $(u_n - v_n)(t_0) \geqslant 0$, c'est-à-dire : $v_n(t_0) \leqslant u_n(t_0)$.

5) e) La suite $\big(u_n(t_0)\big)_n$ est décroissante et minorée par $v_0(t_0)$, donc converge vers une limite λ.
La suite $\big(v_n(t_0)\big)_n$ est croissante et majorée par $u_0(t_0)$, donc converge vers une limite μ.
Comme : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ v_n(t_0) \leqslant u_n(t_0)$, on déduit, par passage à la limite : $\mu \leqslant \lambda$.
Il existe $x_0 \in [\mu\,; \lambda]$, par exemple $x_0 = \dfrac{\lambda + \mu}{2}$. On a alors, puisque la suite $\big(u_n(t_0)\big)_n$ est décroissante et minorée par x_0 : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n(t_0) \geqslant x_0$, et, puisque la suite $\big(v_n(t_0)\big)_n$ est croissante et majorée par x_0 : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ v_n(t_0) \leqslant x_0$.
On conclut :

$$\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n(t_0) \leqslant x_0 \leqslant v_n(t_0).$$

5) f) D'après le **théorème de Cauchy et Lipschitz**, (E) admet une unique solution maximale u telle que $u(t_0) = x_0$.
Comme en 5) c), on a : $\quad \forall\, t \in\,]-\infty\,; t_0] \cap I,\ \ \alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n forment un entonnoir de (E) sur $[t_0\,; t_n]$, donc $[t_0\,; t_n] \subset J$ et :

$$\forall\, t \in [t_0\,; t_n],\quad \alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t).$$

Comme $t_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} b$, il s'ensuit : $\quad \forall\, t \in [t_0\,; b[,\ \ \alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$.

Partie IV

1) Considérons $U = \mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t,x) \longmapsto 1$.
Il est clair que f est continue, localement lipschitzienne en x, et que :

$$\forall (t,x) \in U, \quad f(t,x) = f(t+1,x),$$

donc f convient.
Et :

$$\text{(E)} \iff x' = f(t,x) \iff x' = 1 \iff \exists\, C \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = t + C,$$

donc aucune solution de (E) n'est périodique.

2) a) L'application $v : J - T \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto v(t) = u(t+T)$ est dérivable sur $J-T$ et :

$$\forall\, t \in J - T, \quad v'(t) = u'(t+T) = f\big(t+T, u(t+T)\big) = f\big(t, v(t)\big),$$

donc v est aussi solution de (E), sur l'intervalle $J-T$.
De plus, il est immédiat que v est alors solution maximale de (E) sur $J-T$.

2) b) Supposons qu'il existe $t_0 \in J$ tel que : $t_0 + T \in J$ et $u(t_0+T) = u(t_0)$.

Alors, u est solution de (E) sur J, v est solution de (E) sur $J-T$, $J \cap (J-T) \neq \varnothing$ car $t_0 \in J$ et $t_0 + T \in J$, et $u(t_0) = v(t_0)$.
D'après le **théorème de Cauchy et Lipschitz**, comme u et v sont solutions maximales de (E), on a : $J - T = J$ et $\forall\, t \in J$, $v(t) = u(t)$, d'où $J = \mathbb{R}$ et : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $u(t+T) = v(t) = u(t)$, donc u est T-périodique.

3) Soit $z \in]c\,;d[$.

- Supposons que γ_z est T-périodique.

Alors, comme $0 \in I_z$, on a $T \in I_z$, c'est-à-dire $z \in D$, et on a $P(z) = \gamma_z(T) = \gamma_z(0) = z$.

- Réciproquement, supposons $z \in D$ et $P(z) = z$.

Alors $\gamma_z(T) = P(z) = z = \gamma_z(0)$, donc, d'après 2) b), γ_z est T-périodique.

4) a) Soient $z_1, z_2 \in D$ tels que $z_1 < z_2$. On a donc $T \in I_{z_1}$ et $T \in I_{z_2}$.
Soit $z \in]z_1\,;z_2[$.
D'après le théorème de l'entonnoir, comme $\gamma_{z_1}(0) = z_1 \leqslant z \leqslant z_2 = \gamma_{z_2}(t_0)$, on a :

$$\forall\, t \in I_{z_1} \cap I_{z_2}, \quad \gamma_{z_1}(t_0) \leqslant \gamma_z(t_0) \leqslant \gamma_{z_2}(t_0),$$

donc $T \in I_z$, $z \in D$.
Ceci montre que D est un intervalle de $\mathbb{R}$.

4) b) D'après a), avec les mêmes notations et d'après le **théorème de Cauchy et Lipschitz** :

$$\forall\, t \in I_{z_1} \cap I_{z_2}, \quad \gamma_{z_1}(t_0) < \gamma_{z_2}(t_0),$$

donc en particulier :

$$P(z_1) = \gamma_{z_1}(t_0) < \gamma_{z_2}(t_0) = P(z_2),$$

donc P est strictement croissante.

4) c) Soient $z_1, z_2 \in D$ tels que, par exemple, $z_1 < z_2$. On a alors $P(z_1) < P(z_2)$.

Soit $y \in]P(z_1)\,;P(z_2)[$. L'ensemble Δ est un entonnoir et un anti-entonnoir, donc, pour tout $z \in]z_1\,;z_2[$, la solution maximale u de (E) telle que $u(z) = T$ est aussi définie en 0. On a alors, en notant $z = u(0)$, $P(z) = y$, donc $y \in P(D)$.

On conclut que $P(D)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

4) d) Puisque D est un intervalle de $\mathbb{R}$, que $P : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante et que $P(D)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'application P est continue. En effet, si P était discontinue en un point $z \in D$, alors on aurait $P(z^-) < P(z^+)$, et P n'atteindrait pas toutes les valeurs entre $P(z^-)$ et $P(z^+)$, $P(D)$ ne serait pas un intervalle.

On conclut que P est continue sur D.

5) a) L'application $\beta : t \in [0\,;+\infty[\longmapsto 3t \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{cases} \forall\, t \in [0\,;+\infty[, \quad \beta'(t) = 3 \geqslant \sin t + 2\cos\beta(t) = f\big(t, \beta(t)\big) \\ \beta(0) = 0 \geqslant -\pi \end{cases}$$

et l'application $\alpha : t \in [0\,;+\infty[\longmapsto \alpha(t) = -3t - \pi \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et :

$$\begin{cases} \forall\, t \in [0\,;+\infty[, \quad \alpha'(t) = -3 \leqslant \sin t + 2\cos\alpha(t) = f\big(t, \alpha(t)\big) \\ \alpha(0) = -\pi \leqslant 0. \end{cases}$$

Ainsi, α et β définissent un entonnoir de (E) sur $[0\,;+\infty[$.

D'après le théorème de l'entonnoir, les solutions maximales u, v de (E) sont définies sur $[0\,;+\infty[$, donc au moins sur $[0\,;2\pi]$.

5) b) • L'application $\beta : t \in [0\,;2\pi] \longmapsto 0 \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $[0\,;2\pi]$ et, pour tout $t \in [0\,;2\pi]$, on a : $\beta'(t) \leqslant f\big(t, \beta(t)\big)$, car $\beta'(t) = 0$ et $f\big(t, \beta(t)\big) = \sin t + 2\cos 0 = 2 + \sin t = f(t, 0)$.

D'après le lemme de la barrière inférieure, on a donc $u(2\pi) \geqslant 0$.

• L'application $\alpha : t \in [0\,;2\pi] \longmapsto \alpha(t) = -\pi \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $[0\,;2\pi]$ et, pour tout $t \in [0\,;2\pi]$, on a : $\alpha'(t) \geqslant f\big(t, \alpha(t)\big)$, car $\alpha'(t) = 0$ et $f\big(t, \alpha(t)\big) = \sin t + 2\cos\alpha(t) \geqslant \sin t - 2 = f(t, -\pi)$.

D'après le lemme de la barrière supérieure, on a donc $v(2\pi) \leqslant -\pi$.

5) c) On a : $P(0) = \gamma_0(T) = u(T) = u(2\pi) \geqslant 0$ et $P(-\pi) = \gamma_{-\pi}(T) = v(T) = v(2\pi) \leqslant -\pi$.
L'application $Q : t \in [-\pi\,;0] \longmapsto Q(t) = P(t) - t \in \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ et $Q(0) = P(0) \geqslant 0$, $Q(-\pi) = P(-\pi) + \pi \leqslant 0$. D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe $z \in [-\pi\,;0]$ tel que $Q(z) = 0$, c'est-à-dire tel que $P(z) = z$.

5) d) D'après 3), comme $z \in D$ et $P(z) = z$, γ_z est T-périodique.
Ainsi, (E) admet au moins une solution T-périodique.

5) e) D'après d), (E) admet au moins une solution w 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$w_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto w_n(t) = w(t) + 2n\pi.$$

Les applications w_n sont deux à deux différentes.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, w_n est solution de (E), car w_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$w_n'(t) = w'(t) = \sin t + 2\cos\big(w(t)\big) = \sin t + 2\cos\big(w(t) + 2n\pi\big) = \sin t + 2\cos\big(w_n(t)\big).$$

On conclut : (E) admet une infinité de solutions 2π-périodiques.

Partie V

1) L'application $F : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \longmapsto \ < f(x_1,x_2), (-x_2, x_1) >$ est continue sur B et B est connexe par arcs, donc $F(B)$ est connexe par arcs, donc est un intervalle de $\mathbb{R}$.

D'après (H2) : $0 \notin F(B)$.

Ainsi, $F(B) \subset]0\,;+\infty[$ ou $F(B) \subset]-\infty\,;0[$. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut se ramener à $F(B) \subset]0\,;+\infty[$, c'est-à-dire (H3).

2) On a : $\begin{cases} u_1 = (h\circ\theta)\cos\theta \\ u_2 = (h\circ\theta)\sin\theta \end{cases}$ donc $\begin{cases} u_1' = (h'\circ\theta)\theta'\cos\theta - (h\circ\theta)\sin\theta\theta' \\ u_2' = (h'\circ\theta)\theta'\sin\theta + (h\circ\theta)\cos\theta\theta'. \end{cases}$

Ainsi :

$$u \text{ est solution de (E)} \iff \left\{ \begin{array}{l|c|c} (h'\circ\theta)\theta'\cos\theta - (h\circ\theta)\sin\theta\,\theta' = f_1\circ u & \cos\theta & -\sin\theta \\ (h'\circ\theta)\theta'\sin\theta + (h\circ\theta)\cos\theta\,\theta' = f_2\circ u & \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} (h'\circ\theta)\,\theta' = (f_1\circ u)\cos\theta + (f_2\circ u)\sin\theta \\ h\circ\theta = -(f_1\circ u)\sin\theta + (f_2\circ u)\cos\theta \end{cases}$$

$$\iff \forall\, t\in I, \quad \begin{cases} h'\big(\theta(t)\big)\theta'(t) = g_1\big(\theta(t), h\big(\theta(t)\big)\big) \\ \theta'(t) = g_2\big(\theta(t), h\big(\theta(t)\big)\big), \end{cases}$$

en notant $g_1, g_2 : \mathbb{R}\times]0\,;+\infty[$ les applications définies par :

$$\begin{cases} g_1(\theta,h) = f_1(h\cos\theta, h\sin\theta)\cos\theta + f_2(h\cos\theta, h\sin\theta)\sin\theta \\ g_2(\theta,h) = \dfrac{1}{h}\Big(-f_1(h\cos\theta, h\sin\theta)\sin\theta + f_2(h\cos\theta, h\sin\theta)\cos\theta\Big). \end{cases}$$

3) On a, d'après (H3) :

$$\begin{aligned} \forall\,(t,h)\in\mathbb{R}\times[a_1\,;a_2], \quad hg_2(\theta,h) &= -f_1(h\cos\theta, h\sin\theta) + f_2(h\cos\theta, h\sin\theta) \\ &= < \ \Big(f_1(h\cos\theta, h\sin\theta), f_2(h\cos\theta, h\sin\theta)\Big)\ ,\ \big(-\sin\theta, \cos\theta)\big) \ > > 0, \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall\,(\theta,h)\in\mathbb{R}\times[a_1\,;a_2], \quad g_2(\theta,h) > 0.$$

L'application g_2 est continue et > 0 sur le **compact** $[0\,;2\pi]\times[a_1\,;a_2]$, donc g_2 admet un minimum $m > 0$.

Il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $0 < c_1 < a_1 < a_2 < c_2$.

Puisque g_2 est continue sur le compact $[0\,;2\pi]\times[c_1\,;c_2]$, d'après le **théorème de Heine**, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall\,(\theta_1,\rho_1), (\theta_2,\rho_2)\in[0\,;2\pi]\times[c_1\,;c_2], \quad \begin{cases} |\theta_2-\theta_1| \leqslant \eta \\ |\rho_2-\rho_1| \leqslant \eta \end{cases} \Longrightarrow \big|g_2(\theta_2,\rho_2) - g_2(\theta_1,\rho_1)\big| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, en prenant $\varepsilon = \dfrac{m}{2}$ et $\theta_1 = \theta_2$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall\,\theta\in[0\,;2\pi],\ \forall\,\rho_1,\rho_2\in[c_1\,;c_2], \quad |\rho_2-\rho_1| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|g_2(\theta,\rho_2) - g_2(\theta,\rho_1)\big| \leqslant \frac{m}{2}.$$

Notons $b_1 = \mathrm{Max}\,(c_1,\, a_1 - \eta)$, $b_2 = \mathrm{Min}\,(c_2,\, a_1 + \eta)$. On a alors $0 < b_1 < a_1 < a_2 < b_2$.
Pour tout $(\theta, \rho) \in [0\,; 2\pi] \times]b_1\,; b_2[$, il existe $\rho_1 \in [a_1\,; a_2]$ tel que $|\rho - \rho_1| \leqslant \eta$. On a alors $\big|g_2(\theta, \rho) - g_2(\theta, \rho_1)\big| \leqslant \dfrac{m}{2}$, d'où, en utilisant la définition de m :

$$g_2(\theta, \rho) \geqslant g_2(\theta, \rho_1) - \frac{m}{2} > 0.$$

On conclut : il existe des réels b_1, b_2, avec $0 < b_1 < a_1 < a_2 < b_2$, tels que g_2 soit > 0 sur $\mathbb{R} \times]b_1\,; b_2[$.

4) a) D'après 3), g_2 ne s'annulle pas sur $\mathbb{R} \times]b_1\,; b_2[$, et on peut donc définir

$$G : \mathbb{R} \times]b_1\,; b_2[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\theta, \rho) \longmapsto G(\theta, \rho) = \frac{g_1(\theta, \rho)}{g_2(\theta, \rho)}.$$

Considérons les applications suivantes, qui sont constantes :

$$\rho_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \theta \longmapsto a_1, \qquad \rho_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \theta \longmapsto a_2.$$

Les applications ρ_1 et ρ_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\rho_1'(\theta) = 0, \quad G\big(\theta, \rho_1(\theta)\big) = \frac{g_1(\theta, a_1)}{g_2(\theta, a_1)} \geqslant 0, \qquad \rho_2'(\theta) = 0, \quad G\big(\theta, \rho_2(\theta)\big) = \frac{g_1(\theta, a_2)}{g_2(\theta, a_2)} \leqslant 0,$$

d'où :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \rho_1'(\theta) \leqslant G\big(\theta, \rho_1(\theta)\big) \\ \rho_2'(\theta) \geqslant G\big(\theta, \rho_2(\theta)\big). \end{cases}$$

Ceci montre que $[0\,; 2\pi] \times [a_1\,; a_2]$ est un entonnoir de (E'), pour le couple (ρ_1, ρ_2).

4) b) D'après le théorème de l'entonnoir, si ρ est solution de (E') et si $\rho(0) \in [a_1\,; a_2]$, alors ρ est définie sur $[0\,; 2\pi]$ au moins et $\rho(2\pi) \in [a_1\,; a_2]$, donc $P\big([a_1\,; a_2]\big) \subset [a_1\,; a_2]$.

4) c) • L'application $Q : [a_1\,; a_2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto Q(t) = P(t) - t$ est continue sur l'intervalle $[a_1\,; a_2]$ et $Q(a_1) = P(a_1) - a_1 \geqslant 0$, $Q(a_2) = P(a_2) - a_2 \leqslant 0$, donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe $c \in [a_1\,; a_2]$ tel que $Q(c) = 0$, donc tel que $P(c) = c$.
Ceci montre que P admet au moins un point fixe dans $[a_1\,; a_2]$.

• D'après IV 3), il en résulte que (E') admet au moins une solution 2π-périodique h et que h est à valeurs dans $[a_1\,; a_2]$.

5) a) L'application ψ est continue et 2π-périodique. La restriction $\psi\,|_{[0\,;2\pi]}$ est continue sur le segment $[0\,; 2\pi]$, donc, d'aprs le **theorème fondamental**, admet un minimum $m > 0$ et un maximum $M > 0$. On a alors :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad 0 < m \leqslant \psi(\theta) \leqslant M.$$

5) b) • L'ensemble $\mathbb{R} \times [m\,; M]$ est un entonnoir de (E"), donc les solutions maximales de (E") sont définies sur des intervalles non majorés. Par la même méthode qu'en IV 5) c), on montre que ces intervalles sont aussi non minorés. Ainsi, les solutions maximales de (E") sont définies sur $\mathbb{R}$.

• Soit θ une solution maximale de (E") sur $\mathbb{R}$.
On a, pour $t \geqslant 0$:

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \theta'(u)\,\mathrm{d}u \geqslant \theta(0) + mt \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et, pour $t \leqslant 0$:

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \theta'(u)\,\mathrm{d}u = \theta(0) - \int_t^0 \theta'(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \theta(0) + mt \underset{t \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Ainsi, $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante (car θ est dérivable et $\theta' \geqslant m > 0$) et de limites $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$, donc, d'après le **théorème de la bijection monotone**, θ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

6) • Notons θ l'unique solution maximale de (E") telle que $\theta(0) = 0$.
Puisque θ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que $\theta(0) = 0$, il existe $T > 0$ unique tel que $\theta(T) = 2\pi$.
Notons :

$$\theta_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto \theta_1(t) = \theta(t+T) \qquad \text{et} \qquad \theta_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto \theta_2(t) = \theta(t) + 2\pi.$$

D'une part, θ_1 est solution de (E") car :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \theta_1'(t) = \theta'(t+T) = \psi\big(\theta(t+T)\big) = \psi\big(\theta_1(t)\big)$$

et $\theta_1(0) = \theta(T) = 2\pi$.
D'autre part, θ_2 est solution de (E") car :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \theta_2'(t) = \theta'(t) = \psi\big(\theta(t)\big) = \psi\big(\theta(t) + 2\pi\big),$$

et $\theta_2(0) = \theta(0) + 2\pi = 2\pi$.
D'après l'unicité dans le **théorème de Cauchy et Lipschitz**, on a alors $\theta_1 = \theta_2$. Ainsi :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi.$$

D'après 2), u est alors solution de (E).
De plus, comme h est 2π-periodique, u est alors T-périodique.
• Montrons enfin que u ne peut pas être constante.
Raisonnons par l'absurde : supposons u constante.
Alors, u_1 et u_2 sont constantes, donc, d'après 2), comme $u_1^2 + u_2^2 = (h \circ \theta)^2$ et que h est à valeurs > 0, $h \circ \theta$ est constante > 0.
Comme :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \cos\theta(t) = \frac{u_1(t)}{h\big(\theta(t)\big)} \quad \text{et} \quad \sin\theta(t) = \frac{u_2(t)}{h\big(\theta(t)\big)},$$

$\cos \circ\, \theta$ et $\sin \circ\, \theta$ sont constantes, contradiction avec θ bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

On conclut : il existe une solution maximale périodique non constante, à valeurs dans B, de l'équation différentielle (E) $x' = f(t, x)$.

* *