Jean-Marie Monier

Agrégation interne de Mathématiques 2004-2005

Épreuve du samedi 15 janvier 2005

Si un(e) candidat(e) repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il (elle) la signale sur sa copie et devra poursuivre sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il (elle) est amené(e) à prendre.

Notations

Toutes les matrices considérées dans cette épreuve sont à termes réels

• n, p, q désignent des entiers naturels non nuls

• $\mathbf{M}_n$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n

• $\mathbf{M}_{n,p}$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et p colonnes

• $\mathbf{S}_n$ est l'ensemble des matrices carrées réelles symétriques d'ordre n

• $\mathbf{S}_n^+$ est l'ensemble des matrices carrées réelles symétriques positives d'ordre n, c'est-à-dire l'ensemble des $A \in \mathbf{S}_n$ telles que : $\quad \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}, \quad {}^{\mathrm{t}}XAX \geqslant 0$

• $\mathbf{S}_n^{++}$ est l'ensemble des matrices carrées réelles symétriques définies positives d'ordre n, c'est-à-dire l'ensemble des $A \in \mathbf{S}_n$ telles que : $\quad \forall X \in \mathbf{M}_{n,1} - \{0\}, \quad {}^{\mathrm{t}}XAX > 0$

• $\mathbf{GL}_n$ est le groupe multiplicatif des matrices carrées réelles d'ordre n inversibles

• $\mathbf{O}_n$ est le groupe multiplicatif des matrices orthogonales d'ordre n

• I_n est la matrice identité, neutre pour la multiplication

• Pour $(A, B) \in \mathbf{S}_n^2$, on note $A \leqslant B$ si et seulement si $B - A \in \mathbf{S}_n^+$

• $\mathbf{M}_{n,1}$ est muni de son produit scalaire canonique $(X, Y) \longmapsto \ < X \,|\, Y >= {}^{\mathrm{t}}XY$ et de la norme euclidienne associée $X \longmapsto ||X||_2 = ({}^{\mathrm{t}}XX)^{1/2}$

• $\mathbf{M}_n$ est muni de son produit scalaire canonique $(X, Y) \longmapsto \ < X \,|\, Y >= \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}XY)$ et de la norme euclidienne associée $X \longmapsto ||X||_2 = (\mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}XX))^{1/2}$

• Pour $A \in \mathbf{S}_n$, on note $\mathrm{Sp}\,(A)$ le spectre réel de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles de A, et $\rho(A)$ le rayon spectral réel de A, c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues des valeurs propres réelles de A

• W est la matrice de $\mathbf{M}_n$ dont tous les termes sont égaux à 1

• Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\ W(a, b) = a\mathrm{I}_n + bW$.

I Noyau, image, rang d'une matrice et de sa transposée

1. Montrer, pour toute $A \in \mathbf{M}_{n,p}$:

a. $\mathrm{Ker}\,({}^{\mathrm{t}}AA) = \mathrm{Ker}\,(A)$ et $\mathrm{Ker}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{Ker}\,({}^{\mathrm{t}}A)$

b. $\mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}AA) = \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{rg}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A)$

c. $\mathrm{Im}\,({}^{\mathrm{t}}AA) = \mathrm{Im}\,({}^{\mathrm{t}}A)$ et $\mathrm{Im}\,(A\,{}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{Im}\,(A)$.

2. *Étude d'un exemple :*

Dans cette question (et celle-ci seulement), on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Pour chacun des deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,(A)$ et $\mathrm{Ker}\,({}^{\mathrm{t}}A)$, déterminer une base et la dimension. Y a-t-il une relation d'inclusion entre ces deux sous-espaces vectoriels ?

b. Pour chacun des deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\,(A)$ et $\mathrm{Im}\,({}^{\mathrm{t}}A)$, déterminer une base et la dimension. Y a-t-il une relation d'inclusion entre ces deux sous-espaces vectoriels ?

II Matrice de Gram d'une famille de colonnes

Pour $(X_1, ..., X_q) \in \mathbf{M}_{n,1}^q$, on note $G(X_1, ..., X_q)$ la matrice de $\mathbf{M}_q$ dont le terme situé à la ligne i et la colonne j est ${}^{\mathrm{t}}X_iX_j$, pour tout $(i,j) \in \{1, ..., q\}^2$, et on note :

$$\gamma(X_1, ..., X_q) = \det\,(G(X_1, ..., X_q)).$$

Pour chaque $i \in \{1, ..., q\}$, on note x_{ki}, $k \in \{1, ..., n\}$, la k-ème coordonnée de X_i sur la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}$, et on note $X = (x_{ki})_{ki} \in \mathbf{M}_{n,q}$.

1. a. Montrer : $G(X_1, ..., X_q) = {}^{\mathrm{t}}XX$.

b. En déduire : $\mathrm{rg}\,(G(X_1, ..., X_q)) = \mathrm{rg}\,(X_1, ..., X_q)$

et que $\gamma(X_1, ..., X_q) = 0$ si et seulement si $(X_1, ..., X_q)$ est liée.

c. Établir : $G(X_1, ..., X_q) \in \mathbf{S}_q^+$.

2. Montrer que $\gamma(X_1, ..., X_q)$ est inchangé lorsqu'on ajoute à l'un des X_i une combinaison linéaire des autres X_j, $j \neq i$.

3. On suppose ici $q \geqslant 2$ et $(X_1, ..., X_q)$ libre. On note $d_1 = d(X_1, \mathrm{Vect}\,(X_2, ..., X_q))$ la distance de X_1 au sous-espace vectoriel engendré par $X_2, ..., X_q$.

a. Montrer : $$\gamma(X_1, ..., X_q) = d_1^2\,\gamma(X_2, ..., X_q).$$

b. En déduire : $$\gamma(X_1, ..., X_q) \leqslant \gamma(X_1)\gamma(X_2, ..., X_q)$$

et qu'il y a égalité si et seulement si X_1 est orthogonal à $\mathrm{Vect}\,(X_2, ..., X_q)$.

c. Établir : $$\gamma(X_1, ..., X_q) \leqslant \prod_{i=1}^{q} ||X_i||_2^2$$

et qu'il y a égalité si et seulement si la famille $(X_1, ..., X_q)$ est orthogonale.

4. a. Soit $A \in \mathbf{GL}_n$. On note $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A.

Démontrer l'**inégalité de Hadamard** : $\quad |\det(A)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} ||C_j||_2$

et qu'il y a égalité si et seulement si la famille $(C_1, ..., C_n)$ est orthogonale.

b. Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{GL}_n$ telle que : $\forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2, \quad |a_{ij}| \leqslant 1$.
Montrer : $|\det(A)| \leqslant n^{n/2}$ et qu'il y a égalité si et seulement si A est à termes dans $\{-1, 1\}$ et à colonnes deux à deux orthogonales.

5. *Un exemple :* Dans $\mathbf{M}_{4,1}$, on considère :

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer la distance de X à $\mathrm{Vect}\,(U, V, W)$.

III Étude élémentaire de $\mathbf{S}_n$, $\mathbf{S}_n^+$, $\mathbf{S}_n^{++}$

1. a. Montrer que $\mathbf{S}_n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, en donner une base et la dimension.

b. Montrer : $\quad \forall (A,B) \in \mathbf{S}_n^2, \quad AB \in \mathbf{S}_n \iff AB = BA.$

Est-ce que $\mathbf{S}_n$ est stable par multiplication, pour $n \geqslant 2$?

c. Établir : $\quad \forall A \in \mathbf{S}_n \cap \mathbf{GL}_n, \quad A^{-1} \in \mathbf{S}_n.$

2. a. Montrer :

(1) $\forall A, B \in \mathbf{S}_n^+, \quad A + B \in \mathbf{S}_n^+$

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \ \forall A \in \mathbf{S}_n^+, \quad \alpha A \in \mathbf{S}_n^+$

(3) $\forall A \in \mathbf{S}_n^+, \ \forall B \in \mathbf{S}_n^{++}, \quad A + B \in \mathbf{S}_n^{++}$

(4) $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall A \in \mathbf{S}_n^{++}, \quad \alpha A \in \mathbf{S}_n^{++}$

(5) $\forall A, B \in \mathbf{S}_n^+, \quad (A + B = 0 \implies A = B = 0)$

(6) $\forall A \in \mathbf{S}_n^{++}, \quad A \in \mathbf{GL}_n$ et $A^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++}$

(7) $\forall M \in \mathbf{M}_n, \quad {}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^+$

(8) $\forall M \in \mathbf{GL}_n, \quad {}^{\mathrm{t}}MM \in \mathbf{S}_n^{++}$

(9) $\mathbf{S}_n^+$ est fermé dans $\mathbf{M}_n$.

Est-ce que $\mathbf{S}_n^+$ est stable par multiplication, pour $n \geqslant 2$?

b. Montrer que la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbf{S}_n$. Est-ce un ordre total, pour $n \geqslant 2$?

c. Montrer :

(1) $\forall A, B, C \in \mathbf{S}_n, \quad A \leqslant B \iff A + C \leqslant B + C$

(2) $\forall A, B, C, D \in \mathbf{S}_n, \quad \begin{cases} A \leqslant B \\ C \leqslant D \end{cases} \implies A + C \leqslant B + D.$

A-t-on, pour $n \geqslant 2$: $\forall A, B \in \mathbf{S}_n^+, \quad \begin{cases} 0 \leqslant A \\ 0 \leqslant B \end{cases} \implies 0 \leqslant AB$?

3. Soit $A \in \mathbf{S}_n$.
Démontrer : $A \in \mathbf{S}_n^+ \iff \mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}_+$ et : $A \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

4. En déduire : $\mathbf{S}_n^{++} = \mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n$.

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur (a, b) pour que : $W(a, b) \in \mathbf{S}_n^+$ (resp. $\mathbf{S}_n^{++}$).

IV Carré d'une matrice symétrique positive

1. Montrer : $\forall A \in \mathbf{S}_n, \quad A^2 \in \mathbf{S}_n^+$. On note $\varphi : \mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathbf{S}_n^+,\ A \longmapsto \varphi(A) = A^2$.

2. a. Est-ce que φ est croissante, pour $n \geqslant 2$, c'est-à-dire est-ce que :

$$\forall A, B \in \mathbf{S}_n^+, \quad A \leqslant B \implies A^2 \leqslant B^2 \ ?$$

b. Montrer que φ est continue.

V Racine carrée d'une matrice carrée symétrique positive

1. a. Démontrer que, pour toute $S \in \mathbf{S}_n^+$, il existe $R \in \mathbf{S}_n^+$ unique telle que $R^2 = S$. Cette matrice R est appelée **racine carrée** de S et notée $S^{1/2}$.
On a ainsi : $S^{1/2} \in \mathbf{S}_n^+$ et $(S^{1/2})^2 = S$.
On note : $\psi : \mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathbf{S}_n^+,\ S \longmapsto \psi(S) = S^{1/2}$.

b. Montrer : $\forall S \in \mathbf{S}_n^{++}, \quad S^{1/2} \in \mathbf{S}_n^{++}$.

c. Montrer : $\forall A, B \in \mathbf{S}_n^+, \quad A + A^2 = B + B^2 \implies A = B$.

d. Montrer : $\forall A, B \in \mathbf{S}_n^+, \quad \mathrm{tr}\,(AB) \geqslant 0$.

e. Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^+$ telles que $A \leqslant B$. Montrer : $\mathrm{tr}\,(A^2) \leqslant \mathrm{tr}\,(B^2)$.

f. Calculer $(W(1,1))^{1/2}$.

2. Démontrer que ψ est croissante, c'est-à-dire que :

$$\forall\, A, B \in \mathbf{S}_n^+,\quad A \leqslant B \implies A^{1/2} \leqslant B^{1/2}.$$

Indication :
Pour $A, B \in \mathbf{S}_n^+$ telles que $A \leqslant B$, en notant $R = A^{1/2}$, $S = B^{1/2}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(S - R)$, $X \in \mathbf{M}_{n,1}$ tels que $(S-R)X = \lambda X$ et $X \neq 0$, montrer :

$$^{\mathrm{t}}X(RS - SR)X = 0 \quad \text{et} \quad {}^{\mathrm{t}}X(B-A)X = \lambda({}^{\mathrm{t}}XRX + {}^{\mathrm{t}}XSX),$$

en déduire $\lambda \geqslant 0$, puis $A^{1/2} \leqslant B^{1/2}$.

3. a. Démontrer que l'application ψ est continue.
Indication : Soient $S \in \mathbf{S}_n^+$, $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbf{S}_n^+$ telle que $S_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} S$, $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite dans $\mathbf{S}_n^+$ définie, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par $R_k = S_k^{1/2}$. Utiliser une suite extraite et un argument de compacité.

b. Est-ce que l'application $\varphi : \mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathbf{S}_n^+,\ A \longmapsto \varphi(A) = A^2$ est un homéomorphisme ?

VI Décomposition polaire d'une matrice carrée

1. Démontrer : $\forall\, M \in \mathbf{GL}_n,\ \exists!(U,S) \in \mathbf{O}_n \times \mathbf{S}_n^{++},\quad M = US.$
À cet effet, on pourra remarquer : ${}^{\mathrm{t}}MM = S^2$.

2. Soit $M \in \mathbf{M}_n$.

a. Montrer qu'il existe une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{GL}_n$ telle que $M_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} M$ et qu'il existe une suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{O}_n$ et une suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{S}_n^{++}$ telles que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \ M_k = U_kS_k$.

b. Démontrer que $\mathbf{O}_n$ est compact.

c. En déduire qu'il existe $U \in \mathbf{O}_n$ et $S \in \mathbf{S}_n^+$ telles que : $M = US$.

3. a. Soit $C \in \mathbf{S}_n^+$. Résoudre l'équation ${}^{\mathrm{t}}XX = C$, d'inconnue $X \in \mathbf{M}_n$. Combien y a-t-il de solutions, lorsque $C \in \mathbf{S}_n^{++}$, pour $n \geqslant 2$?

b. Soient $S \in \mathbf{S}_n^{++}$, $A \in \mathbf{M}_n$, $B \in \mathbf{S}_n$. Discuter l'existence d'une matrice $X \in \mathbf{M}_n$ telle que : $${}^{\mathrm{t}}XSX + {}^{\mathrm{t}}XA + {}^{\mathrm{t}}AX + B = 0.$$

c. Soit $C \in \mathbf{S}_n^+ - \{0\}$. Montrer que l'équation ${}^{\mathrm{t}}XX + {}^{\mathrm{t}}YY = C$ admet une infinité de solutions (X,Y) dans $\mathbf{M}_n^2$.

VII Calcul d'une borne supérieure

Déterminer la borne supérieure de $\mathrm{tr}\,(X) + \mathrm{tr}\,(Y)$ lorsque le couple $(X,Y) \in \mathbf{M}_n^2$ vérifie ${}^{\mathrm{t}}XX + {}^{\mathrm{t}}YY = \mathrm{I}_n$.

∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