Problème 1.Notations : On note $M_i(F) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |F^{(i)}(t)|$ pour toute fonction F définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dérivable i fois, quand ce nombre existe. On notera M_i à la place de $M_i(F)$ quand il n' y a pas ambiguité. E est l'ensemble $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Partie I : Inégalités dans E

1.a. On suppose que $F \in$ E, mais à valeurs réelles et que F et F" sont bornées.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 : |F'(x)| \leq \dfrac{tM_2}{2} + \dfrac{M_0}{t}$. (On pourra utiliser l' inégalité de Taylor Lagrange aux fonctions $F(x+t)$ et $F(x-t)$.) En déduire (1) : $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

(mise en garde : on ne confondra pas cette inégalité avec une autre plus connue : $M_1^2 \leq 4M_0M_2$; elle en est proche, mais moins fine.)

1.b. Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $F'(t_0) \neq 0$, on pose $g = \mathrm{Re}\dfrac{F}{F'(t_0)}$ Utiliser 1.a. à cette fonction pour établir que (1) est vraie si F est à valeurs complexes.

2. Définition de suites de fonctions : $\forall n > 0$, on définit la fonction g_n, impaire, 2-périodique telle que :

$$g_n(x) = 2nx \text{ , si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}\,;$$
$$g_n(x) = 1 \text{ , si } \frac{1}{2n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{2n}\,;$$
$$g_n(x) = 2n - 2nx \text{ , si } 1 - \frac{1}{2n} \leq x \leq 1\,;$$
$$h_n(t) = \int_{\frac{1}{2}}^{t} g_n(s)\,\mathrm{d}s \text{ et } F_n(x) = \int_0^x h_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

2.a. Rechercher des propriétés de période et de symétrie pour g_n et h_n et montrer que F_n est 2-périodique.
2.b. Calculer $M_0(F_n)$, $M_1(F_n)$, $M_2(F_n)$ et en déduire que le nombre 2 est le plus petit réel $\alpha > 0$ tel que $M_1^2 \leq \alpha M_0 M_2$ soit réalisée pour toute fonction $f \in$E, avec F, F'' bornées.

Partie II Eléments de topologie

On dira dans cette partie qu'un compact non vide K de $\mathbb{C}$ est admissible s'il existe $F \in$ E, non constante, à dérivée seconde bornée et $F(\mathbb{R}) \subset K$. $\mathcal{A}(K)$ est l'ensemble des fonctions de E vérifiant ces propriétés.
1.a. En exhibant une fonction convenable, montrer que tout compact d'intérieur non vide est admissible.
1.b. Montrer que $U = \{z \in \mathbb{C}\,/ |z| = 1\}$ est admisible.
1.c. Donner l'exemple d'un compact de $\mathbb{C}$, non réduit à un point qui soit non admissible.

2. Soit K admissible et $F \in \mathcal{A}(K)$. Montrer que F' est bornée et que le nombre $\phi(F) = \dfrac{M_1}{\sqrt{M_2}}$ existe.

On pose $\mathcal{L}(K) = \sup\limits_{F\in\mathcal{A}(K)} \phi(F)$, à priori fini ou non.

3. Soit K' et K'' deux compacts admissibles tels que $K' \subset K''$. Comparer $\mathcal{L}(K')$ et $\mathcal{L}(K'')$.

4. On suppose que K est un segment [a,b] de longueur l=b-a.
4.a.En remarquant que si $F \in \mathcal{A}(K)$, on peut écrire $F(x) = \dfrac{a+b}{2} + G(x)$, montrer que $\mathcal{L}(K) \leq l$.
4.b. Montrer $\mathcal{L}(K) \geq l$ en utilisant une suite $g_n = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}\dfrac{F_n}{M_0(F_n)}$ avec F_n bien choisie.

5. Soit D_R le disque fermé de rayon R. Calculer $\mathcal{L}(D_R)$.

6. Montrer que si K est admissible, $\mathcal{L}(K)$ est fini.

7. Soit $g \in$ E telle que $\forall t \in \mathbb{R}, |g(t)| = 1, g''$ bornée , $M_2(g) \leq 1$; montrer que $M_1(g) \leq 1$.
Calculer $\mathcal{L}(C_R)$ où $C_R = \{z \in \mathbb{C}\,/ |z| = R\}$

exercice 1 guidé de remise en forme sur les séries entières.

(a_n) est une suite complexe et x un réel. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence 1 et on appelle f la somme de la série. On fait l'hypothèse que $l = \lim\limits_{x \to 1-} f(x)$ existe.

1. Donner un exemple où $\sum a_n$ converge et un exemple où elle diverge.

2. Dans cette question seulement, $\forall n, a_n \geq 0$. Montrer que $\sum a_n$ converge et que $l = \sum a_n$.

3. On suppose que $a_n = o(\frac{1}{n})$ et on veut montrer le résultat de 2.

Ecrivons : $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k - f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(1-x^k) - \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$. Soit $x \in [0,1[$.

3.a.Montrer que $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$ vérifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |R_n(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{(n+1)(1-x)}$.

3.b. On note $K_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(1-x^k)$. Montrer qu'on peut choisir $x_n \in [0,1[$ tel que $(n+1)(1-x_n) = 1$.

Montrer que $|K_n(x_n)| \leq \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} |k a_k|$. Conclure.

exercice 2 guidé de remise en forme sur les séries de Fourier.

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), 2\pi$- périodique ; on note $s_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ et l'on constate que $s_n(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k(u-x)) f(u)\,\mathrm{d}u$ en utilisant la définition des coefficients de Fourier.

1. Vérifier $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos k(u-x) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(u-x)}{2\sin(\frac{u-x}{2})} - \dfrac{1}{2}$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $s_n(x) \leq \dfrac{1}{\pi} \|f\|_\infty \displaystyle\int_0^{\pi} |\frac{\sin((n+\frac{1}{2})v)}{2\sin(\frac{v}{2})}|\,\mathrm{d}v$.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} |\frac{\sin((n+\frac{1}{2})v)}{2\sin(\frac{v}{2})}|\,\mathrm{d}v \leq \pi \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u$.

4. En déduire $\|s_n\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \ln(n)$.

5. On rappelle le th de Weierstass trigonométrique :Pour toute $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|P - f\|_\infty \leq \varepsilon$. En s'intéréssant à $s_n - P$, établir $\|s_n\|_\infty = o(\ln(n))$.