Préparation à l'agrégation interne de Mathématiques 2005-2006

Jean-Marie Monier

Corrigé de l'épreuve d'entraînement du 26 novembre 2005

PARTIE I

I.1 Soit $s \in \mathbb{R}$.

On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\frac{\left|(n+1)^{-s}z^{n+1}\right|}{\left|n^{-s}z^n\right|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-s}|z| \underset{n\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, si $|z| < 1$, alors la série de terme général $n^{-s}z^n$ est absolument convergente, et, si $|z| > 1$, alors la série numérique de terme général $n^{-s}z^n$ est divergente.

On conclut : $\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n\geqslant 1} n^{-s}z^n \text{ est égal à } 1}$

I.2.a. • Si $s > 1$, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|n^{-s}z^n| = n^{-s}$, d'après l'exemple de Riemann, la série de terme général $n^{-s}z^n$ est absolument convergente, donc convergente.

• Si $s \leqslant 0$, comme $|n^{-s}z^n| = n^{-s}$ ne tend pas vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini, la série de terme général $n^{-s}z^n$ est (grossièrement) divergente.

I.2.b Si $0 < s \leqslant 1$, pour $z = 1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^{-s}z^n = n^{-s}$, donc, d'après l'exemple de Riemann, la série de terme général $n^{-s}z^n$ est divergente.

I.2.c. On suppose ici $0 < s \leqslant 1$ et $z \neq 1$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|S_n| = \Big|\sum_{k=1}^{n} z^k\Big| = \Big|z\frac{1-z^n}{1-z}\Big| = \Big|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\Big|$$

$$= \left|\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}n\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\theta}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}\right)}\right| = \left|\frac{-2\mathrm{i}\sin\frac{n\theta}{2}}{-2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}}\right| = \frac{\left|\sin\dfrac{n\theta}{2}\right|}{\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|}.$$

• On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$z^k = \sum_{\ell=1}^{k} z^\ell - \sum_{\ell=1}^{k-1} z^\ell = S_k - S_{k-1},$$

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-s}z^k = \sum_{k=1}^{n} k^{-s}(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} k^{-s}S_k - \sum_{k=1}^{n} k^{-s}S_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k^{-s}S_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{-s}S_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k^{-s}S_k - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^{-s}S_k + n^{-s}S_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(k^{-s} - (k+1)^{-s}\right)S_k + n^{-s}S_n.$$

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|S_n\big(n^{-s}-(n+1)^{-s}\big)\right| \leqslant |S_n|\big(n^{-s}-(n+1)^{-s}\big) \leqslant \frac{1}{\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|}\big(n^{-s}-(n+1)^{-s}\big).$$

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^{-s}-(n+1)^{-s}$, la série de terme général u_n est télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 1^{-s}-(n+1)^{-s} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc la série de terme général u_n converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, la série de terme général $S_n\big(n^{-s}-(n+1)^{-s}\big)$ est absolument convergente, donc convergente.

D'autre part : $$|n^{-s}S_n| \leqslant \frac{n^{-s}}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après les calculs précédents, il en résulte que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-s}z_n^k$ est convergente, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{-s}z^n$ est convergente.

I.3.a. Soit $s \in \mathbb{R}$ fixé. Puisque la fonction $t \longmapsto \dfrac{\varphi(t,s)}{t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}t^{n-1}$ est développable en série entière de rayon $\geqslant 1$, on peut primitiver terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence, d'où, pour tout $x \in]-1\,;1[$:

$$\int_0^x \frac{\varphi(t,s)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)}x^n = \varphi(x,s+1).$$

I.3.b. • Pour tout $x \in]-1\,;1[$:

$$\varphi(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

• Pour tout $x \in]-1\,;1[$:

$$\varphi(x,1) = \int_0^x \frac{\varphi(t,0)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\big[\ln(1-t)\big]_0^x = -\ln(1-x).$$

I.4.a. • L'application $f_n : [0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R},\ t \longmapsto f_n(t) = \mathrm{e}^{-nt}t^{s-1}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ (puisque $s>1$) et $t^2 f_n(t) = \mathrm{e}^{-nt}t^{s+1} \underset{t\,\longrightarrow\,+\infty}{\longrightarrow} 0$, car $n>0$ et par prépondérance de l'exponentielle sur les puissances, donc pour t assez grand, $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. Par comparaison à l'exemple de Riemann, il en résulte que f_n est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}t^{s-1}\,\mathrm{d}t \underset{[u=nt]}{=} \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\Big(\frac{u}{n}\Big)^{s-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{n^s}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}u^{s-1}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(s)}{n^s}.$$

