Préparation à l'agrégation interne 2005-2006

Jean-Marie Monier

Corrigé de l'épreuve d'entraînement du 14 janvier 2006

Question Préliminaire

Soit $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

• 1). Supposons $S \in \mathbf{S}_n^+$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(S)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $SX = \lambda X$ et $X \neq 0$. On a :

$$\lambda ||X||_2^2 = \lambda^t XX =^t X(\lambda X) =^t XSX \text{ ¿ } 0,$$

donc $\lambda \text{ ¿ } 0$.

Ceci montre : $\mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+$.

2). Réciproquement, supposons $\mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+$.

D'après le théorème spectral, il existe $U \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $S = UDU^{-1}$.

Notons $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où, par hypothèse : $\forall\, i \in \{1, ..., n\},\quad \lambda_i \text{ ¿ } 0$.

Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a : $\quad {}^tXSX =^t XUDU^{-1}X =^t (U^{-1}X)D(U^{-1}X)$,
car $U^{-1} =^t U$.

Notons $Y = U^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a alors : $\quad {}^tXSX =^t YDY = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \text{ ¿ } 0$.

Ceci montre : $S \in \mathbf{S}_n^+$.

On conclut :

$$\boxed{\forall\, S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}),\quad S \in \mathbf{S}_n^+ \iff \mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+}$$

• 1). Supposons $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

En raisonnant comme ci-dessus, on déduit : $\mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

2). Réciproquement, supposons $\mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

On a déjà, d'après le résultat précédent, $S \in \mathbf{S}_n^+$.

De plus, pour toute $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec les notations précédentes :

$$
\begin{aligned}
{}^tXSX = 0 \iff {}^tYDY = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = 0 \\
\iff \forall\, i \in \{1, ..., n\},\quad y_i = 0 \iff Y = 0 \iff X = 0,
\end{aligned}
$$

car les λ_i sont tous > 0.

Ceci montre : $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

On conclut :

$$\boxed{\forall\, S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}),\quad S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+^*}$$

PARTIE I

I.1.a. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Par définition de f_σ, on a, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$:

$$f_\sigma(\mathrm{E}_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,\sigma(j)} \mathrm{E}_i = \mathrm{E}_{\sigma(j)}.$$

I.1.b. Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. On a, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$:

$$(f_\sigma \circ f_\tau)(\mathrm{E}_j) = f_\sigma\big(f_\tau(\mathrm{E}_j)\big) = f_\sigma(\mathrm{E}_{\tau(j)}) = \mathrm{E}_{\sigma(\tau(j))} = \mathrm{E}_{\sigma\circ\tau(j)} = f_{\sigma\circ\tau}(\mathrm{E}_j).$$

Ceci montre que les endomorphismes $f_\sigma \circ f_\tau$ et $f_{\sigma\circ\tau}$ coïncident sur la base canonique, donc sont égaux, d'où, en passant aux matrices, le résultat voulu :

$$\boxed{\forall\, \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n, \quad M_\sigma M_\tau = M_{\sigma\circ\tau}}$$

I.2. Considérons l'application $M : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathbf{P}_n, \quad \sigma \longmapsto M(\sigma) = M_\sigma$.

Par définition, M est surjective.

D'autre part, soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ telles que $M_\sigma = M_\tau$. On a :

$$\forall\, (i,j) \in \{1, ..., n\}^2, \quad \delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{i,\tau(j)},$$

d'où, en prenant $i = \sigma(j)$: $\quad \forall\, j \in \{1, ..., n\}, \quad \delta_{\sigma(j),\tau(j)} = 1, \qquad$ et donc $\sigma = \tau$.

Ceci montre que M est injective.

D'après 1.b., M est donc un isomorphisme d'ensembles munis de lois internes. Par transport de structure, comme $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe, $\mathbf{P}_n$ est aussi un groupe et il lui est isomorphe.

Et $\mathbf{P}_n$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ car, de plus, en notant e l'identité de $\{1, ..., n\}$, on a : $\mathrm{I}_n = M_e \in \mathbf{P}_n$.

On conclut : $\mathbf{P}_n$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et l'application $\sigma \longmapsto M_\sigma$ est un isomorphisme du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ sur le groupe $(\mathbf{P}_n, \cdot)$.

I.3.a. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On a, pour tout $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$:

$$\big({}^t(M_\sigma)\big)_{ij} = (\delta_{j,\sigma(i)})_{ij} = (\delta_{i,\sigma^{-1}(j)})_{ij} = \big(M_{\sigma^{-1}}\big)_{ij},$$

et donc :

$${}^tM_\sigma = M_{\sigma^{-1}}.$$

I.3.b. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On a, en notant e l'identité de $\{1, ..., n\}$:

$$M_\sigma \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \iff {}^t(M_\sigma) = M_\sigma \iff M_{\sigma^{-1}} = M_\sigma \iff \sigma^{-1} = \sigma \iff \sigma^2 = e.$$

On conclut : M_σ est symétrique si et seulement si σ est une involution.

I.4. • On appelle cycle de $\mathfrak{S}_n$ toute permutation c de $\{1, ..., n\}$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $i_1, ..., i_p \in \{1, ..., n\}$ deux à deux distincts, tels que :

$$\begin{cases} c(i_1) = i_2,\ c(i_2) = i_3,\ \dots,\ c(i_{p-1}) = i_p,\ c(i_p) = i_1 \\ \forall\, j \in \{1, ..., n\} - \{i_1, ..., i_p\}, \quad c(j) = j. \end{cases}$$

• Avec les notations précedentes, le support de c est, par définition, l'ensemble $\{i_1, ..., i_p\}$.

