Séance du 28 / 11 / 07 avec M. Laffont

Suites récurrentes.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur [1 ; 2] par $f(x) = \dfrac{6}{2 + x^2}$

1) Démontrer que $f([1\,;2]) = [1\,;2]$.

2) Démontrer que f admet un unique point fixe ξ ; Déterminer les points fixes de $g = f \circ f$.

3) Etudier la suite $(x_n)_n$ définie par son premier terme $x_0 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Exercice 2

Soit g une application d'un intervalle ouvert I vers **R** ; on suppose que g possède un point fixe ξ, et que g est dérivable en ξ .

A) Point fixe attractif :

1. Si $|g'(\xi)| < 1$,

a. Démontrer qu'il existe $k \in [0\,;1[$ et $\eta > 0$ tels que :
$[\xi-\eta\,;\xi+\eta] \subseteq I$ et pour tout $x \in [\xi-\eta\,;\xi+\eta]$, $|g(x) - \xi| \leq k\,|x - \xi|$.

b. En déduire que l'intervalle $J = [\xi-\eta\,;\xi+\eta]$ est stable par g et que toute suite $(x_n)_n$ définie par $x_0 \in J$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers ξ.

2. On suppose que g une application de classe C^q ($q \geq 2$), et que $g'(\xi) = \ldots\ldots = g^{(q-1)}(\xi) = 0$. Soit $J = [\xi-\eta\,;\xi+\eta]$ un intervalle pour lequel toute suite (x_n) définie par $x_0 \in J$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers ξ.

a. Si pour tout n $x_n \neq \xi$, démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-\xi}{(x_n-\xi)^q} = \frac{g^{(q)}(\xi)}{q!}$.

b. Démontrer l'existence d'un réel C tel que pour tout n, $|x_{n+1} - \xi| \leq C\,|x_n - \xi|^q$.

c. En déduire l'existence d'un réel D tel que $|x_n - \xi| \leq \dfrac{1}{D}\left(D\,|x_0 - \xi|\right)^{q^n}$.

B) On suppose que $g'(\xi) = 1$, que g est q fois dérivable en ξ ($q \geq 2$) et que q est le plus petit entier strictement supérieur à 1 tel que $g^{(q)}(\xi) \neq 0$. Soit $(x_n)_n$ une suite non stationnaire, définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$, convergeant vers ξ.

1. Démontrer que la suite $\left((x_{n+1} - \xi)^{1-q} - (x_n - \xi)^{1-q}\right)_n$ converge.

2. En déduire un équivalent de $x_n - \xi$.

C) Point fixe répulsif :

Si $|g'(\xi)| > 1$,

a. Démontrer qu'il existe $k > 1$ et $\eta > 0$ tels que :
$[\xi-\eta\,;\xi+\eta] \subseteq I$ et pour tout $x \in [\xi-\eta\,;\xi+\eta]$, $|g(x) - \xi| \geq k\,|x - \xi|$.

b. Démontrer que si une suite $(x_n)_n$ vérifiant la relation $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers ξ alors elle est stationnaire.

Exercice 3

A/ On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{2}$

1) Démontrer que pour tout couple (x ; y) de réels,
   $x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$.
2) Etudier les suites définies par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.

B/ Soit J un segment de **R** et g une application de J vers J ; on suppose que pour tout couple (x ; y) d'éléments de J : $x \neq y \Rightarrow |g(x) - g(y)| < |x - y|$.

1) Justifier la continuité de $h : x \to |g(x) - x|$.
2) Démontrer que g admet un unique point fixe ξ.
3) On considère une suite $(x_n)_n$ définie par la relation : $x_0 \in J$ et pour tout n, $x_{n+1} = g(x_n)$.
   Démontrer que la suite de terme général $y_n = |x_n - \xi|$ converge.
4) Démontrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers ξ .

Exercice 4

Méthode de Newton, suites de Héron d'Alexandrie

Soit a appartenant à **N*** et soit p la partie entière de $\sqrt{a}$; nous allons étudier la suite récurrente $(x_n)_n$, de premier terme $x_0 = p+1$, obtenue en appliquant la méthode de Newton (ou méthode des tangentes) à la fonction $f : x \to x^2 - a$.

Soit g la fonction définie sur **R*** par $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$

1) vérifier que l'intervalle $I = [\sqrt{a}\ ; p+1]$ est stable par g et que pour tout n , $x_{n+1} = g(x_n)$.
2) démontrer que pour tout n, $0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \dfrac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$
3) en déduire que pour tout n, $0 \leq x_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{x_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$
4) démontrer que pour tout n, $0 \leq x_n - \sqrt{a} \leq \left(\dfrac{1}{2p}\right)^{2^n - 1}$