Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 25 juin 2008

Exercices de révision

Thème : Séries numériques

Cours

Réviser les séries numériques.

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MP, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 510 399, chapitre 4, pages 219-286.
Il y a deux niveaux de travail :

Niveau I : Moyen :

Notion de série à termes dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, convergence, divergence, condition nécessaire de convergence, lien suite/série, reste d'ordre n d'une série convergente, propriétés algébriques des séries convergentes

séries à termes dans $\mathbb{R}_+$, lemme fondamental, théorèmes de comparaison, séries de Riemann, règle $n^\alpha u_n$, (exemple de Bertrand), série géométrique, règle de d'Alembert

séries à termes dans $\mathbb{K}$, convergence absolue, espaces $\ell^1(\mathbb{K}), \ell^2(\mathbb{K})$, séries alternées, utilisation d'un développement asymptotique, comparaison d'une série à une intégrale, formule de Stirling, étude de la somme d'une série convergente.

Niveau II : Avancé :

Notion de série à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie, CNS de Cauchy de convergence d'une série, convergence absolue, séries usuelles dans un espace de Banach, sommation des relations de comparaison, produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Exercices

Les exercices sont tirés du livre d'exercices Analyse MP.

Niveau I

1 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

a) $\dfrac{n!}{n^n}$ *b)* $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ *c)* $\dfrac{1}{\ln n!}$ *d)* $\dfrac{\ln n}{\ln(\mathrm{e}^{\,n}-1)}$.

2 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

a) $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$ *b)* $\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$ *c)* $\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$.

3 Calculer les sommes des séries suivantes, en montrant leur convergence :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}$.

Niveau II

1 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+$, décroissante et telle que la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge.

Montrer : $nu_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

2 On note p_n le n-ème nombre premier ($p_1=2$). Montrer que la série $\dfrac{1}{p_n}$ diverge.

3 Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note : $u_n=\left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}\right)^{-n^3}$.

a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

b) On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Déterminer un équivalent simple de R_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

****