• Énoncé du théorème de décomposition en cycles disjoints : toute permutation de $\{1, ..., n\}$ est décomposable en un produit de cycles à supports deux à deux disjoints, de façon unique à l'ordre près des cycles.

I.5.a. Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p_1, ..., p_N \in \mathbb{N}^*$ tels que $p_1 + \cdots + p_N = n$, $A_1 \in \mathbf{M}_{p_1}(\mathbb{R}), ..., A_N \in \mathbf{M}_{p_N}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_N \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale par blocs.

1) Étude du polynôme minimal

Une récurrence immédiate montre que : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \ B^k = \begin{pmatrix} A_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_N^k \end{pmatrix}$,

puis, par linéarité : $\quad \forall\, P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \ P(B) = \begin{pmatrix} P(A_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(A_N) \end{pmatrix}$.

On a alors, pour tout $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$:

$$P(B) = 0 \iff \big(\forall\, k \in \{1, ..., N\},\ \ P(A_k) = 0\big).$$

En notant $\pi_{.}$ les polynômes minimaux, on a donc :

$$\pi_B \mathbb{R}(\mathrm{X}] = \big\{P \in \mathbb{R}(\mathrm{X}]\,;\, P(B) = 0\big\} = \bigcap_{k=1}^{N} \big\{P \in \mathbb{R}(\mathrm{X}]\,;\, P(A_k) = 0\big\} = \bigcap_{i=1}^{N} \pi_{A_k} \mathbb{R}[\mathrm{X}] = \Big(\operatorname*{ppcm}_{\mathbf{1 6} k \mathbf{6} N} \pi_{A_k}\Big)\mathbb{R}(\mathrm{X}].$$

On conclut : le polynôme minimal d'une matrice carrée diagonale par blocs est le ppcm des polynômes minimaux des blocs diagonaux.

2) Étude du polynôme caractéristique

En notant $\chi_{.}$ les polynômes caractéristiques, on a :

$$\chi_B(\lambda) = \det\,(B - \lambda \mathrm{I}_n) = \det \begin{pmatrix} A_1 - \lambda \mathrm{I}_{p_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_N - \lambda \mathrm{I}_{p_N} \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{N} \det\,(A_k - \lambda \mathrm{I}_{p_k}) = \prod_{k=1}^{N} \chi_{A_k}(\lambda).$$

On conclut : le polynôme caractéristique d'une matrice carrée diagonale par blocs est le produit des polynômes caractéristiques de chacun des blocs diagonaux.

I.5.b. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma = c_1 \circ \cdots \circ c_N$ sa décomposition en produit de cycles disjoints.
Considérons la famille $\mathcal{F}_1 = \big(\mathrm{E}_1,\ f_\sigma(\mathrm{E}_1),\ f_{\sigma^2}(\mathrm{E}_1), \dots\big)$.
Si $f(\mathrm{E}_1) = \mathrm{E}_1$, alors $\mathcal{F}_1 = (\mathrm{E}_1)$.
Si $f(\mathrm{E}_1) \neq \mathrm{E}_1$, il existe $i_1 \in \{1, ..., N\}$ tel que 1 soit dans le support de c_{i_1}. On a alors, en notant p_1 la longueur de c_{i_1} :

$$\mathcal{F}_1 = \big(\mathrm{E}_1,\ f_{c_1}(\mathrm{E}_1),\ ...,\ f_{c_1^{p_1 - 1}}(\mathrm{E}_1)\big).$$

En réitérant, on construit une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice N_σ de f_σ dans $\mathcal{B}$ soit de la forme : $N_\sigma = \begin{pmatrix} C_1 & (0) & \dots & (0) \\ (0) & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & C_N & (0) \\ (0) & \dots & (0) & \mathrm{I} \end{pmatrix}$, où, pour tout $k \in \{1, ..., N\}$, $C_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p_k}(\mathbb{R})$.

Il est clair que, pour tout $k \in \{1, ..., N\}$, on a :

$$\pi_{C_k} = \mathrm{X}^{p_k} - 1 \qquad \text{et} \qquad \chi_{C_k} = (-1)^{p_k}(\mathrm{X}^{p_k} - 1).$$

D'après 5.a., on conclut : le polynôme minimal de M_σ est le ppcm des $\mathrm{X}^{p_k} - 1$, où les p_k, $k \in \{1, ..., N\}$ sont les longueurs des cycles de la décomposition de σ en produit de cycles disjoints, et le polynôme caractéristique de M_σ est le produit des $\mathrm{X}^{p_k} - 1$, au signe près.

I.6.a. Avec les notations précédentes, en notant $\mu = \mathrm{ppcm}\,(p_1, ..., p_n)$, on a : $\pi_{M_\sigma} = \mathrm{X}^\mu - 1$. Comme le polynôme $\mathrm{X}^\mu - 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$ et à zéros tous simples, d'après le Cours, M_σ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

I.6.b. • Supposons M_σ diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, χ_{M_σ} est scindé sur $\mathbb{R}$.

Comme $\chi_{M_\sigma} = (-1)^n \displaystyle\prod_{k=1}^{N} (\mathrm{X}^{p_k} - 1)$, il en résulte que, pour tout $k \in \{1, ..., p\}$, $\mathrm{X}^{p_k} - 1$ est scindé sur $\mathbb{R}$, donc $p_k = 2$ (ou 1). Ceci montre que σ est un produit de cycles disjoints de longueur 2, et donc, comme ces cycles commutent deux à deux, on a : $\sigma^2 = e$.

• Réciproquement, si $\sigma^2 = e$, alors tous les cycles de la décomposition de σ sont de longueur 2 (ou 1), donc $\pi_{M_\sigma} = \mathrm{X}^2 - 1$ ou $\pi_{M_\sigma} = \mathrm{X} - 1$, et donc π_{M_σ} est scindé sur $\mathbb{R}$. D'après le Cours, il en résulte que M_σ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

On conclut : M_σ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma^2 = e$.

I.7.a. On suppose ici $2 \leqslant k \leqslant n$. Considérons, par exemple, le cycle $\sigma = [1, 2, ..., k]$. Alors $M_\sigma^k = \mathrm{I}_n$, et $M_\sigma \neq \mathrm{I}_n$. donc l'équation $M^k = \mathrm{I}_n$, d'inconnue $M \in \mathbf{P}_n$, admet au moins une solution autre que I_n.

I.7.b. Pour $n = 2$ et $k = 3$, l'équation $M^3 = \mathrm{I}_2$, d'inconnue $M \in \mathbf{P}_2$, n'a pour solution que I_2, car $\mathbf{P}_2 = \{\mathrm{I}_2, V\}$, où $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $V^3 = V \neq \mathrm{I}_2$.

Ainsi, pour $k > n$, il se peut que l'équation $M^k = \mathrm{I}_n$, d'inconnue $M \in \mathbf{P}_n$, n'admette pas d'autre solution que I_n.

I.7.c. (i) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_4$. Considérons la décomposition de σ en produit de cycles deux à deux disjoints.

• Si l'un des cycles c de la décomposition de σ est de longueur 3, alors σ est égale à ce cycle c, donc $\sigma^3 = c^3 = e$, puis $\sigma^4 = c \neq e$, donc $M^4 \neq \mathrm{I}_4$.

• Sinon, comme σ ne porte que sur quatre éléments, tous les cycles de la décompostion de σ sont de longueur 2 (ou 1), donc $\sigma^2 = e,\ \sigma^4 = e,\ M^4 = \mathrm{I}_4$.

Ceci montre que M_σ est solution de $M^4 = \mathrm{I}_4$ si et seulement si σ n'est pas un cycle de longueur 3. Comme $\mathfrak{S}_4$ a $4! = 24$ éléments et qu'il y a exactement 8 cycles de longueur 3 :

$$[1,\,2,\,3],\ [1,\,3,\,2],\ [1,\,2,\,4],\ [1,\,4,\,2],\ [1,\,3,\,4],\ [1,\,4,\,3],\ [2,\,3,\,4],\ [2,\,4,\,3],$$

on conclut que le nombre de solutions demandé est égal à $24 - 8 - 1 = 15$.

(ii) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_7$. Considérons la décomposition de σ en produit de cycles deux à deux disjoints.

• Si $M_\sigma^5 = \mathrm{I}_7$, alors $\mathrm{X}^5 - 1$ est annulateur de M_σ, donc le polynôme minimal de M_σ divise $\mathrm{X}^5 - 1$. Mais ce polynôme minimal est de la forme $\mathrm{X}^\mu - 1,\ \mu \in \mathbb{N}^*$. Il est clair qu'alors $\mu = 1$ ou $\mu = 5$. Si $\mu = 1$, alors $M_\sigma = \mathrm{I}_n$, exclu. Si $\mu = 5$, alors σ contient un cycle de longueur 5. Comme σ porte sur 7 éléments, et que $\mathrm{X}^2 - 1$ ne divise pas $\mathrm{X}^5 - 1$, σ est nécessairement égale à un cycle de longueur 5.

• Réciproquement, pour tout cycle σ de longueur 5, on a $M_\sigma^5 = \mathrm{I}_7$.

Ceci montre que M_σ est solution de $M^5 = \mathrm{I}_7$ autre que I_7 si et seulement si σ est un cycle de longueur 5. Il y a exactement C_7^5 parties à 5 éléments de $\{1, ..., 7\}$. D'autre part, pour toute partie de $\{1, ..., 7\}$ à cinq éléments, il y a exactement 4! cycles de longueur 5 ayant cette partie pour support.

On conclut que le nombre de solutions de l'équation proposée est :

$$4!\cdot \mathrm{C}_7^5-1=4!\cdot \mathrm{C}_7^2-1=24\cdot 21-1=503.$$

(iii) Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_7-\{e\}$ telle que $M_\sigma^7=\mathrm{I}_6$. Avec les notations précédentes, le ppcm des longueurs des cycles d'une décompostion de σ en produit de cycles deux à deux disjoints est égal à 7, ce qui est impossible.

On conclut que le nombre de solution(s) de l'équation proposée est 0.

I.8. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Avec les notations précédentes, on a $M_\sigma^\mu=\mathrm{I}_n$, donc la suite $(M_\sigma^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est périodique. Il est clair qu'une suite périodique est convergente si et seulement si elle est constante. La suite $(M_\sigma^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si $M_\sigma=\mathrm{I}_n$ c'est-à-dire si et seulement si $\sigma=e$.

PARTIE II

II.1. • On a $\mathbf{D}_n^{++}\subset\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, car, si $D=\mathrm{diag}\,(d_1,...,d_n)\in\mathbf{D}_n^{++}$, alors $\det(D)=\displaystyle\prod_{k=1}^n d_{kk}\neq 0$, donc D est inversible.

• $\mathrm{I}_n=\mathrm{diag}\,(1,...,1)\in\mathbf{D}_n^{++}$.

