Ag.int.17/01/07.GC.

Partie 1. Etude de la fonction Gamma.

Soit U l'ouvert de $\mathbb{C}$ constitué des complexes $z = x + \text{ß}y$ tels $x > 0$.
On définit pour $z \in \mathrm{U}$, $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t$.
Réviser les propriétés de $\Gamma(x)$ quand x est réel > 0. (*convergence,* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, *continuité, dérivabilité,...*).

1. Définition et équation fonctionnelle de Γ.

1.a. Justifier l'existence de Γ pour tout $z = x + \text{ß}y \in \mathrm{U}$ et montrer : $|\Gamma(z)| \leq \Gamma(x)$.

1.b. Prouver que pour tout $z = x + \text{ß}y \in \mathrm{U}$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

2. Montrer que Γ est continue sur U. (indication : utiliser $0 < c < x < d$ et appliquer le théorème de continuité sous le signe somme, valable quand le paramètre est complexe).

3. On suppose que x est réel > 0.
3.a. Ecrire $\Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$ sous forme intégrale. (*sans dém.*) Prouver que $\forall x > 0$, $(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$. (On utilisera Cauchy- Schwarz dans l'expression de $\Gamma'(x)$).
3.b. Montrer que $\Psi = \ln \Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.Application.x est encore réel > 0.

4.a. Soit $\delta \in]0,1]$. Prouver que, pour $x > 1$, $\Psi(x) - \Psi(x-1) \leq \dfrac{1}{\delta}[\Psi(x+\delta) - \Psi(x)] \leq \Psi(x+1) - \Psi(x)$.
4.b. Montrer que $\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} \sim x^\delta$ quand $x \to +\infty$.
4.c. Montrer que le résultat de 4.b. est valable pour tout $\delta > 0$. (Ecrire $\delta = k + \delta'$ où k est un entier, $\delta' \in]0,1]$ et appliquer 1.b.).

Partie 2. Etude de la fonction Beta.

On note V= UxU. On définit pour $(p,q) \in V, \mathrm{B}(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Définition et équation fonctionnelle de B.

Soit $(p,q) \in V$ et $p' = \mathrm{Re}(p)$, $q' = \mathrm{Re}(q)$.
1.a. Montrer l'existence de $\mathrm{B}(p,q)$ et montrer $|\mathrm{B}(p,q)| \leq \mathrm{B}(p',q')$.
1.b. Prouver que $\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$.

1.c. Montrer que $\mathrm{B}(p+1,q) = \dfrac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$ et en déduire $\mathrm{B}(p+1,q+1) = \dfrac{pq}{(p+q)(p+q+1)}\mathrm{B}(p,q)$.

2. Relation entre Gamma et Beta.

On veut montrer la relation $(\mathcal{R}) : \forall (p,q) \in V\,, \Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)$.
2.a. Montrer qu'il suffit d'établir la relation $(\mathcal{R})$ pour $p' > 1$ et $q' > 1$.
On suppose dans la suite cette condition satisfaite et les fonctions $x \to x^{p-1}, y \to y^{q-1}$ sont alors prolongées par continuité en 0.
2.b.Soit $b > 0$ et $K_b = [0,b]^2$. On pose pour tout z tel que $x > 1$, $\Gamma_b(z) = \displaystyle\int_0^b \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t$.
Prouver que $\Gamma_b(p)\Gamma_b(q) = \displaystyle\int\int_{K_b} \mathrm{e}^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2.c. On définit $\phi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (u,v) = (x+y,x)$. Quelle est l'image Q_b de K_b par ϕ? Faire une figure.

2.d. Montrer : $\displaystyle\int\int_{K_b} \mathrm{e}^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_{Q_b} \mathrm{e}^{-u}v^{p-1}(u-v)^{q-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$

2.e. Soit T_b le triangle constitué des points de $\mathbb{R}^2$ tels que $0 \leq v \leq u \leq b$. Placer sur la figure Q_b, T_b, T_{2b}.

2.f. Montrer que , pour tout $u \in [0,b]$, $\displaystyle\int_0^u v^{p-1}(u-v)^{q-1}\,\mathrm{d}v = u^{p+q-1}\mathrm{B}(p,q)$.
En déduire $\int\int_{T_b} \mathrm{e}^{-u}v^{p-1}(u-v)^{q-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \Gamma_b(p+q)\mathrm{B}(p,q)$.

2.g. On suppose p, q réels, $p > 1$, $q > 1$. Montrer que $\Gamma_b(p+q)\mathrm{B}(p,q) \leq \Gamma_b(p)\Gamma_b(q) \leq \Gamma_{2b}(p+q)\mathrm{B}(p,q)$.
En déduire la relation $(\mathcal{R})$ quand p, q sont réels.

2.h. On suppose p, q complexes tels que $p' > 1, q' > 1$. établir que pour tout $b > 0$:
$|\Gamma_b(p)\Gamma_b(q) - \Gamma_b(p+q)\mathrm{B}(p,q)| \leq |\Gamma_{2b}(p'+q') - \Gamma_b(p'+q')|\mathrm{B}(p',q')$.
Pour cela , on montrera que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^2$ et à valeurs complexes,
$\displaystyle|\int\int_{Q_b} f - \int\int_{T_b} f| \leq \int\int_{T_{2b}} |f| - \int\int_{T_b} |f|.$
En déduire la relation $(\mathcal{R})$ dans le cas général.

3. Zéros de Γ. On suppose qu'il existe $z \in \mathrm{U}$ tel que $\Gamma(z) = 0$. Montrer que cette hypothèse est absurde en examinant la suite $\dfrac{z}{2^n}$.

Partie 3. Primitivation d'ordre α non entier.

Soit a >0 et r un entier ≥ 0. On note E^r l'espace des fonctions de classe C^r sur [0,a].(resp. $r = \infty$).
On note F^r l'espace des fonctions de classe C^r sur $[0,a]$ et telles que $\forall k \in [0,r], f^{(k)}(0) = 0$.(resp. $r = \infty$).
E^0 et F^0 sont notés E et F. L^∞ est l'espace des fonctions bornées sur $[0,a]$ muni de la norme N_∞.
P est l'opérateur de primitivation de E dans E défini ainsi : $\forall x \in [0,a]$, $Pf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
P^r (itéré) est l'opérateur primitivation d'ordre r avec $P^0 = \mathrm{I}$.
Etant donné $\alpha = \beta + ß\gamma \in \mathrm{U}$, c.a.d. $\beta > 0$, on appelle primitivation d'ordre α l' application qui, à tout élément $f \in \mathrm{E}$ associe la fonction $P_\alpha(f)$ définie sur $[0,a]$ par la relation :

$$P_\alpha(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, pour tout $\lambda \in \mathrm{U}$, on note $e_\lambda(t) = \dfrac{t^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$.

1. Définition et propriétés de P_α.
1.a. Vérifier que, pour tout $f \in \mathrm{E}$ et tout $x \in]0,a]$, la fonction $t \to f(t)(x-t)^{\alpha-1}$ est intégrable sur $[0,x[$.
Puis, démontrer que $|P_\alpha(f)(x)| \leq \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\dfrac{x^\beta}{\beta}\mathrm{N}_\infty(f)$. On prolonge désormais $P_\alpha(f)$ par continuité en posant $P_\alpha(f)(0) = 0$.
1.b. Prouver que $P_\alpha(f)(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^x f(x-y)y^{\alpha-1}\,\mathrm{d}y$.

1.c. Vérifier que $P_\alpha(f)$ appartient à L^∞, que $\mathrm{N}_\infty(P_\alpha(f)) \leq \dfrac{1}{|\Gamma(\alpha)|}\dfrac{a^\beta}{\beta}\mathrm{N}_\infty(f)$,
puis que $f \to P_\alpha(f)$ est linéaire.
En déduire que, pour toute suite (f_n) d'éléments de E convergeant uniformément vers f sur $[0,a]$ alors $P_\alpha(f_n)$ converge uniformément vers $P_\alpha(f)$ sur $[0,a]$.

1.d. Prouver que $P_\alpha(1) = e_\alpha$ et que pour tout $\lambda \in \mathrm{U}, P_\alpha(e_\lambda) = e_{\alpha+\lambda}$.

1.e. Etablir que pour toute fonction polynôme $Q, P_\alpha(Q)$ appartient à E.
Etablir que pour tout $f \in \mathrm{E}, P_\alpha(f) \in \mathrm{E}$.

1.f. En conclure que P_α définit un endomorphisme continu de E et que $\|P_\alpha\| \leq \dfrac{1}{|\Gamma(\alpha)|}\dfrac{a^\beta}{\beta}$.
(ici, $\|A\| = \sup\limits_{\mathrm{N}_\infty(f)\leq 1} \mathrm{N}_\infty(A(f))$. : c'est une norme subordonnée).

Etablir que, si α est réel, l'inégalité précédente est une égalité, donc $\|P_\alpha\| = \dfrac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$.

2. Equation fonctionnelle de P_α.

2.a. Prouver que pour tout entier $n \geq 1, P^n = P_n$, P étant l'opérateur de primitivation.

2.b. Etablir que pour tout couple α, α' de U, $P_\alpha P_{\alpha'} = P_{\alpha+\alpha'}$.
Prouver d'abord que les endomorphismes $P_\alpha P_{\alpha'}$ et $P_{\alpha+\alpha'}$ coïncident sur les fonctions polynômiales.

3. Régularité de $P_\alpha(f)$.
3.a. On suppose $\mathrm{Re}(\alpha) > k$, où k est un entier positif.
Montrer que pour tout $f \in \mathrm{E}, P_\alpha(f) = P^k(P_{\alpha-k}(f))$. En déduire que $P_\alpha(f)$ appartient à F^k et que $\mathrm{D}^k P_\alpha(f) = P_{\alpha-k}(f)$.

3.b. On suppose que $f \in \mathrm{E}^1$. Vérifier que $f = P(\mathrm{D}f) + f(0)$. En conclure que si, en outre, $f(0) = 0$, alors $P_\alpha(f) \in \mathrm{F}^1$ et que $\mathrm{D}P_\alpha(f) = P_\alpha \mathrm{D}(f)$.

4. Noyau et image de P_α. On suppose $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$.

4.a. Prouver que, pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\mathrm{D}P_{1-\alpha}(P_\alpha(f)) = f$; en déduire que P_α est injectif.

4.b. Prouver qu'un élément $g \in \mathrm{E}$ appartient à l'image de P_α si et seulement si g appartient à F et $P_{1-\alpha}(g)$ appartient à E^1 et que, dans ces conditions, l'équation $P_\alpha(f) = g$ admet une solution et une seule, à savoir, $f = \mathrm{D}P_{1-\alpha}(g)$. Prouver que $\mathrm{F} \cap \mathrm{E}^1$ est contenu dans Im (P_α).

4.c. Etablir que P_α induit un automorphisme de F^∞.fin.