I.4.b. On suppose ici $|z| \leqslant 1$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto h_n(t) = z^n f_n(t)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, h_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0\,;+\infty[$
- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$, car elle converge absolument, puisque, pour

tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0\,;+\infty[$: $\quad |h_n(t)| = |z^n f_n(t)| \leqslant f_n(t) = \mathrm{e}^{-nt} t^{s-1}$
et que la série de terme général $\mathrm{e}^{-nt} t^{s-1}$ converge ($t > 0$).

- Montrons que la fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n$ est continue (donc continue par morceaux). Les applications

h_n sont continues sur $]0\,;+\infty[$ et la série d'applications $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ converge normalement sur tout segment de $]0\,;+\infty[$, car, pour tout $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, t \in [a\,;b], \quad |h_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-nt} t^{s-1} \leqslant \mathrm{e}^{-na} b^{s-1},$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, h_n est bornée et :

$$||h_n||_\infty \leqslant \mathrm{e}^{-na} b^{s-1},$$

qui est le terme général d'une série convergente, série géométrique de raison e^{-a} et $|\mathrm{e}^{-a}| < 1$.

- Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} |h_n|$ converge. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty} |h_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} |z^n f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(s)}{n^s}.$$

Comme $s > 1$, la série de terme général $\dfrac{\Gamma(s)}{n^s}$ converge, donc, par théorème de majoration, la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

D'après le théorème du Cours sur série de fonctions et intégration sur un intervalle quelconque, on peut intégrer terme à terme et on a donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(z,s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(s)} \Big(\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \Big) z^n = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} h_n(t) \Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \mathrm{e}^{-nt} t^{s-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (z\,\mathrm{e}^{-t})^n t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} z\,\mathrm{e}^{-t} \frac{1}{1 - z\,\mathrm{e}^{-t}} t^{s-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - z}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On conclut :

$$\boxed{\varphi(z,s) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - z}\,\mathrm{d}t}$$

PARTIE II

II.1 Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n :]1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad s \longmapsto u_n(s) = n^{-s} = \mathrm{e}^{-s\ln n}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application u_n est de classe C^∞ sur $]1\,;+\infty[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, s \in]1\,;+\infty[, \quad u_n^{(k)}(s) = (-\ln n)^k \mathrm{e}^{-s\ln n}.$$

- La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]1\,;+\infty[$, d'après l'exemple de Riemann ($s > 1$).

- Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment $[a\,;b]$ de $]1\,;+\infty[$. On a : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, s \in [a\,;b], \quad |u_n^{(k)}(s)| = (\ln n)^k n^{-s} \leqslant (\ln n)^k n^{-a}$,

d'où : $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad ||u_n^{(k)}||_\infty^{[a\,;b]} \leqslant (\ln n)^k n^{-a}$.

Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \alpha < a$, par exemple $\alpha = \dfrac{a+1}{2}$. On a :

$$n^\alpha (\ln n)^k n^{-a} = n^{\alpha - a}(\ln n)^k \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par prépondérance de la puissance sur le logarithme. Donc, pour n assez grand, $n^\alpha ||u_n^{(k)}||_\infty^{[a\,;b]} \leqslant 1$, d'où $||u_n^{(k)}||_\infty^{[a\,;b]} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$, ce qui montre que la série de terme général $||u_n^{(k)}||_\infty^{[a\,;b]}$ converge.

D'après le théorème de dérivation pour les séries de fonctions, étendu aux fonctions de classe C^∞, on conclut :

$$\boxed{\zeta \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]1\,;+\infty[\text{ et : } \forall\, s \in]1\,;+\infty[, \quad \zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\ln n)^k n^{-s}}$$

II.2. D'après le résultat précédent, ζ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et :

$$\forall\, s \in]1\,;+\infty[, \quad \zeta'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^{-s}\ln n = \sum_{n=2}^{+\infty} -n^{-s}\ln n.$$

Comme chaque terme de cette série est < 0, sa somme est < 0, donc ζ est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

De même, ζ est deux fois dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et :

$$\forall\, s \in]1\,;+\infty[, \quad \zeta''(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}(\ln n)^2.$$

Comme chaque terme de cette série est $\geqslant 0$, sa somme est $\geqslant 0$, donc ζ est convexe sur $]1\,;+\infty[$.

