Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 15 novembre 2006

Exercices de révision

Thème : Séries numériques, séries de fonctions, séries entières

1 On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{1}{n+k}\right)$ et on se propose de former un développemennt asymptotique de S_n à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

a) 1) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0\,;+\infty[$ et $C \in [0\,;+\infty[$ tels que : $\forall x \in [0\,;\alpha], \quad |\mathrm{e}^{\,x} - (1+x)| \leqslant Cx^2$.

2) Montrer : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

3) Déduire : $S_n = n + \ln 2 + \underset{n\infty}{o}(1)$.

b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = S_n - n - \ln 2$.

1) Montrer : $v_n - v_{n-1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{8n^3}$.

2) Montrer : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

3) Déduire : $S_n = n + \ln 2 - \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2 On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}$.

a) Montrer que la série d'applications $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $D = [0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

On note S la somme de cette série d'applications.

b) Montrer que S est de classe C^1 sur D et étudier le signe de $S'(x)$ pour $x \in D$.

c) Déterminer les limites de S en 1 et en $+\infty$.

d) Dresser le tableau de variations de S et tracer l'allure de la courbe représentative de S.

3 Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$?

4 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{4n^2 - 1}$, où x est une variable réelle.

5 Montrer que la fonction f d'une variable réelle donnée par $f(x) = \ln(x^2 - 7x + 12)$ est développable en série entière en 0, former son développement en série entière en 0 et préciser le rayon de convergence.

* *