Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 25 octobre 2006

Exercices de révision

Thème : Continuité, intégrales, fonctions de plusieurs variables réelles

1 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $f(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant f(x_0)$.

Exigence : rédaction impeccable.

2 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f, g : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(a) = g(a) = 0$.

Montrer :

$$\int_a^b |(fg)'| \leqslant \Big(\int_a^b |f'|\Big)\Big(\int_a^b |g'|\Big).$$

Indication : Étudier les variations de $\phi : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ obtenue en faisant tout passer dans le premier membre et en remplaçant b par une variable x.

3 Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

4 Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to +\infty} \Big(\exp\Big(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\Big) - 1\Big)\,\mathrm{d}x$.

5 Étude de fonction et tracé de courbe représentative pour $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

6 *a)* Montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \ln(1 + x^2 + y^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet une solution maximale et une seule, notée y.

b) Montrer que y est impaire et de classe C^∞ au voisinage de 0.

c) Former le développement limité à l'ordre 5 de y en 0.

7 L'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x \sin y}{\mathrm{e}^{xy} - 1} & \text{si } \ xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } \ xy = 0 \end{cases}$$

est-elle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$?

* *