Fin de correction du devoir du 16/11 avec M. Laffont.

Ex3

3c. $F_n(t) = t + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kt}{k}$ donc $F_n\left(\frac{\pi}{n+1/2}\right) = \frac{\pi}{n+1/2} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n+1/2}}{k}$;

la fonction h définie par $h(0) = 1$ et pour t différent de 0, $h(t) = \frac{\sin t}{t}$ est continue ; pour k allant de 0 à n , soit

$x_k = \frac{k\pi}{n+1/2}$ et $x_{n+1} = \pi$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n+1/2}}{k} = \sum_{k=1}^{n+1}(x_k-x_{k-1})h(x_k)$; on reconnaît une somme de Riemann

…………..donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n+1/2}}{k} \to \int_0^\pi h(t)dt$ et donc $\left(F_n\left(\frac{\pi}{n+1/2}\right)\right)_n$ converge vers $2\int_0^\pi h(t)dt$.

4) Soit $M_k = F_n\left(\frac{(2k-1)\pi}{n+1/2}\right)$ et $m_k = F_n\left(\frac{2k\pi}{n+1/2}\right)$; d'après 3a-b), $M_1 > M_2 > M_3$…..et $0 < m_1 < m_2$……donc, avec 2) on en déduit que : $\forall n \in IN^*$, $\forall t \in [0 ; \pi]$, $0 \le F_n(t) \le \max\{M_1 ; \pi\} = \max\left\{F_n\left(\frac{\pi}{n+1/2}\right) ; \pi\right\}$.

Comme la suite $\left(F_n\left(\frac{\pi}{n+1/2}\right)\right)_n$ converge, elle est bornée donc il existe A tel que :

$\forall n \in IN^*$, $\forall t \in [0 ; \pi]$, $0 \le F_n(t) \le A$.

B 1.

$S_n(f)(x) = a_0/2 + a_1\cos x + b_1\sin x +$…….$+ a_n\cos nx + b_n\sin nx$ où $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt$ et $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$

donc $S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(1+2\cos t\cos x+2\sin t\sin x+....+2\cos nt\cos nx+2\sin t\sin nx)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt$;

l'intégrale d'une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur T , ne dépend pas de l'intervalle donc en posant u = t-x , $S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)D_n(u)du .= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(u+x)D_n(u)du + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(u+x)D_n(u)du$;

En posant t = -u dans la 1ère et t = u dans la 2ème, comme Dn est paire,

$$Sn(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi f(x+t)D_n(t)dt + \int_0^\pi f(x-t)D_n(t)dt\right).$$

2a) f étant continue au point x, soit $\varepsilon>0$, il existe η tel que : $0<\eta<\alpha$ et $|f(x+\eta)-f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2A}$;

$\int_0^\pi (f(x+t)-f(x))D_n(t)dt = \int_0^\eta (f(x+t)-f(x))D_n(t)dt + \int_\eta^\pi (f(x+t)-f(x))D_n(t)dt$; D_n est continue , f est continue monotone sur $[0, \eta]$ donc $t \to f(x+t) - f(x)$ est croissante positive ou décroissante négative sur $[0, \eta]$; on en déduit avec l'ex 1 , qu'il existe c appartenant à $[0, \eta]$ tel que :

$\int_0^\eta (f(x+t)-f(x))D_n(t)dt = (f(x+\eta) - f(x)) \int_c^\eta D_n(t)dt$; on a donc

$\left|\int_0^\eta (f(x+t)-f(x))D_n(t)dt\right| \le \frac{\varepsilon}{2A}\left|\int_c^\eta D_n(t)dt\right|$; or $\int_c^\eta D_n(t)dt = F_n(\eta) - F_n(c)$ donc , avec ex3 A3d,

$\left|\int_c^\eta D_n(t)dt\right| \le \max\{F_n(\eta), F_n(c)\} \le A$ et donc $\left|\int_0^\eta (f(x+t)-f(x))D_n(t)dt\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$.

t $\to$ $\dfrac{f(x+t)-f(x)}{\sin(t/2)}$ est continue par morceaux sur $[\eta\ ,\ \pi\ ]$ et

$\int_\eta^\pi (f(x+t)-f(x))D_n(t)dt = \int_\eta^\pi \dfrac{f(x+t)-f(x)}{\sin(t/2)}\sin((n+1/2)t)dt$ donc, avec l'ex2, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\eta^\pi (f(x+t)-f(x))D_n(t)dt = 0$;

on en déduit qu'il existe N tel que : n > N entraine $\left| \int_\eta^\pi (f(x+t)-f(x))D_n(t)dt \right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. On a donc montré que

pour tout ε>0, il existe N tel que n > N entraine $\left| \int_0^\pi (f(x+t)-f(x))D_n(t)dt \right| \leq \varepsilon$.

$$\text{Conclusion : } \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi (f(x+t)-f(x))D_n(t)dt = 0$$

2b) idem 2a)

2c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2\pi}(\int_0^\pi (f(x+t)-f(x))D_n(t)dt + \int_0^\pi (f(x-t)-f(x))D_n(t)dt\ ) = 0$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)(x) - \dfrac{1}{2\pi}\int_\eta^\pi (f(x))D_n(t)dt - \dfrac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x)D_n(t)dt = 0$; or $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x)D_n(t)dt = f(\mathrm{x})\ \dfrac{1}{2\pi}\int_0^\pi D_n(t)dt = f(\mathrm{x})/2$

donc $S_n(f)(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\mathrm{x})$.

3. f étant continue par morceaux, si elle présente une discontinuité en x, alors elle admet une limite à droite et à gauche en x et donc, en procédant comme au 2., on prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = \dfrac{1}{2}(\lim\limits_{t\to x^+} f(t) + \lim\limits_{t\to x^-} f(t))$;

$(\mathrm{Sn}(f))_n$ converge donc simplement vers ce qu'on appelle la régularisée de f .

C1a). par parties : Sn(f) : x $\to 2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}$

1b. φ étant continue et monotone par morceaux, $(\mathrm{Sn}(f))_n$ converge vers $\tilde{\varphi}$ la régularisée de φ .

2. Fn : x $\to x + 2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}$ donc $(Fn)_n$ converge simplement vers F : x $\to x + \tilde{\varphi}(\mathrm{x})$;

en particulier, pour tout x de $]0,\ \pi\ ]$, $Fn(\ x\ ) \to \pi$.