II.3. • Soit $s \in]1\,;+\infty[$. Puisque l'application $t \longmapsto t^{-s}$ est décroissante et intégrable sur $[1\,;+\infty[$, on a, par comparaison série/intégrale : $\quad 0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \leqslant \int_1^{+\infty} t^{-s}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} t^{-s}$,

c'est-à-dire : $\qquad 0 \leqslant \zeta(s) - 1 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-s}\,\mathrm{d}t \leqslant \zeta(s).$

II.4. On a, pour tout $s \in]1\,;+\infty[$: $\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-s}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s-1}.$

On déduit, pour tout $s \in]1\,;+\infty[$: $\quad \dfrac{1}{s-1} \leqslant \zeta(s) \leqslant 1 + \dfrac{1}{s-1}$,

d'où : $\qquad 1 \leqslant (s-1)\zeta(s) \leqslant s.$

On déduit, par théorème d'encadrement : $(s-1)\zeta(s) \underset{s \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 1$, et on conclut :

$$\boxed{\zeta(s) \underset{s \longrightarrow +1}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \zeta(s) \underset{s \longrightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}}$$

II.5. On a :

$$2^s\big(\zeta(s) - 1 - 2^{-s}\big) = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^{-s}.$$

Comme :

$$\forall\, n \geqslant 3,\ \forall\, s \in [2\,;+\infty[,\quad \left|\left(\frac{n}{2}\right)^{-s}\right| \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^{-2},$$

et que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \left(\frac{n}{2}\right)^{-2}$ converge, la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \left(s \longmapsto \left(\frac{n}{2}\right)^{-s}\right)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[2\,;+\infty[$.

Comme, pour tout $n \geqslant 3$, $\left(\dfrac{n}{2}\right)^{-s} \underset{s \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après un théorème du Cours, on déduit

$\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^{-s} \underset{s \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $2^{-s}\big(\zeta(s) - 1 - 2^{-s}\big) \underset{s \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\zeta(s) - 1 - 2^{-s} = o(2^{-s})$, c'est-à-dire : $\zeta(s) - 1 \underset{s \longrightarrow +\infty}{\sim} 2^{-s}$.

Comme $2^{-s} \underset{s \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit : $\zeta(s) \underset{s \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$.

II.6. On en déduit facilement le tableau de variations de ζ et le tracé de la courbe représentative de ζ.

II.7. Soit $(s,t) \in]1\,;+\infty[^2$. Puisque les séries de termes généraux n^{-s} et n^{-t} convergent, les suites de termes généraux $n^{-s/2}$ et $n^{-t/2}$ sont de carrés sommables. D'après l'inégalité de Cauchy et Schwarz dans ℓ^2, la suite de terme général $n^{-s/2}n^{-t/2}$ est sommable et :

$$\left(\zeta\left(\frac{s+t}{2}\right)\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{s+t}{2}}\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s/2}n^{-t/2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-t}\right) = \zeta(s)\zeta(t).$$

Puisque ζ est à valeurs $\geqslant 0$, on conclut : $\qquad \zeta\left(\dfrac{s+t}{2}\right) \leqslant \sqrt{\zeta(s)\zeta(t)}.$

II.8. Soit $a \in \mathbb{R}$. Notons $h :]1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad s \longmapsto h(s) = \big(\zeta(s) - 1\big)^a$.

- Puisque ζ est à valeurs > 1 et de classe C^∞ sur $]1\,;+\infty[$, h est $\geqslant 0$ et continue sur $]1\,;+\infty[$.
- On a, en 1 : $\zeta(s) \underset{s \longrightarrow 1}{\longrightarrow} +\infty$ et $\zeta(s) - 1 \underset{s \longrightarrow 1}{\sim} \dfrac{1}{s-1}$, d'où $h(s) \underset{s \longrightarrow 1}{\sim} \dfrac{1}{(s-1)^a}$.

Comme $s \longmapsto \dfrac{1}{(s-1)^a}$ est $\geqslant 0$ et est intégrable en 1 si et seulement si $a < 1$, h est intégrable en 1 si et seulement si $a < 1$.

- On a, en $+\infty$: $h(s) \sim (2^{-s})^a = \mathrm{e}^{-a(\ln 2)\, s}$. Comme $s \longmapsto \mathrm{e}^{-a(\ln 2)\, s}$ est $\geqslant 0$ et est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $a > 0$, h est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $a > 0$.

On conclut :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \big(\zeta(s) - 1\big)^a \,\mathrm{d}s \text{ existe si et seulement si : } a \in]0\,;1[}$$

PARTIE III

II.1.a. • On a, pour tout $x \in]-2\pi\,;0]$:

$$g(x) = g(x+2\pi) = \left(\frac{\pi-(x+2\pi)}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi+x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi-(-x)}{2}\right)^2 = g(-x).$$

Comme de plus g est 2π-périodique, on conclut que g est paire.

• D'après sa définition, g est continue sur $[0\,;2\pi[$ et admet une limite finie en $2\pi^-$. Par 2π-périodicité, il en résulte que g est continue par morceaux qur $\mathbb{R}$. Donc g admet des coefficients de Fourier trigonométriques, notés a_n, b_n.

Puisque g est paire, tous les b_n sont nuls.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-t}{2}\right)^2\cos nt\,\mathrm{d}t \\
&\underset{\text{ipp}, n\geqslant 1}{=} \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi-t}{2}\right)^2\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -\left(\frac{\pi-t}{2}\right)\frac{\sin nt}{n}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}(\pi-t)\sin nt\,\mathrm{d}t \underset{\text{ipp}}{=} \frac{1}{2\pi n}\left(\left[(\pi-t)\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\cos nt}{n}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n}-\frac{1}{n}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Et :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-t}{2}\right)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{\pi-t}{2}\right)^3\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{3\pi}\left(-\frac{\pi^3}{8}-\frac{\pi^3}{8}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

• L'application g est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ (car il y a raccordement par continuité en 2π et en 0) et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de convergence normale de Dirichlet, la série de Fourier de g converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme g, donc :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}}$$

III.1.b. • On applique le résultat précédent à $x = 0$:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = g(0) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},$$

d'où :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

• Puisque g est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Parseval :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

Ici :

$$\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{4}\Big(\frac{\pi^2}{6}\Big)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{144}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4},$$

et :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\pi-x}{2}\Big)^4\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\Big[-\frac{2}{5}\Big(\frac{\pi-x}{2}\Big)^5\Big]_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{2}{5}\,\frac{2\pi^5}{32}=\frac{\pi^4}{80}.$$

On obtient :

$$\zeta(4)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=2\left(\frac{\pi^4}{80}-\frac{\pi^4}{144}\right)=\frac{\pi^4}{90}.$$

On conclut :

$$\boxed{\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}\qquad\qquad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}}$$

III.2.a. On a :

$$\text{Ré}\left(\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},2)\right)=\text{Ré}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n^2}=g(\theta)-\frac{\pi^2}{12}.$$

III.2.b. D'après I.4.2 :

$$\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},2)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\Gamma(2)}\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t.$$

Mais $\Gamma(2)=(2-1)!=1$, et :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)t}{\mathrm{e}^t-\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\mathrm{e}^t-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{(\mathrm{e}^t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}t,$$

donc, en prenant la partie réelle :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t(\mathrm{e}^t\cos\theta-1)}{\mathrm{e}^{2t}-2\,\mathrm{e}^t\cos\theta+1}\,\mathrm{d}t=\text{Ré}\left(\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},2)\right)=g(\theta)-\frac{\pi^2}{12}.$$

III.2.c. • En appliquant la formule précédente à $\theta=0$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t(\mathrm{e}^t-1)}{\mathrm{e}^{2t}-2\,\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t=g(0)-\frac{\pi^2}{12},$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{6}.$$

• En appliquant la formule précédente à $\theta=\pi$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t(-\mathrm{e}^t-1)}{\mathrm{e}^{2t}+2\,\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t=g(\pi)-\frac{\pi^2}{12},$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{12}.$$

• On a :

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t\,\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t(\mathrm{e}^t - 1 + 1)}{\mathrm{e}^{2t}-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{2t}{\mathrm{e}^{2t}-1}\,\mathrm{d}t \underset{[u=2t]}{=} 2I_2 + \frac{1}{2}I_1 = 2\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{4}.$$

