Séance du 21 / 06 / 06 avec M. Laffont

Correction exercice 4

1) f est dérivable sur IR et pour tout x de IR, $0 < f'(x) < 1$; en appliquant la formule des accroissements finis, on obtient l'inégalité souhaitée.
2) f est continue sur IR donc si (x_n) converge, sa limite est un point fixe de f ; Pour tout x de IR, $f(x) > x$ donc (x_n) est croissante et f n'a pas de point fixe ; on en déduit que (x_n) ne converge pas et comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Correction exercice 5

1) (théorème du point fixe)

a. J étant stable, pour tout n, x_n appartient à J .On démontre par récurrence que :
pour tout n, $|x_{n+1} - x_n| \leq K^n |x_1 - x_0|$ puis grâce à l'inégalité triangulaire et à cette inégalité : pour tout n et tout p, $|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| \leq (K^n + \ldots + K^{n+p-1}) |x_1 - x_0|$;
en effectuant la somme des K^j : $|x_{n+p} - x_n| \leq \dfrac{K^n - K^{n+p}}{1-K} |x_1 - x_0| \leq \dfrac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$;
mais $\lim \dfrac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0| = 0$ donc : pour tout $\varepsilon \in$ IR*+, il existe N $\in$ IN tel que, pour tout n $\in$ IN, $n \geq N$ entraîne $\dfrac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$; on en déduit que : pour tout $\varepsilon \in$ IR*+, il existe N $\in$ IN tel que, pour tout (n ; p) $\in$ IN², $n \geq N$ entraîne $|x_{n+p} - x_n| \leq \varepsilon$; (x_n) est donc bien une suite de Cauchy.

b. IR est complet donc (x_n) converge ; comme J est fermé, sa limite est dans J et comme g est continue sur J (car K-lipschitzienne), (x_n) converge vers un point fixe ξ de g ;
pour tout $x \neq \xi$ on a : $|g(x) - \xi| = |g(x) - g(\xi)| \leq K|x - \xi| < |x - \xi|$ donc $g(x) \neq x$. ξ est donc l'unique point fixe de g.

c. On a vu que : pour tout n et tout p, $|x_n - x_{n+p}| \leq \dfrac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$;
n étant fixé, on passe à limite en p et on obtient : $|x_n - \xi| \leq \dfrac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$.

2) a. $g'(\xi) \in]-1 ; 1[$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que : $[g'(\xi) - \alpha ; g'(\xi) + \alpha] \subset]-1 ; 1[$; I est ouvert et g' est continue donc il existe $\varepsilon > 0$ tels que :
$[\xi - \varepsilon ; \xi + \varepsilon] \subseteq I$ et pour tout $x \in [\xi - \varepsilon ; \xi + \varepsilon]$, $|g'(x) - g'(\xi)| \leq \alpha$;
Soit $K = \max\{ |g'(\xi) - \alpha| ; |g'(\xi) + \alpha| \}$, alors K < 1 et pour tout $x \in [\xi - \varepsilon ; \xi + \varepsilon]$, $|g'(x)| \leq K$.

b. Avec l'inégalité des accroissements finis, pour tout x $\in$ J , $|g(x) - \xi| \leq K|x - \xi| \leq |x - \xi|$
donc : $x \in J$ entraîne $g(x) \in J$.

c. Avec l'inégalité des accroissements finis, pour tout couple (x ;y) d'éléments de J, $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$ donc d'après 1b. , toute suite (x_n) définie par $x_0 \in J$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers ξ .

3) a. Immédiat puisque g vérifie toutes les hypothèses du 2)

b. Conséquence immédiate de la formule de Taylor Young.

c. Conséquence immédiate de la formule de Taylor Lagrange , $C = \dfrac{1}{q!} \sup_{x \in J} |g^{(q)}(x)|$.

d. Par récurrence, avec $D = C^{\frac{1}{q-1}}$.