• Si $D=\mathrm{diag}(d_1,...,d_n)\in\mathbf{D}_n^{++}$, et $\Delta=\mathrm{diag}(\delta_1,...,\delta_n)\in\mathbf{D}_n^{++}$, alors $D\Delta=\mathrm{diag}\,(d_1\delta_1,...,d_n\delta_n)\in\mathbf{D}_n^{++}$.

• Si $D=\mathrm{diag}\,(d_1,...,d_n)\in\mathbf{D}_n^{++}$, alors $D\in\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D^{-1}=\mathrm{diag}\,(d_1^{-1},...,d_n^{-1})\in\mathbf{D}_n^{++}$.

On conclut :

$$\boxed{\mathbf{D}_n^{++}\text{ est un sous-groupe de }\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})}$$

II.2. • Par définition de $\mathbf{G}_n$, l'application $\varphi:(\sigma,D)\longmapsto M_\sigma D$ est une surjection de $\mathfrak{S}_n\times\mathbf{D}_n^{++}$ sur $\mathbf{G}_n$.

• Soient $(\sigma,D),\ (\tau,E)\in\mathfrak{S}_n\times\mathbf{D}_n^{++}$ tels que $\varphi(\sigma,D)=\varphi(\tau,E)$, c'est-à-dire $M_\sigma D=M_\tau E$.

Notons $D=\mathrm{diag}\,(d_1,...,d_n),\ E=\mathrm{diag}\,(e_1,...,e_n)$.

On a, pour tout $(i,j)\in\{1,...,n\}^2$:

$$(M_\sigma D)_{ij}=\sum_{k=1}^n(M_\sigma)_{ik}(D)_{kj}=\sum_{k=1}^n\delta_{i,\sigma(k)}d_{kj}=d_{\sigma^{-1}(i),j}=\delta_{\sigma^{-1}(i),j}d_j$$

et, de même : $\qquad (M_\tau E)_{ij}=\delta_{\tau^{-1}(i),j}e_j.$

On a donc :

$$\begin{aligned}M_\sigma D=M_\tau E &\iff \forall\,(i,j)\in\{1,...,n\}^2,\quad \delta_{\sigma^{-1}(i),j}d_j=\delta_{\tau^{-1}(i),j}e_j\\ &\iff \forall\,i\in\{1,...,n\},\quad d_{\sigma^{-1}(i)}=\delta_{\tau^{-1}(i),\sigma^{-1}(i)}e_{\sigma^{-1}(i)}\\ &\iff \forall\,i\in\{1,...,n\},\quad \begin{cases}\tau^{-1}(i)=\sigma^{-1}(i)\\ e_{\sigma^{-1}(i)}=d_{\sigma^{-1}(i)}\end{cases}\iff\begin{cases}\sigma=\tau\\ D=E.\end{cases}\end{aligned}$$

On conclut que φ est injective.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'application }(\sigma,D)\longmapsto M_\sigma D\text{ est une bijection de }\mathfrak{S}_n\times\mathbf{D}_n^{++}\text{ sur }\mathbf{G}_n}$$

II.3. On a, pour tout $(i,j)\in\{1,...,n\}^2$, d'après les calculs précédents : $(M_\sigma D)_{ij}=\delta_{\sigma^{-1}(i),j}d_j$, et :

$$\big(D^{(\sigma)}M_\sigma\big)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(D^{(\sigma)})_{ik}(M_\sigma)_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(D^{(\sigma)})_{ik}\delta_{k,\sigma(j)}=(D^{(\sigma)})_{i,\sigma(j)}=\delta_{i,\sigma(j)}d_{\sigma^{-1}(i)}=\delta_{\sigma^{-1}(i),j}d_j,$$

et on conclut :

$$M_\sigma D=D^{(\sigma)}M_\sigma.$$

II.4. • On a $\mathbf{G}_n\subset\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ car, si $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ et $D\in\mathbf{D}_n^{++}$, alors M_σ est inversible et D est inversible, donc $M_\sigma D$ est inversible.

• $\mathrm{I}_n\in\mathbf{G}_n$, car $\mathrm{I}_n=M_e\mathrm{I}_n$ et $\mathrm{I}_n\in\mathbf{D}_n^{++}$.

• Soient $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n$, $D,\Delta\in\mathbf{D}_n^{++}$. On a :

$$(M_\sigma D)(M_\tau\Delta)=M_\sigma(DM_\sigma)\Delta=M_\sigma(M_\tau D^{(\tau^{-1})})\Delta=(M_\sigma M_\tau)(D^{(\tau^{-1})}\Delta)=M_{\sigma\circ\tau}(D^{(\tau^{-1})}\Delta),$$

et $\sigma\circ\tau\in\mathfrak{S}_n$ et $D^{(\tau^{-1})}\Delta\in\mathbf{D}_n^{++}$. Il en résulte : $(M_\sigma D)(M_\tau\Delta)\in\mathbf{G}_n$.