• L'application $t \longmapsto \dfrac{t^2 \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, de limite 1 en 0, équivalente à $2t^2\mathrm{e}^{-t}$ en $+\infty$, donc elle est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Effectuons une intégration par parties, pour $0 < \varepsilon \leqslant T$:

$$\int_\varepsilon^T t \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\frac{1}{\operatorname{sh} t}\right]_\varepsilon^T + \int_\varepsilon^T \frac{t^2}{2}\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

d'où, en faisant tendre ε vers 0 et T vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2}\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{2}.$$

• Pour $\lambda > 0$, effectuons le changement de variable $u = \lambda t$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(\lambda t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} \frac{u}{\operatorname{sh} u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{4\lambda^2}.$$

Et, par imparité, pour $\lambda < 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(\lambda t)}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(-\lambda t)}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{4(-\lambda)^2} = -\frac{\pi^2}{4\lambda^2}.$$

Finalement :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(\lambda t)}\,\mathrm{d}t = \operatorname{sgn}(\lambda)\frac{\pi^2}{4\lambda^2}.$$

• Par le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u+1}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u(u+1)}\,\mathrm{d}u,$$

d'où :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12}.$$

III.3.a. On a, d'après I.4.2, puisque $s+1>1$:

$$\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, s+1) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\Gamma(s+1)}\int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t.$$

D'une part :

$$\Gamma(s+1)\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, s+1) = \Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta n} = \Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)}\big(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta\big)$$

$$= \Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)}\cos n\theta + \mathrm{i}\Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)}\sin n\theta.$$

D'autre part :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\int_0^{+\infty}\frac{t^s}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{t^s(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\mathrm{e}^t-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{(\mathrm{e}^t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{t^s(\mathrm{e}^t\cos\theta-1)}{\mathrm{e}^{2t}-2\,\mathrm{e}^t\cos\theta+1}\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{t^s\mathrm{e}^t\sin\theta}{\mathrm{e}^{2t}-2\,\mathrm{e}^t\cos\theta+1}\,\mathrm{d}t.$$

En égalant les parties réelles et les parties imaginaires, on conclut :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^s(\mathrm{e}^t\cos\theta-1)}{\mathrm{e}^{2t}-2\,\mathrm{e}^t\cos\theta+1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)}\cos n\theta}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^s\mathrm{e}^t\sin\theta}{\mathrm{e}^{2t}-2\,\mathrm{e}^t\cos\theta+1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)}\sin n\theta}$$

III.3.b. 1) Existence

• L'application $t \longmapsto \dfrac{t^s}{\mathrm{ch}\, t}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et $t^2\dfrac{t^s}{\mathrm{ch}\, t} \underset{t\,\longrightarrow\,+\infty}{\sim} 2t^{s+2}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{t\,\longrightarrow\,+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc cette application est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, ce qui montre que la première intégrale $I(s)$ proposée existe.

• L'application $t \longmapsto \dfrac{t^s}{\mathrm{sh}\, t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, équivalente en 0 à t^{s-1}, et $s-1>-1$, donc intégrable en 0, et intégrable en $+\infty$ comme ci-dessus, donc intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Ceci montre que les deux intégrales proposées $I(s)$ et $J(s)$ existent.

2) Calcul

• On a :

$$I(s) = \int_0^{+\infty}\frac{t^s}{\mathrm{ch}\, t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{2t^s}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{2t^s\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}\,\mathrm{d}t.$$

En remplaçant θ par $\dfrac{\pi}{2}$ dans la deuxième formule de III.3.1, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^s\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)}\sin n\frac{\pi}{2} = \Gamma(s+1)\sum_{p=0}^{+\infty}(2p+1)^{-(s+1)}(-1)^p,$$

car les termes d'indices impairs sont nuls.

On conclut :

$$\boxed{I(s) = 2\,\Gamma(s+1)S_2(s)}$$

• On a :

$$J(s) = \int_0^{+\infty}\frac{t^s}{\mathrm{sh}\, t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{2t^s}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{2t^s\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}-1}\,\mathrm{d}t.$$

Et :

$$\frac{2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^t-1} + \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}.$$

En remplaçant θ par π dans la première formule de III.3.1, on a :

$$-\int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\mathrm{e}^t + 1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \cos n\pi = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{s+1}}.$$

En remplaçant θ par 0 dans la première formule de III.3.1, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{s+1}}.$$

En reportant, on déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t^s\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t} - 1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^{s+1}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)^{s+1}}.$$

On conclut :

$$\boxed{J(s) = 2\,\Gamma(s+1) S_1(s)}$$

****