Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 21 septembre 2005

Problème 1

Soit $f : [0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et intégrable sur $[0\,;\,+\infty[$.
On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_0) \qquad\qquad y'' + fy = 0,$$

d'inconnue $y : [0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. Soit $y : [0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E_0) bornée sur $[0\,;\,+\infty[$.

1.a. Montrer que y'' est intégrable sur $[0\,;\,+\infty[$.

1.b. En déduire que y' admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

1.c. Démontrer : $\ell = 0$. *(On pourra raisonner par l'absurde.)*

2.a. Quelle est la structure de l'ensemble $(\mathcal{S}_0)$ des solutions de (E_0) sur $[0\,;\,+\infty[$? Quelle est sa dimension ?

Soit (y_1, y_2) une base de $(\mathcal{S}_0)$. On note $W = y_1'y_2 - y_1y_2'$.

2.b. Montrer que l'application W est constante sur $[0\,;\,+\infty[$ et que $W \neq 0$.

2.c. Démontrer que, si y_1 et y_2 sont bornées sur $[0\,;\,+\infty[$, alors $W = 0$.

3. En déduire que (E_0) admet au moins une solution non bornée sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. Montrer que l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y''(x) + y(x) = 0,$$

d'inconnue $y : [0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto y(x)$, admet au moins une solution non bornée.

Problème 2

On note, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ et sous réserve d'existence :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\, \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t, \qquad g(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan} t\; \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t.$$

1.a. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, l'application $t \longmapsto \operatorname{Arctan} t\; \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Ainsi, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $g(x)$ existe.

1.b. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t}\, \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Ainsi, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f(x)$ existe.

2.a. Démontrer que f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[, \quad f'(x) = -g(x).$$

2.b. En déduire le sens de variation de f.

2.c. *1)* Montrer que l'application $\varphi : t \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t}$ est bornée sur $]0\,;+\infty[$.

2) En déduire : $\quad f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$

2.d. *1)* Montrer : $\quad \forall\, x \in]0\,;+\infty[, \quad f(x) \geqslant \dfrac{\pi}{4} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\, \mathrm{d}u.$

2) En déduire : $\quad f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} +\infty.$

2.e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On admettra que f est convexe.

3.a. Montrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad n f(n) = \int_0^{+\infty} \frac{n}{u} \operatorname{Arctan} \frac{u}{n}\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u.$$

3.b. En déduire : $\quad f(n) \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}.$

4. Établir que la série de terme général $\dfrac{f(n)}{n}$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \big(-\ln(1 - \mathrm{e}^{-t}) \big)\, \mathrm{d}t.$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * *