Lycée La Martinière Monplaisir

Jean-Marie Monier

Agrégation interne de Mathématiques 2006-2007

Épreuve du samedi 25 novembre 2006

Si un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) la signale sur sa copie et devra poursuivre sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il (elle) est amené(e) à prendre.

PARTIE I : Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad xy'' + y' + xy = 0,$$

d'inconnue y, deux fois dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1.a. Déterminer toutes les solutions de (E) développables en série entière en 0 et démontrer que l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière en 0 est la droite vectorielle engendrée par J, où J est définie par :

$$J : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

1.b. Montrer que J est paire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Calculer $J(0)$, $J'(0)$, $J''(0)$ et tracer l'allure de la courbe représentative de J au voisinage de 0.

1.c. Montrer : $\forall\, x \in [0\,;2], \quad 0 \leqslant J(x) \leqslant 1.$

Calculer des valeurs approchées à 10^{-1} près de $J(1)$, $J(2)$, $J(3)$. Que peut -on en déduire ?

1.d. Montrer que $J^2 + J'^2$ est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer : $\mathrm{H}_n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$.

3. Soit K $:]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$; on considère l'application H $:]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[, \quad H(x) = (\ln x) J(x) + K(x).$$

3.a. Montrer que H est solution de (E) sur $]0\,;+\infty[$ si et seulement si K est solution, sur $]0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle :

$$\text{(F)} \qquad xy'' + y' + xy = -2J'.$$

3.b. Déterminer toutes les solutions de (F) développables en série entière en 0.

3.c. En déduire que l'application

$$H :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto H(x) = (\ln x)J(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\mathrm{H}_n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$$

est solution de (E) sur $]0\,;+\infty[$.

3.d. Démontrer que la famille (J, H) est libre dans $\mathbb{R}^{]0\,;+\infty[}$.

3.e. En déduire la solution générale de (E) sur $]0\,;+\infty[$.

4.a. Démontrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{C}_n^k)^2 = \mathrm{C}_{2n}^n.$$

4.b. En déduire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (J(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^4}x^{2n}.$$

PARTIE II : Expression intégrale de J

1. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}t.$$

1.a. Montrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 2(n+1)W_{n+1} = (2n+1)W_n.$$

1.b. En déduire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

2. Démontrer :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Établir :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad J^{(k)}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k t \cos\Big(x \sin t + k\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}t.$$

4. Montrer que J est strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$ et que J est concave sur $\Big[0\,;\dfrac{\pi}{2}\Big]$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de J sur $\Big[0\,;\dfrac{\pi}{2}\Big]$.

5. Montrer :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad |J^{(k)}(x)| \leqslant 1.$$

6.a. Montrer, pour toute application $\varphi : [0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et intégrable sur $[0\,;1[$:

$$\int_0^1 \cos(xu)\varphi(u)\,\mathrm{d}u \underset{x \,\longrightarrow\, +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \sin(xu)\varphi(u)\,\mathrm{d}u \underset{x \,\longrightarrow\, +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6.b. En déduire :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\quad J^{(k)}(x) \underset{x \,\longrightarrow\, +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

PARTIE III : Transformée de Laplace de J

1.a. Établir que, pour tout $p \in]0\,;+\infty[$, l'application $x \longmapsto J(x)\mathrm{e}^{-px}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

On note :

$$L :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad p \longmapsto L(p) = \int_0^{+\infty} J(x)\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x,$$

la transformée de Laplace de J.

1.b. Montrer :

$$\forall\, p \in]0\,;+\infty[,\quad L(p) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{+\infty} \cos(x\sin t)\,\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t.$$

2.a. Calculer, pour tout $(p,x) \in]0\,;+\infty[\times[0\,;+\infty[$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x\sin t)\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x$.

2.b. En déduire :

$$\forall\, p \in]0\,;+\infty[,\quad L(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

PARTIE IV : Étude élémentaire des zéros de J

On note :

$$G :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto G(x) = \sqrt{x}\,J(x).$$

1. Montrer que G est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\quad G''(x) + \Big(1 + \frac{1}{4x^2}\Big)G(x) = 0.$$

2. Montrer que les zéros de J dans $]0\,;+\infty[$ sont isolés, c'est-à-dire que, pour tout zéro z_0 de J dans $]0\,;+\infty[$, il existe $\alpha > 0$ tel que J ne s'annule en aucun point de l'ensemble $(]z_0-\alpha\,;z_0+\alpha[-\{z_0\})\cap\,]0\,;+\infty[$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note $I_k = [k\pi\,;(k+1)\pi]$.
On suppose que J ne s'annule en aucun point de l'intérieur I_k° de I_k.

3.a. Montrer que G est de signe strict fixe sur I_k°.

On note :

$$W :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto W(x) = (\sin x)G'(x) - (\cos x)G(x).$$

3.b. Montrer que W est monotone sur I_k. Calculer $W(k\pi)$ et $W((k+1)\pi)$ et en déduire que W est nulle sur l'intervalle I_k.

3.c. En déduire une contradiction et conclure que J admet au moins un zéro dans l'intérieur de I_k.

4. Établir que les zéros de J forment une suite $(z_k)_{k\geqslant 1}$ strictement croissante et de limite $+\infty$.

5. En admettant que $z_{k+1} - z_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} \pi$, et au vu de tous les résultats précédents, tracer l'allure de la courbe représentative de J sur $[0\,;+\infty[$ et l'allure de la courbe représentative de $x \longmapsto (J(x))^2$ sur $[0\,;+\infty[$.

$* - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - *$