Lycée La Martinière Monplaisir

Jean-Marie Monier

Agrégation interne de Mathématiques 2006-2007

Épreuve du samedi 13 janvier 2007

Si un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale sur sa copie et devra poursuivre sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il (elle) est amené(e) à prendre.

NOTATIONS

On note :

- K est un corps commutatif, 0 le neutre de l'addition, 1 le neutre de la multiplication
- n un entier naturel supérieur ou égal à 2
- $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de K^n
- $\mathbf{M}_n(K)$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K
- $\mathbf{GL}_n(K)$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles de $\mathbf{M}_n(K)$
- ${}^{\mathrm{t}}M$ la transposée d'une matrice M
- M^* la transconjuguée d'une matrice M à coefficients complexes, $M^* = {}^{\mathrm{t}}\overline{M}$
- $\mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la matrice diagonale de $\mathbf{M}_n(K)$ ayant sur sa diagonale, dans cet ordre, $\lambda_1, ..., \lambda_n$
- $\mathrm{diag}\,(A_1, ..., A_p)$ la matrice diagonale par blocs ayant sur sa diagonale, dans cet ordre, les matrices carrées $A_1, ...A_p$
- E un K-espace vectoriel de dimension finie
- $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ le sous-espace vectoriel engendré par une famille $\mathcal{F}$
- $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E
- Id_E l'endomorphisme identité de E
- 0 l'élément nul de K ou une matrice nulle ou un endomorphisme nul
- $\mathrm{rg}\,(f)$ le rang d'un endomorphisme f de E
- I_n la matrice carrée identité d'ordre n à coefficients dans K

- $\mathrm{Sp}_K(f)$ le spectre de f, pour $f \in \mathcal{L}(E)$
- $\mathrm{SEP}\,(f, \lambda)$ le sous-espace propre de l'endomorphisme f pour la valeur propre λ de f, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$
- $\mathrm{Sp}_K(A)$ le spectre de la matrice carrée A de $\mathbf{M}_n(K)$
- $\rho(A)$ le rayon spectral de $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire $\rho(A) = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)}{\mathrm{Max}} |\lambda|$
- e^M l'exponentielle de la matrice carrée M de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$
- $\sim$ la similitude des matrices carrées, définie pour $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$ par :

$$A \sim B \iff \exists\, P \in \mathbf{GL}_n(K), \quad B = PAP^{-1}$$

- χ_f le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f de E
- χ_A le polynôme caractéristique de la matrice carrée A de $\mathbf{M}_n(K)$
- π_f le polynôme minimal de l'endomorphisme f
- π_A le polynôme minimal de la matrice carrée A de $\mathbf{M}_n(K)$
- $\mathrm{SEC}\,(f, \lambda)$ le sous-espace caractéristique de l'endomorphisme f pour la valeur propre λ de f, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\,((f - \lambda \mathrm{Id}_E)^\mu)$, où μ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ dans le polynôme minimal π_f de f
- $J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_k(K)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$
- $J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_k(K)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in K$.

Un endomorphisme ν de E est dit **nilpotent** si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\nu^k = 0$. Si ν est un endomorphisme nilpotent de E, on appelle **indice de nilpotence** de ν le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $\nu^k = 0$.

Une matrice carrée A de $\mathbf{M}_n(K)$ est dite **nilpotente** si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$. Si A est une matrice carrée nilpotente, on appelle **indice de nilpotence** de A le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $A^k = 0$.

Tous les calculs matriciels devront figurer sur la copie.

PARTIE I : ÉTUDE DE LA MATRICE J

On note ici $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$ et ν l'endomorphisme de K^n représenté par J dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de K^n.

1.a. Exprimer $\nu(e_i)$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

1.b. Déterminer $\operatorname{Ker}(\nu)$, $\operatorname{Im}(\nu)$, $\operatorname{rg}(\nu)$.

2. Calculer χ_J.

3.a. Déterminer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
En particulier, montrer : $J^{n-1} \neq 0$ et $J^n = 0$. Que dire alors de J ?
Préciser, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le noyau et l'image de ν^k.
Établir que la famille $(\mathrm{I}_n, J, J^2, ..., J^{n-1})$ est libre.
Calculer π_J.

3.b. Établir que, pour tout $q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, l'équation $M^q = J$, d'inconnue $M \in \mathbf{M}_n(K)$, n'a aucune solution.

3.c. Montrer que, pour $n = 3$, l'équation $M + M^2 = J$, d'inconnue $M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, admet au moins une solution.

4. Pour toute partie $\mathcal{M}$ de $\mathbf{M}_n(K)$, on note $\mathrm{C}(\mathcal{M})$ le commutant de $\mathcal{M}$ dans $\mathbf{M}_n(K)$, défini par :

$$\mathrm{C}(\mathcal{M}) = \{A \in \mathbf{M}_n(K)\,;\, \forall\, M \in \mathcal{M},\quad AM = MA\},$$

et, pour toute $M \in \mathbf{M}_n(K)$, on note $\mathrm{C}(M)$ à la place de $\mathrm{C}(\{M\})$.

4.a. Montrer : $\mathrm{C}(J) = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n, J, ..., J^{n-1})$.

4.b. Préciser $\mathrm{C}(\mathrm{C}(J))$.

4.c. A-t-on $\mathrm{C}(J^2) = \mathrm{C}(J)$?

5. On se propose de déterminer tous les sous-espaces vectoriels de K^n stables par ν.
On note, pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$: $F_i = \operatorname{Vect}((e_k)_{1 \leqslant k \leqslant i})$. Ainsi :

$$F_0 = \operatorname{Vect}(\varnothing) = \{0\}, \quad F_1 = \operatorname{Vect}(e_1), \quad F_2 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2), \quad \dots, \quad F_n = \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_n).$$

5.a. Montrer que, pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, F_i est stable par ν.

5.b. Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de K^n stable par ν, tel que $F \neq \{0\}$.

1) Montrer que l'ensemble $\{i \in \{1, ..., n\}\,;\, e_i \in F\}$ n'est pas vide. On note k son plus grand élément.

2) Établir : $\operatorname{Ker}(\nu^k) = F$.

5.c. Conclure.

6.a. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & (0) & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & (0) & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$. Montrer : $P^2 = \mathrm{I}_n$ et $PJ = {}^{\mathrm{t}}JP$.

6.b. En déduire : ${}^{\mathrm{t}}J \sim J$.

7. Soit $(a_1, ..., a_{n-1}) \in (K - \{0\})^{n-1}$. On note $L = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$ et

$Q = \operatorname{diag}(a_1 a_2 \cdots a_{n-1},\ a_2 \cdots a_{n-1}, ..., a_{n-2}a_{n-1},\ a_{n-1},\ 1)$.

7.a. Montrer : $Q \in \mathbf{GL}_n(K)$ et $QJ = LQ$.

7.b. En déduire : $L \sim J$.

7.c. *1)* Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ sont-elles semblables ?

2) Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ sont-elles semblables ?

8.a. Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $a_0, ..., a_N \in K$, $P = \sum_{k=0}^{N} a_k \mathrm{X}^k \in K[\mathrm{X}]$.

Exprimer $P(J)$ sous forme de tableau.

8.b. Lorsque $K = \mathbb{C}$, exprimer e^J sous forme de tableau.

PARTIE II : Matrices carrées nilpotentes

A : Structure des endomorphismes nilpotents

On admet le résultat suivant :

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, ν un endomorphisme nilpotent de E autre que 0, N l'indice de nilpotence de ν.
Il existe une matrice et une seule représentant ν et diagonale par blocs de la forme :

$$J = \mathrm{diag}\,(J_N, ..., J_N, J_{N-1}, ..., J_{N-1}, ..., J_1, ..., J_1),$$

où, pour tout $k \in \{1, ..., N\}$, J_k est présent γ_k fois, γ_k étant un entier naturel.

La matrice J ci-dessus n'est donc pas la même que celle qui intervenait dans la partie I.

1. Exprimer, sous forme de matrices diagonales par blocs, les matrices J, J^2, $J^3, ..., J^{N-1}$, J^N.

2. Montrer, pour tout $k \in \{1, ..., N\}$:

$$\mathrm{rg}\,(\nu^k) = \sum_{i=k+1}^{N} (i-k)\gamma_i.$$

B : Exemples

1. On note ici $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.
Vérifier que O, J, A, B sont nilpotentes, que A et B sont semblables, et que O, J, A sont deux à deux non semblables.

2. Combien y a-t-il de classes de similitude pour les matrices nilpotentes de $\mathbf{M}_6(\mathbb{R})$?

3. On note ici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

3.a. Calculer A^4.

3.b. On note $u_4 = e_4$, $u_3 = f(e_4)$, $u_2 = f^2(e_4)$, $u_1 = f^3(e_4)$.
Vérifier que $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, préciser la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{U}$ et calculer P^{-1}.
En notant ici $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer : $A = PJP^{-1}$.

4. On note ici $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par B dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

4.a. Calculer B^2.

4.b. On note $v_1 = g(e_1)$, $v_2 = e_1$, $v_3 = g(e_2)$, $v_4 = e_2$.
Vérifier que $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, préciser la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{V}$ et calculer Q^{-1} (tous les calculs doivent figurer sur la copie).
Calculer $g(v_i)$ pour tout $i \in \{1, ..., 4\}$.
En notant ici $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$, montrer : $B = QKQ^{-1}$.

PARTIE III : Réduction de Jordan

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim(E)$. On note $\{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ le spectre de f. On suppose que le polynôme minimal π_f de f est scindé sur K. On note, pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, μ_i l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i dans le polynôme minimal π_f de f, et C_i le sous-espace caractéristique de f pour la valeur propre λ_i, défini par : $C_i = \mathrm{SEC}(f, \lambda_i) = \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\mu_i}\right)$.

1. Soit $i \in \{1, ..., p\}$.

1.a. Montrer que C_i est stable par f.

On note f_i l'endomorphisme de C_i induit par f et on note $\nu_i = f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{C_i}$.

1.b. Montrer que ν_i est nilpotent et que son indice de nilpotence est μ_i.

1.c. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{U}_i$ de C_i dans laquelle ν_i est représenté par une matrice diagonale par blocs de la forme $\mathrm{diag}(J_{\mu_i}, ..., J_{\mu_i}, ..., J_1, ..., J_1)$.

1.d. Montrer que la matrice de f_i dans $\mathcal{U}_i$ est diagonale par blocs de la forme

$$\mathrm{diag}\left(J_{\mu_i}(\lambda_i), ..., J_{\mu_i}(\lambda_i), ..., J_1(\lambda_i), ..., J_1(\lambda_i)\right).$$

2. Établir : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} C_i$.

3. En déduire que la famille $\mathcal{U}$, obtenue en réunissant les familles $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_p$ dans l'ordre, est une base de E, et exprimer la matrice de f dans $\mathcal{U}$, appelée **réduite de Jordan** de f.

On admet qu'il y a unicité d'une réduite de Jordan de f, à l'ordre près des blocs de Jordan.

Pour $A \in \mathbf{M}_n(K)$ telle que χ_A soit scindé sur K, on appelle **réduite de Jordan** de A la réduite de Jordan d'un endomorphisme représenté par A. On admet qu'il y a unicité d'une réduite de Jordan de A, à l'ordre près des blocs de Jordan.

4. Soient $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que χ_A ou χ_B soit scindé sur K. Démontrer que, pour que A et B soient semblables, il faut et il suffit que A et B admettent la même réduite de Jordan, à l'ordre près des blocs de Jordan.

5. Calculer la réduite de Jordan de $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_5(\mathbb{R})$.

PARTIE IV : Quelques applications de la réduction de Jordan

1. Établir : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad {}^{\mathrm{t}}A \sim A$.

2.a. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_p(K)$, $B \in \mathbf{M}_q(K)$ telles que χ_A et χ_B soient scindés sur K, J_A (resp. J_B) la réduite de Jordan de A (resp. B). Montrer que la réduite de Jordan de $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix}$ à l'ordre près des blocs de Jordan.

2.b. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $A, A' \in \mathbf{M}_p(K)$, $B, C \in \mathbf{M}_q(K)$ telles que χ_A et χ_B soient scindés sur K. On suppose $A \sim A'$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Démontrer : $B \sim C$.

3.a. Calculer, pour tout $(\lambda, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$, $\left(J_n(\lambda)\right)^k$.

3.b. En déduire, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\left(J_n(\lambda)\right)^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0 \iff |\lambda| < 1.$$

3.c. Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer :

$$A^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \rho(A) < 1.$$

$* - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - *$