Prparation à l'agrégation interne de mathématiques

Aide à la résolution pour la séance du 6 octobre 2004

Jean-Marie Monier

Problème 1

a) • Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$ est continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et admet une limite finie en $\frac{\pi}{2}$; en déduire qu'elle est intégrable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

• L'imparité de f est facile.

b) • Appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int_I$, avec hypothèse de domination, pour montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int_I$, avec hypothèse de domination locale, pour montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer sa dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan t}{1 + x^2 \tan^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

• En déduire le sens de variation de f.

• Calculer l'intégrale donnant $f'(x)$, par exemple en faisant intervenir $\sin 2t$ et $\cos 2t$ et en utilisant le changement de variable défini par $u = 2t$. On obtient :

$$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[, \quad f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln x}{1-x^2} & \text{si } \ x \neq 1 \\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{si } \ x = 1. \end{cases}$$

• En déduire que $f'(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, et répondre à la question de la dérivabilité de f en 0.

• On trouve : $f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{\pi}{4}, \quad f'(1) = \frac{1}{2}$.

• Appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int_I$ une deuxième fois, avec hypothèse de domination locale, pour déduire que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer $f''(x)$. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f''(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x \tan^3 t}{(1 + x^2 \tan^2 t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

On pourrait aussi dériver l'expression obtenue plus haut pour $f'(x)$ (sans symbole intégrale), mais il faudrait alors étudier le raccord en 1.

• En déduire le signe de $f''(x)$ et le sens de la concavité de la courbe représentative de f.

d) On peut conjecturer que la limite (si elle existe) de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est obtenue en remplaant directement x par $+\infty$ dans l'intégrale, donc est égale à $\dfrac{\pi^2}{4}$.
Former donc la différence entre $f(x)$ et cette limite présumée, ce qui donne, en utilisant une formule bien connue sur les Arctan :

$$\left|f(x) - \frac{\pi^2}{4}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\,\frac{1}{\tan t}\right) \mathrm{d}t.$$

Montrer que cette dernière expression tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ en considérant la fonction obtenue par le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ et en appliquant le théorème de continuité sous le sugne $\displaystyle\int_I$.

e) C'est le bilan des résultats précédents.

Problème 2

a) Remarquer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \geq n$. Conclure : $S_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b) 1) Former le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $x \longmapsto \mathrm{e}^x - (1+x)$,
en déduire $\dfrac{\mathrm{e}^x - (1+x)}{x^2} \underset{x \,\longrightarrow\, 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, et en déduire l'existence de α et de C.

2) Déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{1, ..., n\}, \quad \left|\exp\left(\frac{1}{n+k}\right) - \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)\right| \leq \frac{C}{n^2},$$

puis sommer pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|S_n - \left(n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)\right| \leq \frac{C}{n}.$$

D'autre part, montrer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln 2,$$

par exemple en utilisant une somme de Riemann.

Conclure clairement au développement asymptotique demandé.

c) 1) Calculer, pour tout $n \geq 2$, $v_n - v_{n-1}$:

$$v_n - v_{n-1} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2n}} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2n-1}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1,$$

et en former un développement asymptotique à la précision $\dfrac{1}{n^3}$.
On obtient, après quelques lignes de calcul :

$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

2) Appliquer un théorème de sommation des relations de comparaison, pour déduire :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (v_n - v_{n-1}) \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{8k^3}.$$

Montrer, en utilisant une comparaison série/intégrale :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

En déduire :

$$v_n \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{16n^2}.$$

c) On obtient :

$$S_n = n + \ln 2 - \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Problème 3

a) S'assurer d'abord de la convergence de la série proposée, pour x fixé.

Pour $x \in]0\,;+\infty[$ fixé, l'application $\varphi :\ t \in [1\,;+\infty[\longmapsto \dfrac{1}{t(t+x)}$ est continue, décroissante et intégrable sur $[1\,;+\infty[$; appliquer une comparaison série/intégrale et calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ pour déduire :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \frac{\ln(x+1)}{x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \leq \frac{1}{1+x} + \frac{\ln(x+1}{x}.$$

En déduire le résultat demandé.

Problème 4

a) Intégrer I_n par parties, en remarquant que nx^{n-1} est la dérivée de x^n par rapport à x.
On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad nI_n = \frac{\pi}{4} - J_n.$$

b) Changement de variable $y = x^n$.

On obtient : $\quad \forall n,\ J_n = \dfrac{1}{n}K_n, \quad$ o on a noté $\quad K_n = \displaystyle\int_0^1 y^{\frac{1}{n}} \frac{\operatorname{Arctan} y}{y}\,\mathrm{d}y.$

c) Appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions définie par

$$f_n(y) = y^{\frac{1}{n}} \frac{\operatorname{Arctan} y}{y}.$$

d) Conslure des résultats précédents :

$$I_n = \frac{\pi}{4} - \frac{K}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Problème 5

a) Montrer : $\forall n \in I\!N^*,\ \ ||f_n||_\infty \leq \dfrac{\pi}{2n(n+1)}$, et en déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in I\!N^*} f_n$ converge normalement (donc uniformément et simplement) sur $[0\,;+\infty[$.

b) • Appliquer le théorème sur continuité et convergence uniforme pour déduire que S est continue sur $[0\,;+\infty[$.

• Montrer que les f_n sont de classe C^2 sur $[0\,;+\infty[$ et calculer $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$, pour tout $n \in I\!N^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$.
Comme $||f_n'||_\infty = \frac{1}{n+1}$ et que l'on ne parvient pas à majorer $|f_n''(x)|$ indépendamment de x, s'orienter vers des majorations locales. Montrer que, pour tout $(a,b) \in]0\,;+\infty[^2$ tel que $a \leq b$, les séries de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in I\!N^*} f_n'$ et $\displaystyle\sum_{n\in I\!N^*} f_n''$ sont normalement (donc uniformément) convergentes sur $[a\,;b]$. Appliquer alors le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\sum_n$ avec convergence uniforme locale, pour montrer que S est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer $S'(x)$ et $S''(x)$ comme sommes de séries :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(1+n^2x^2)}, \qquad S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}.$$

En déduire les signes de $S'(x)$ et de $S''(x)$, le sens de variation de S et le sens de la concavité de la courbe représentative de S.

• Pour l'étude de S en $+\infty$, appliquer le théorème sur convergence uniforme et limite.
On obtient :

$$S(x) \underset{x\,\longrightarrow\,+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

• $S(0) = 0$ est évident.

• On a, pour chaque $n \in I\!N^*$ fixé :

$$\frac{1}{(n+1)(1+n^2x^2)} \underset{x\,\longrightarrow\,0}{\longrightarrow} \frac{1}{n+1}.$$

Comme la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n+1}$ diverge et est à termes positifs, on peut conjecturer : $S'x) \underset{x\,\longrightarrow\,0}{\longrightarrow} +\infty$.
Soit $A > 0$ fixé. Expliquer pourquoi il existe $N \in I\!N^*$ tel que :

$$\forall n \geq N,\ \ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geq 2A,$$

puis pourquoi il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0\,;\eta[,\ \ \Big|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)(1+n^2x^2)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}\Big| \leq A,$$

et déduire :

$$\forall A > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall x \in]0\,;\eta[,\ \ S'(x) \geq A.$$

Conclure :

$$S'(x) \underset{x\,\longrightarrow\,0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Tracer la courbe représentative de S en utilisant les réultats précédents.

d) Comme $S(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, former $S(x) - \frac{\pi}{2}$ en utilisant une formule bien connue sur les Arctan.
Considérer alors la série d'applications $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} g_n$ o :

$$g_n : [1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g_n(x) = \frac{x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{nx}\right)}{n(n+1)}.$$

Montrer que cette série converge normalement (donc uniformément) sur $[1\,;+\infty[$ et appliquer le théorème du Cours sur convergence uniforme et limite pour déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

Calculer cette dernière somme de série en utilisant une décomposition en élements simples, un télescopage et la valeur connue $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On obtient finalement :

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)\frac{1}{x} + \underset{x \longrightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Problème 6

a) 1) Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M$.
Faire intervenir une série géométrique et le théorème de majoration pour conclure que la série de terme général $a_n x^n$ est absolument convergente, donc convergente.

2) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{a_n}{n!}\right| \leq \frac{M}{n!}$, terme général d'une série convergente.

b) Pour $x \in]1\,;+\infty[$ fixé, considérer la série d'applications $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$ définie par :

$$g_n : \ t \in [0\,;+\infty[\longmapsto g_n(t) = \mathrm{e}^{-xt} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

Montrer qu'on peut appliquer le théorème sur séries de fonctions et intégrales sur un intervalle quelconque. À cet effet, on établira :

$$\int_0^{+\infty} |g_n| \leq \frac{M}{x^{n+1}},$$

en utilisant un changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale.

Conclure à l'égalité demandée.

* *