• Soient $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $D\in\mathbf{D}_n^{++}$. On a :

$$(M_\sigma D)^{-1}=D^{-1}(M_\sigma)^{-1}=D^{-1}M_{\sigma^{-1}}=M_{\sigma^{-1}}(D^{-1})^{(\sigma)}\in\mathbf{G}_n.$$

On conclut :

$$\boxed{\mathbf{G}_n \text{ est un sous-groupe de } \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})}$$

II.5. Supposons quer l'application $\varphi:(\sigma,D)\longmapsto M_\sigma D$ soit un isomorphisme du groupe-produit $\mathfrak{S}_n\times\mathbf{D}_n^{++}$ sur le groupe $\mathbf{G}_n$. On a alors :

$$\forall\,(\sigma,D),\ (\tau,\Delta)\in\mathfrak{S}_n\times\mathbf{D}_n^{++},\ \ \varphi\big((\sigma,D),\,(\tau,\Delta)\big)=\varphi(\sigma,D)\varphi(\tau,\Delta).$$

Mais :

$$\varphi\big((\sigma,D),\,(\tau,\Delta)\big)=\varphi(\sigma,D)\varphi(\tau,\Delta)\iff\varphi(\sigma\circ\tau,D\Delta)=\varphi(\sigma,D)\varphi(\tau,\Delta)$$
$$\iff M_{\sigma\circ\tau}(D\Delta)=(M_\sigma D)(M_\tau\Delta)\iff M_\sigma M_\tau D\Delta=M_\sigma DM_\tau\Delta\iff M_\tau D=DM_\tau.$$

En choisissant : $n=2$, $\quad\sigma=[1,2]=\tau_{1,2}$, $\quad D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, on a :

$$M_\tau D=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad DM_\tau=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix},$$

qui sont différents.

On conclut que, pour n ¿ 2, l'application $(\sigma,D)\longmapsto M_\sigma D$ n'est pas un isomorphisme du groupe-produit $\mathfrak{S}_n\times\mathbf{D}_n^{++}$ sur le groupe $\mathbf{G}_n$.

II.6.a. Le groupe $\mathbf{G}_n$ contient toutes les matrices $\mathrm{diag}\,(a,1,...,1)$, $a\in]0\,;+\infty[$, qui sont deux à deux distinctes et en nombre infini, donc $\mathbf{G}_n$ est infini.

II.6.b. Notons, pour tout $k\in\{1,...,N\}$, D_k la matrice diagonale ayant pour éléments diagonaux les d_r lorsque r est dans le support de c_k, et 1 sinon. On a alors :

$$M_\sigma D=M_{c_1}\cdots M_{c_N}D_1\cdots D_N.$$

Il est clair que les M_{c_k} et les D_l commutent lorsque $k \neq l$. On a donc :

$$M_\sigma D = (M_{c_1} D_1) \cdots (M_{c_N} D_N).$$

De plus, il est clair que les $M_{c_k} D_k$ commutent deux à deux. Il en résulte que le sous-groupe engendré par $M_\sigma D$ est fini si et seulement si, pour tout $k \in \{1, ..., N\}$, le sous-groupe engendré par $M_{c_k} D_k$ est fini.

En notant $\{i_1, ..., i_{p_k}\}$ le support de c_k, $M_{c_k} D_k$ est semblable à $\begin{pmatrix} C_{p_k} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-p_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_k & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-p_k} \end{pmatrix}$,

où $C_{p_k} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et Δ_k est D_k à l'ordre près des termes diagonaux.

On a :

$$(M_{c_k} D_k)^{p_k} = \prod_{r \in \mathrm{Supp}\,(c_k)} d_r \mathrm{I}_n.$$

Si $\displaystyle\prod_{r \in \mathrm{Supp}\,(c_k)} d_r = 1$, alors le sous-groupe engendré par $M_{c_k} D_k$ est fini.

Sinon, ce produit étant > 0, le sous-groupe engendré par $M_{c_k} D_k$ est infini.

On conclut que le sous-groupe engendré par $M_\sigma D$ est fini si et seulement si :

$$\forall\, k \in \{1, ..., N\}, \quad \prod_{r \in \mathrm{Supp}\,(c_k)} d_r = 1.$$

II.6.c. On a :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = M_\sigma D,$$

en notant $\sigma = [1,\, 2,\, 3,\, 4]$ et $D = \mathrm{diag}\,(1,\, 2,\, 3,\, a)$. On a donc : $A(a) \in \mathbf{G}_4$.

D'après 6.b., le sous-groupe de $\mathbf{G}_4$ engendré par $A(a)$ est fini si et seulement si le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a$ est égal à 1. On conclut :

$$\boxed{\text{Le sous-groupe de } \mathbf{G}_4 \text{ engendré par } A(a) \text{ est fini si et seulement si } a = \frac{1}{6}}$$

II.7. Il est clair que $H = \mathfrak{S}_2$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_2$ et que $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} ;\, k \in \mathbb{Z} \right\}$ est un sous-groupe de $\mathbf{D}_2^{++}$.

Notons $E = \big\{ M_\sigma D \,;\, \sigma \in H,\ D \in L \big\}$ et montrons que E n'est pas un sous-groupe de $\mathbf{G}_2$.

Comme $\mathfrak{S}_2 = \{e,\, \tau\}$, où $\tau = [1,\, 2]$, on a :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} ;\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2^k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ;\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Mais :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in E, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in E, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \notin E.$$

On conclut que E n'est pas un sous-groupe de $\mathbf{G}_2$.

II.8. Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $D = \operatorname{diag}(d_1, ..., d_n) \in \mathbf{D}_n^{++}$ telle que : $\forall\, i \in \{1, ..., n\}, \quad d_i < 1$. Notons μ le ppcm des longueurs des cycles de la décompostion de σ en produit de cycles deux à deux disjoints.

On a vu plus haut que $(M_\sigma D)^\mu \in \mathbf{D}_n^{++}$ et que les termes diagonaux de cette matrice sont des produits de μ éléments de la diagonale de D. Il en résulte $\big((M_\sigma D)\big)^{\mu p} \underset{p\infty}{\longrightarrow} 0$.

Puis, comme, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mu p \,\mathbf{6}\, k \,\mathbf{6}\, \mu(p+1)$ (par division euclidienne de k par μ), on a $(M_\sigma D)^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$.

PARTIE III

III.1. *a)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

- A est positive (évident).
- A est symétrique. On a, en notant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$^tXAX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 < 0,$$

donc A n'est pas symétrique positive.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

- A n'est pas positive (évident)
- A est symétrique.

On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

$$^tXAX = 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 3\Big(x^2 - \frac{2}{3}xy + y^2\Big) = 3\Big(\Big(x - \frac{1}{3}y\Big)^2 + \frac{8}{9}y^2\Big) \text{ ¿ } 0,$$

donc A est symétrique positive.

III.2. Les propriétés *a), b), c), d)* sont évidentes en revenant aux éléments, puisque la somme et le produit de deux réels ¿ 0 est ¿ 0.

On a aussi facilement les propriétés suivantes :

a') $\forall\, A \in \mathbf{M}_{n,p}^+, \ \forall\, B \in \mathbf{M}_{n,p}^{++}, \quad A + B \in \mathbf{M}_{n,p}^{++}$

b') $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall\, A \in \mathbf{M}_{n,p}^{++}, \quad \alpha A \in \mathbf{M}_{n,p}^{++}$

c') $\forall\, A \in \mathbf{M}_{n,p}^{++}, \ \forall\, B \in \mathbf{M}_{p,q}^{++}, \quad AB \in \mathbf{M}_{n,q}^{++}$

d') $\forall\, A \in \mathbf{M}_{n,p}^{++}, \quad {}^tA \in \mathbf{M}_{p,n}^{++}$.

III.3. *1)* Soit $A \in \mathbf{M}_{n,p}^{++}$. On a, d'après 2.c. : $\quad \forall\, X \in \mathbf{M}_{p,1}^+, \quad AX \in \mathbf{M}_{n,1}^+$.

2) Réciproquement, soit $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que : $\quad \forall\, X \in \mathbf{M}_{p,1}^+, \quad AX \in \mathbf{M}_{n,1}^+$.

En particulier, en utilisant la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $\quad \forall\, j \in \{1, ..., p\}, \quad A\mathrm{E}_j \in \mathbf{M}_{n,1}^+$.

Et $A\mathrm{E}_j$ est la colonne numéro j de A. Ainsi, toutes les colonnes de A sont à termes ¿ 0, et donc $A \in \mathbf{M}_{n,p}^+$.

III.4. Considérons l'exemple : $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2^+$.

La matrice A est inversible, et $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathbf{M}_2^+$.

Donc, on n'a pas :

$$\forall\, A \in \mathbf{M}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \quad A^{-1} \in \mathbf{M}_n^+.$$

III.5.a. Soit $A \in \mathbf{M}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{-1} \in \mathbf{M}_n^+$.

Notons $A = (a_{ij})_{ij}$, $A^{-1} = (b_{ij})_{ij}$. On a $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$, d'où, pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$:

$$\delta_{i,j} = (\mathrm{I}_n)_{ij} = (AA^{-1})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Soit $i \in \{1, ..., n\}$ fixé. On a :

$$\forall\, j \neq i, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0.$$

Comme tous les $a_{..}$ et $b_{..}$ sont ¿ 0, on déduit :

$$\forall\, j \neq i, \quad \forall\, k \in \{1, ..., n\}, \quad a_{ik} = 0 \;\text{ ou }\; b_{kj} = 0.$$

Supposons qu'il existe deux indices k, k' distincts tels que $a_{ik} \neq 0$ et $a_{ik'} \neq 0$. On a alors :

$$\forall\, j \neq i, \quad b_{kj} = 0 \;\text{ et }\; b_{k'j} = 0.$$

Ainsi, les lignes numéros k et k' de A^{-1} ne comportent qu'un élément non nul (au plus), situé dans la j-ème colonne. Alors, ces deux lignes de A^{-1} sont colinéaires, contradiction avec l'inversibilité de A^{-1}.

Ceci montre qu'il existe au plus un indice k tel que $a_{ik} \neq 0$. Ainsi, dans chaque ligne de A, il y a au plus un élément non nul et un seul. Comme A est inversible, il y en a un et un seul.

Chaque ligne de A contient un élément non nul (> 0) et un seul. Comme A est inversible, ces éléments sont tous situés dans des lignes différentes.

On conclut que chaque ligne et chaque colonne de A contient un terme strictement positif et un seul et tous les autres termes sont nuls.

III.5.b. • Soit $A \in \mathbf{M}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{-1} \in \mathbf{M}_n^+$.

D'après 5.a., chaque ligne et chaque colonne de A contient un terme > 0 et un seul et tous les autres termes sont nuls. Il existe donc $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $D = \mathrm{diag}\,(d_1, ..., d_n) \in \mathbf{D}_n^{++}$ telles que $A = M_\sigma D$, donc $A \in \mathbf{G}_n$.

• Réciproquement, si $A \in \mathbf{G}_n$, alors $A \in \mathbf{M}_n^+$, A est inversible, et $A^{-1} \in \mathbf{M}_n^+$.

On conclut :

$$\boxed{\left\{A \in \mathbf{M}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})\,;\, A^{-1} \in \mathbf{M}_n^+\right\} = \mathbf{G}_n}$$

PARTIE IV

IV.1. *1)* Soit $X \in \mathbf{C}_n$. Notons $X = (x_{ij})_{ij}$. On a :

$$\forall A \in \mathbf{P}_n, \quad AX = XA,$$

c'est-à-dire :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad M_\sigma X = X M_\sigma.$$

On a, pour tout $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$:

$$(M_\sigma X)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (M_\sigma)_{ik} x_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} x_{kj} = x_{\sigma^{-1}(i),j}$$

et

$$(X M_\sigma)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} (M_\sigma)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \delta_{k,\sigma(j)} = x_{i,\sigma(j)}.$$

On a donc :

$$\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2, \quad x_{\sigma^{-1}(i),j} = x_{i,\sigma(j)}.$$

• Soit $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$ tel que $i \neq j$. il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $i = \sigma(j)$, par exemple la transposition qui échange i et j. On déduit alors $x_{jj} = x_{ii}$.

• Soit $(i,j,k) \in \{1,...,n\}^3$ deux à deux distincts. Il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que : $\sigma(i) = i$, $\sigma(j) = k$ et $\sigma(k) = j$, par exemple la transposition qui échange j et k. On déduit alors $x_{ij} = x_{ik}$. Ceci montre que les termes de X hors diagonale, sur une même ligne, sont tous égaux entre eux.

• De même, en utilisant la transposition qui échange i et k, on déduit $x_{kj} = x_{ij}$. Ceci montre que les termes de X hors diagonale, sur une même colonne sont égaux.

Finalement, les termes diagonaux de X sont tous égaux entre eux, et les termes hors diagonale sont tous égaux entre eux.
Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X = A(a,b)$.

2) Réciproquement, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a $A(a,b) = (a-b)\mathrm{I}_n + bU$. De plus, I_n et U commutent avec tout élément de $\mathbf{P}_n$, car :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad U M_\sigma = U \quad \text{et} \quad M_\sigma U = U,$$

donc $A(a,b)$ commute avec tout élément de $\mathbf{P}_n$, $A(a,b) \in \mathbf{C}_n$.

On conclut :

$$\boxed{\mathbf{C}_n = \left\{ A(a,b)\,;\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

IV.2. On a, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $A(a,b) = (a-b)\mathrm{I}_n + bU$, et I_n, U sont dans $\mathbf{C}_n$, donc :

$$\boxed{\mathbf{C}_n \text{ est le sous-espace vectoriel de } \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \text{ engendré par } (\mathrm{I}_n, U)}$$

IV.3. • $\mathbf{C}_n$ est déjà un sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$

• Soient $X, Y \in \mathbf{C}_n$. On a, pour tout $A \in \mathbf{P}_n$:

$$A(XY) = (AX)Y = (XA)Y = X(AY) = X(YA) = (XY)A,$$

donc $XY \in \mathbf{C}_n$.

• La multiplication est commutaive dans $\mathbf{C}_n$ car I_n et U commutent.

• $\mathrm{I}_n \in \mathbf{C}_n$.

On conclut :

$$\boxed{\mathbf{C}_n \text{ est une sous-algèbre commutative et unitaire de } \mathbf{M}_n(\mathbb{R})}$$

IV.4.a. • Puisque $U \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème spectral, U est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

• On forme le polynôme caractéristique de U :

$$\chi_U(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & & \\ (1) & \ddots & (1) \\ & & 1-\lambda \end{vmatrix}_{[n]} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \cdots + L_n}{=} (n-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & & \\ & (1) & \ddots & (1) \\ 1 & & & 1-\lambda \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$\underset{L_i \leftarrow L_i - L_1, i¿2}{=} (n-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}_{[n]} = (n-\lambda)(-\lambda)^{n-1} = (-1)^n \lambda^{n-1}(\lambda - n).$$

On conclut :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } U \text{ sont : } 0 \text{ d'ordre } n-1,\ \ n \text{ d'ordre } 1}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}\,(U, n) \iff \begin{cases} x_1 + \ldots + x_n = n x_1 \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_n = n x_n \end{cases} \iff x_1 = ... = x_n.$$

Ainsi, $\mathrm{SEP}\,(U, n)$ admet pour base (V_1) où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

• $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}\,(U, 0) \iff x_1 + \cdots + x_n = 0.$

Ainsi, $\mathrm{SEP}\,(U, 0)$ est de dimension $n-1$ et admet pour base, par exemple, $(V_2, ..., V_n)$ où :

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

IV.4.b. D'après 4.a., il existe $D = \mathrm{diag}\,(n, 0, ..., 0)$, $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que : $U = PDP^{-1}$.
On a alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$A(a,b) = (a-b)\mathrm{I}_n + bU = P\big((a-b)\mathrm{I}_n + bD\big)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}\,\big((a+(n-1)b,\ a-b,\ \ldots, a-b\big)P^{-1}.$$

On conclut :

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A(a,b)) = \big\{a+(n-1)b,\ a-b\big\}}$$

IV.5.a. D'après la question préliminaire, puisque $A(a,b)$ est symétrique réelle, on a :

$$A(a,b) \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\big(A(a,b)\big) \subset \mathbb{R}_+^* \iff \begin{cases} a+(n-1)b > 0 \\ a-b > 0 \end{cases}.$$

IV.5.b.

Un schéma ici

IV.6. Tout simplement, on reconnaît U.

PARTIE V

V.1. Puisque $S(a,b)$ est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, $S(a,b)$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

V.2.a. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$. Notons aussi $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$. On a :

$$S(a,b)X = \lambda X \iff \begin{pmatrix} a & b & \ldots & \ldots & b \\ b & a & & (b) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & (b) & & a & b \\ b & \ldots & \ldots & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 = \lambda x_1 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 = \lambda x_2 \\ \qquad \vdots \\ bx_{n-2} + ax_{n-1} + bx_n = \lambda x_{n-1} \\ bx_{n-1} + ax_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} (a-\lambda)x_1 + bx_2 = 0 \\ bx_1 + (a-\lambda)x_2 + bx_3 = 0 \\ \qquad \vdots \\ bx_{n-2} + (a-\lambda)x_{n-1} + bx_n = 0 \\ bx_{n-1} + (a-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

$$\iff \forall\, k \in \{1, ..., n\},\quad bx_{k-1} + (a-\lambda)x_k + bx_{k+1} = 0.$$

V.2.b. La suite $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ est récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique est $br^2 + (a-\lambda)r + b = 0$, de dicriminant $\Delta = (a-\lambda)^2 - 4b^2$.

• Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une solution double $r_0 = \dfrac{\lambda - a}{b}$, et $r_0 \neq 0$ (sinon, $\lambda = a$, $br^2 + b = 0$, $b = 0$ exclu). Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall\, k \in \{0, ..., n+1\}, \quad x_k = \alpha r_0^k + \beta k r_0^{k-1}.$$

Comme $x_0 = x_{n+1} = 0$, on déduit $\alpha = 0$ puis $\beta = 0$, donc $X = 0$, exclu.

• On a donc nécessairement $\Delta \neq 0$. L'équation caractéristique admet deux solutions distinctes, notées r_1 et r_2 (car la matrice est diagonalisable). Il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall\, k \in \{0, ..., n+1\}, \quad x_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k.$$

On a :

$$x_0 = x_{n+1} = 0 \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 r_1^{n+1} + \alpha_2 r_2^{n+1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_1 \\ \alpha_1 (r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = 0. \end{cases}$$

Si $\alpha_1 = 0$, alors $\alpha_2 = 0$, $X = 0$, exclu.
On a donc $\alpha_1 \neq 0$, puis $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$.
Il existe donc $p \in \{1, ..., n\}$, tel que $r_2 = r_1\, \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}p\pi}{n+1}}$.
D'autre part, on a $r_1 r_2 = 1$, donc $r_2^2 = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}p\pi}{n+1}}$, puis, à l'odre près, $r_1 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n+1}}$, $r_2 = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}p\pi}{n+1}}$.
De plus, $r_1 + r_2 = -\dfrac{a-\lambda}{b}$, donc : $\quad \lambda = a + b(r_1 + r_2) = a + 2b\cos\dfrac{p\pi}{n+1}$.
Notons, pour tout $p \in \{1, ...n\}$, $\lambda_p = a + 2b\cos\dfrac{p\pi}{n+1}$. Comme $b \neq 0$ et que cos est strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$, les n nombres réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont deux à deux distincts. Ceci montre que A admet au moins n valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ deux à deux distinctes. Comme $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on a alors toutes les valeurs propres.

On conclut :

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\big(S(a,b)\big) = \left\{a + 2b\cos\frac{p\pi}{n+1}\ ;\ p \in \{1, ..., n\}\right\}}$$

• On a, pour tout $p \in \{1, ..., n\}$ un vecteur propre associé, donné par :

$$x_k = \alpha_1 (r_1^k - r_2^k) = \alpha_1 \big(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}kp\pi}{n+1}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}kp\pi}{n+1}}\big) = 2\alpha_1 \mathrm{i} \sin\frac{kp\pi}{n+1},$$

d'où un vecteur propre formant base du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_p : $\begin{pmatrix} \sin\dfrac{p\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \sin\dfrac{np\pi}{n+1} \end{pmatrix}$.

V.3.a. D'après le Cours, on sait que $\sin(n+1)\theta$ est le produit de $\sin\theta$ par un polynôme en $\cos\theta$, d'où l'existence de U_n. De plus, U_n est unique car U_n est de degré n et donné en une infinité de points.

V.3.b. D'après 2.b. :

$$\chi_{S(a,b)}(\lambda) = (-1)^n \prod_{p=1}^{n} (\lambda - \lambda_p) = (-1)^n \prod_{p=1}^{n} \Big(\lambda - a - 2b\cos\frac{p\pi}{n+1}\Big).$$

D'autre part, pour tout $t \in]-1\,;1[$:

$$U_n(t) = 0 \iff \sin\big((n+1)\text{Arccos}\, t\big) = 0 \iff (n+1)\text{Arccos}\, t \equiv 0 \ \ [\pi]$$

$$\iff \text{Arccos}\, t \equiv 0 \ \Big[\frac{\pi}{n+1}\Big] \iff \text{Arccos}\, t = \frac{p\pi}{n+1},\ p \in \{1,...,n\} \iff t = \cos\frac{p\pi}{n+1},\ p \in \{1,...,n\}.$$

Et le coefficient dominant de U_n est 2^n. On a donc :

$$U_n(t) = 2^n \prod_{p=1}^{n} \Big(t - \cos\frac{p\pi}{n+1}\Big).$$

d'où :

$$\chi_{S(a,b)}(\lambda) = (-1)^n (2b)^n \prod_{p=1}^{n} \Big(\frac{\lambda - a}{2b} - \cos\frac{p\pi}{n+1}\Big).$$

On conclut :

$$\boxed{\chi_{S(a,b)}(\lambda) = (-1)^n b^n U_n\Big(\frac{\lambda - a}{2b}\Big)}$$

V.4.a. Puisque $S(a,b)$ est symétrique réelle, d'après la question préliminaire :

$$S(a,b) \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \text{Sp}_{\mathbb{R}}\big(S(a,b)\big) \subset \mathbb{R}_+^*$$

$$\iff \forall\, p \in \{1,...,n\},\ \ a + 2b\cos\frac{p\pi}{n+1} > 0 \iff a - 2b\cos\frac{\pi}{n+1} > 0.$$

V.4.b.

Un schéma ici

* *