Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 15 juin 2005, puis 29 juin 2005

Exercice 1

Existence et calcul des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{x^8+1}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 3x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \Big(\operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}.$

Exercice 2

Tracer la courbe C d'équation $y=f(x)$, où $\displaystyle f(x)=\int_1^x \frac{t^2+t}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer :

- Les intégrales impropres $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ convergent si et seulement si $\alpha > 0$
- Les applications $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ et $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{x^\alpha}$ sont intégrables sur $[1\,;\,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 4

Étude et représentation graphique de la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x)=\int_0^1 \sqrt{x+t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5

a) Existence et calcul, pour $x \in \mathbb{R}$, de :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Arctan}(x \tan t)}{\tan t} \, \mathrm{d}t.$$

b) En déduire :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \ln 2 \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes, lorsque l'entier n tend vers l'infini :

a) $\displaystyle \lim_{n\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle \lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}^n x}{\operatorname{sh} x} \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle \lim_{n\infty} \int_0^{1} \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle \lim_{n\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle \lim_{n\infty} \int_0^{1} \frac{1+nx}{(1+x^2)^n} \, \mathrm{d}x.$

Exercice 7

Trouver un équivalent simple de $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x(1+nx^2)} \, \mathrm{d}x$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *