Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

Corrigé de la 2ème épreuve 2009

- Partie I : Transformation de Fourier -

1.(a) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. L'application $f_\xi : x \longmapsto f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ |f_\xi(x)| = |f(x)|$.

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, $|f|$ l'est (par définition), donc $|f_\xi|$ l'est, donc (par définition), f_ξ l'est.

On conclut : pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x\xi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.(b) • L'application $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C},\ \ (\xi, x) \longmapsto f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}$ est continue par rapport à ξ, continue par morceaux (car continue) par rapport à x, et : $\forall (\xi, x) \in \mathbb{R}^2,\ \ |F(\xi, x)| = |f(x)|$, où $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, avec hypothèse de domination globale, on conclut que l'application $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ \xi \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• On a : $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \ |\widehat{f}(\xi)| = \left|\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\right|\mathrm{d}x = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x = ||f||_1$,

donc : $\widehat{f}$ est bornée et : $\boxed{||\widehat{f}||_\infty \leqslant ||f||_1}$

Ceci permet de définir l'application $\mathfrak{F} : \mathcal{L}^1 \longrightarrow \mathcal{L}^\infty,\ \ f \longmapsto \mathfrak{F}(f) = \widehat{f}$.

2. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ x \longmapsto \mathrm{e}^{-a|x|}$.

• Il est clair que φ est continue sur $\mathbb{R}$, paire, et, comme : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ \ \varphi(x) = \mathrm{e}^{-ax}$ avec $a > 0$ fixé, d'après le cours, φ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, puis sur $\mathbb{R}$. Ainsi : $\varphi \in \mathcal{L}^1$.

• On a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\varphi(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a|x|}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{ax-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \\ &\underset{a-2\mathrm{i}\pi\xi\neq 0 \text{ et } -a-2\mathrm{i}\pi\xi\neq 0}{=} \left[\frac{\mathrm{e}^{(a-2\mathrm{i}\pi\xi)x}}{a-2\mathrm{i}\pi\xi}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{\mathrm{e}^{(-a-2\mathrm{i}\pi\xi)x}}{-a-2\mathrm{i}\pi\xi}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{a-2\mathrm{i}\pi\xi} - \frac{1}{-a-2\mathrm{i}\pi\xi} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}.\end{aligned}$$

On conclut : $\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R},\ \ \mathfrak{F}\varphi(\xi) = \dfrac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}}$

3. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1$. Considérons l'application $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C},\ \ (\xi, x) \longmapsto f(x)g(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}$, qui est continue sur $\mathbb{R}^2$.

• Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto u(\xi, x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ |u(\xi, x)| = \left|f(x)g(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\right| = |f(x)|\,|g(\xi)|$$

et que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (ξ est fixé).

• L'application $\xi \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\xi, x)|\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|g(\xi)|\,\mathrm{d}x = |g(\xi)|\,||f||_1$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, car g l'est.

• L'application $\xi \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, x)\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = g(\xi)\widehat{f}(\xi)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car g l'est et $\widehat{f}$ l'est d'après 1.(b).

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\xi \longmapsto u(\xi, x) = f(x)g(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car g l'est.

• L'application $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\xi, x)|\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|g(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = |f(x)|\,||g||_1$ est continue sur $\mathbb{R}$ car f l'est.

• L'application $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, x)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi = f(x)\widehat{g}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car f l'est et $\widehat{g}$ l'est d'après 1.(b).

D'après le résultat de permutation de deux intégrales admis dans les préliminaires de l'énoncé, l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, x)\,\mathrm{d}\xi$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, x)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}\xi}_{\text{noté PM}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, x)\,\mathrm{d}\xi\Big)\,\mathrm{d}x}_{\text{noté SM}}.$$

Mais :

$$\mathrm{PM} = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}g,$$

$$\mathrm{SM} = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi \xi x}\,\mathrm{d}\xi\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f\widehat{g}.$$

On conclut : $\boxed{\forall\, f, g \in \mathcal{L}^1,\ \ \int_{\mathbb{R}} f\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}g}$

4. Soit $f \in \mathcal{L}^1$ telle que l'application $xf : x \longmapsto xf(x)$ soit dans $\mathcal{L}^1$.

Notons $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C},\ \ (\xi, x) \longmapsto f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}$.

• Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $F(\xi, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, d'après 1.(a).

• $\dfrac{\partial F}{\partial \xi} : (\xi, x) \longmapsto -2\mathrm{i}\pi x f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}$ existe sur $\mathbb{R}^2$, est continue par rapport à ξ, continue par morceaux (car continue) par rapport à x.

• On a : $\forall\,(\xi, x) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial \xi}(\xi, x)\right| = 2\pi x|f(x)|$ et $x \longmapsto 2\pi x|f(x)|$ est indépendant de ξ, intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, avec hypothèse de domination globale, on déduit :

• pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto -2\mathrm{i}\pi x f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (ce qui est d'ailleurs immédiat, en considérant le module)

• l'application $\widehat{f} : \xi \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, x)\,\mathrm{d}x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

• pour tout $\xi \in \mathbb{R}$: $\widehat{f}\,'(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi, x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} -2\mathrm{i}\pi x f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \mathfrak{F}(-2\mathrm{i}\pi x f)(\xi)$.

On conclut : $\boxed{\text{si } f \in \mathcal{L}^1 \text{ et } xf \in \mathcal{L}^1, \text{ alors } \widehat{f} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et : } D(\mathfrak{F}f) = \mathfrak{F}(-2\mathrm{i}\pi x f)}$

5.(a) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable telle que $f \in \mathcal{L}^1$ et $Df \in \mathcal{L}^1$.

On a, d'après le théorème fondamental de l'analyse, puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie ℓ_1 en $-\infty$ et une limite finie ℓ_2 en $+\infty$. Alors :

$$|f(x)| \underset{x \,\longrightarrow\, -\infty}{\longrightarrow} \underbrace{|f(0)+\ell_1|}_{\text{noté } L_1} \quad \text{et} \quad |f(x)| \underset{x \,\longrightarrow\, +\infty}{\longrightarrow} \underbrace{|f(0)+\ell_2|}_{\text{noté } L_2}.$$

Si $L_2 \neq 0$, alors $L_2 > 0$, donc il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall\, x \in [A\,;+\infty[, \quad |f(x)| \geqslant \dfrac{L_2}{2}$,

d'où : $$\forall\, X \in [A\,;+\infty[, \quad \int_0^X |f(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \int_A^X |f(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant (X-A)\frac{L_2}{2} \underset{X \,\longrightarrow\, +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

contradiction avec l'intégrabilité de $|f|$ sur $[0\,;+\infty[$.
Ceci montre : $L_2 = 0$.
De même : $L_1 = 0$.
On conclut : $$f \underset{-\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5.(b) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable telle que $f \in \mathcal{L}^1$ et $Df \in \mathcal{L}^1$.
Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X \leqslant Y$.
On a, par intégration par parties pour des applications de classe C^1 sur un segment :

$$\begin{aligned}\int_X^Y f'(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x &= \big[f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\big]_X^Y - \int_X^Y f(x)(-2\mathrm{i}\pi\xi)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= f(Y)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi Y\xi} - f(X)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi X\xi} + 2\mathrm{i}\pi\xi \int_X^Y f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

D'après (a), f est de limite nulle en $-\infty$ et en $+\infty$, donc, comme $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}$ est de module 1, on a :

$$f(X)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi X\xi} \underset{X \,\longrightarrow\, -\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad f(Y)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi Y\xi} \underset{Y \,\longrightarrow\, +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On déduit, en faisant tendre X vers $-\infty$ et Y vers $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{i}\pi\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x,$$

et on conclut : $$\forall\, \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}(Df)(\xi) = (2\mathrm{i}\pi\xi)\mathfrak{F}(f)(\xi).$$

Autrement dit, avec les notations de l'énoncé : $\boxed{\mathfrak{F}(Df) = (2\mathrm{i}\pi\xi)\mathfrak{F}f}$

6.(a) L'application $\gamma : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\geqslant 0$, et $x^2\,\mathrm{e}^{-\pi x^2} \underset{x \,\longrightarrow\, \pm\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, par comparaison avec l'exemple de Riemann en $\pm\infty$ $(2 > 1)$, γ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
On admet : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \gamma = 1$ (c'est la classique intégrale de Gauss).

6.(b) On note $\Omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \xi \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi)^2}\,\mathrm{d}x$. Notons $G : (\xi, x) \longmapsto \mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi)^2}$.

• Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'application $G(\xi, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |G(\xi, x)| = \left|\mathrm{e}^{-\pi(x^2+2\mathrm{i}x\xi-\xi^2)}\right| = \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{e}^{\pi\xi^2},$$

et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (ξ est fixé).

• $\dfrac{\partial G}{\partial \xi} : (\xi, x) \longmapsto -2\mathrm{i}\pi(x+\mathrm{i}\xi)\,\mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi)^2}$ existe sur $\mathbb{R}^2$, est continue par rapport à ξ, continue par morceaux (car continue) par rapport à x.

• On a : $\quad \forall (\xi, x) \in \mathbb{R}^2, \quad \left|\dfrac{\partial G}{\partial \xi}(\xi, x)\right| = 2\pi|x+\mathrm{i}\xi|\mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{e}^{\pi\xi^2} = 2\pi\sqrt{x^2+\xi^2}\,\mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{e}^{\pi\xi^2}.$

Soit $A \geqslant 0$ fixé. On a : $\quad \forall (\xi, x) \in [-A\,;A] \times \mathbb{R}, \quad \left|\dfrac{\partial G}{\partial \xi}(\xi, x)\right| \leqslant \underbrace{2\pi\sqrt{x^2+A^2}\,\mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{e}^{\pi A^2}}_{\text{noté } \varphi_A(x)}$

et φ_A est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (car continue), $\geqslant 0$, intégrable sur $\mathbb{R}$, par la règle $x^2\varphi_A(x)$ par exemple.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale avec hypothèse de domination locale, on conclut :

• pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'application $\dfrac{\partial G}{\partial \xi}(\xi, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

• Ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

•
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \Omega'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial \xi}(\xi, x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} -2\mathrm{i}\pi(x+\mathrm{i}\xi)\,\mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi)^2}\right)\right)\mathrm{d}x = \mathrm{i}\left[\mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi)^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \mathrm{i}(0-0) = 0.$$

Ceci montre que Ω est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. En particulier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \Omega(\xi) = \Omega(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \gamma = 1.$$

6.(c) On a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{F}\gamma(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi(x^2+2\mathrm{i}x\xi)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi[(x+\mathrm{i}\xi)^2+\xi^2]}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}\Omega(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi\xi^2} = \gamma(\xi).$$

On conclut : $\quad \boxed{\mathfrak{F}\gamma = \gamma}$

6.(d) Soit $a > 0$ fixé. On note $\gamma^a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto \gamma^a(x) = \gamma(ax)$. On a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{F}\gamma^a(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^a(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(ax)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \underset{t=ax}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\frac{t}{a}\xi}\,\frac{\mathrm{d}t}{a}$$
$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi t\frac{\xi}{a}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\mathfrak{F}\gamma\left(\frac{\xi}{a}\right) \underset{(c)}{=} \frac{1}{a}\gamma\left(\frac{\xi}{a}\right) = \frac{1}{a}\gamma^{\frac{1}{a}}(\xi).$$

On conclut : $\quad \boxed{\mathfrak{F}\gamma^a = \frac{1}{a}\gamma^{\frac{1}{a}}}$

- Partie II : Convolution -

1. *Remarque :* (f,g) vérifie (H2) si et seulement si (g,f) vérifie (H1).

Soient $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ continues.

• On suppose ici que (f,g) vérifie (H1), c'est-à-dire : $f\in\mathcal{L}^\infty$ et $g\in\mathcal{L}^1$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. L'application $h:y\longmapsto f(x-y)g(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, y\in\mathbb{R},\quad |h(y)|=|f(x-y)|\,|g(y)|\leqslant ||f||_\infty\,|g(y)|,$$

donc h est intégrable sur $\mathbb{R}$, puisque g l'est.

• On suppose ici que (f,g) vérifie (H2), c'est-à-dire : $f\in\mathcal{L}^1$ et $g\in\mathcal{L}^\infty$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. L'application $h:y\longmapsto f(x-y)g(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, y\in\mathbb{R},\quad |h(y)|=|f(x-y)|\,|g(y)|\leqslant ||g||_\infty\,|f(x-y)|,$$

donc h est intégrable sur $\mathbb{R}$, puisque f l'est, par translation et symétrie à partir de f.

Lorsque (f,g) vérifie (H1) ou (H2), on définit $f*g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ par :

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R},\quad (f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y}$$

2. *1)* • Soit (f,g) vérifiant (H1). On a, pour tout $x\in\mathbb{R}$ fixé, par le changement de variable $u=x-y$:

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y=\int_{+\infty}^{-\infty}f(u)g(x-u)(-\mathrm{d}u)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-u)f(u)\,\mathrm{d}u=(g*f)(x).$$

On conclut : $\boxed{f*g=g*f}$

• Si (f,g) vérifie (H2), alors (g,f) vérifie (H1), donc, d'après le résultat précédent : $g*f=f*g$.

On conclut que, si (f,g) vérifie (H1) ou (H2), on a : $f*g=g*f$.

2) Soit (f,g) vérifiant (H1). On a, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}|(f*g)(x)|=\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\Big|&\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}||f||_\infty|g(y)|\,\mathrm{d}y=||f||_\infty\int_{-\infty}^{+\infty}|g(y)|\,\mathrm{d}y=||f||_\infty||g||_1.\end{aligned}$$

Ceci montre : $\boxed{f*g\in\mathcal{L}^\infty\ \text{ et }\ ||f*g||_\infty\leqslant||f||_\infty||g||_1}$

3. On suppose ici que (f,g) vérifie (H1) et que, de plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $Df\in\mathcal{L}^\infty$.

Notons $H:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{C},\quad (x,y)\longmapsto f(x-y)g(y)$.

• Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $H(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, d'après 1.

• $\dfrac{\partial H}{\partial x}:(x,y)\longmapsto Df(x-y)g(y)$ existe sur $\mathbb{R}^2$, est continue par rapport à x car Df est continue sur $\mathbb{R}$, et est continue par morceaux (car continue) par rapport à y car Df et g sont continues sur $\mathbb{R}$.

• On a : $\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ \left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y)\right| = \left|Df(x-y)g(y)\right| = |Df(x-y)|\,|g(y)| \leqslant ||Df||_\infty |g|(y),$
et l'application $||Df||_\infty|g|$ est continue par morceaux (car continue) sur $\mathbb{R}$, $\geqslant 0$, intégrable sur $\mathbb{R}$ car g est supposée intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, avec hypothèse de domination globale, on déduit :

• pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

• $f*g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

• pour tout $x\in\mathbb{R}$: $D(f*g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} Df(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \big((Df)*g\big)(x).$

On conclut, sous ces hypothèses : $\boxed{D(f*g) = (Df)*g}$

4.(a) *1)* Soit (f,g) tel que : $f\in\mathcal{L}^1,\ g\in\mathcal{L}^1,\ f\in\mathcal{L}^\infty$.

Autrement dit : (f,g) vérifie (H1) et $f\in\mathcal{L}^1$.

Notons $u:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{C},\ \ (x,y)\longmapsto f(x-y)g(y)$, qui est continue sur $\mathbb{R}^2$.

• Pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'application $u(x,\cdot): y\longmapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, car $|u(x,\cdot)|\leqslant ||f||_\infty|g|$ et $g\in\mathcal{L}^1$.

• L'application $x\longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x,y)|\,\mathrm{d}y$ est continue sur $\mathbb{R}$, par théorème de continuité sous le signe intégrale, la domination globale étant assurée par $||f||_\infty|g|$.

• L'application $x\longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)\,\mathrm{d}y$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour la même raison que ci-dessus.

• Pour tout $y\in\mathbb{R}$, l'application $u(\cdot,y): x\longmapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, d'après 1.

• L'application $y\longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x,y)|\,\mathrm{d}x = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)|\,\mathrm{d}x\Big)|g(y)| = ||f||_1|g|(y)$
est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, car $g\in\mathcal{L}^1$.

• L'application $y\longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)\,\mathrm{d}x = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)\,\mathrm{d}x\Big)g(y) = \Big(\int_{\mathbb{R}} f\Big)g(y)$
est continue sur $\mathbb{R}$ car g l'est.

D'après le théorème de permutation de deux intégrales admis dans les préliminaires de l'énoncé, on déduit que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'application $f*g: x\longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\int_{\mathbb{R}} f*g = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)\,\mathrm{d}x\Big)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{\mathbb{R}}f\Big)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}f\int_{\mathbb{R}}g.$$

2) Si $(f,g$ est tel que : $f\in\mathcal{L}^1,\ g\in\mathcal{L}^1,\ g\in\mathcal{L}^\infty$, en appliquant le résultat précédent à (g,f) à la place de (f,g), on obtient la même conclusion.

Finalement, sous les hypothèses de l'énoncé : $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f*g = \int_{\mathbb{R}}f\int_{\mathbb{R}}g}$

4.(b) Comme la propriété voulue est invariante en échangeant f et g (d'après 2.), on peut supposer, par exemple, que (f,g) vérifie (H1) et que $f \in \mathcal{L}^1$, c'est-à-dire : $f \in \mathcal{L}^1,\ g \in \mathcal{L}^1,\ f \in \mathcal{L}^\infty$.

Soit $\xi \in \mathbb{R}$ fixé. On a :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(f*g)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x-y)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi x}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Il est clair, comme plus haut, que l'application $u : (x,y) \longmapsto f(x-y)g(y)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi x}$ vérifie les hypothèses des préliminaires (car, de plus, $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi x}$ est continue et de module 1), donc on peut permuter les deux intégrales, d'où :

$$\mathfrak{F}(f*g)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi x}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi x}\,\mathrm{d}x\Big)g(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\underset{u=x-y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi(u+y)}\,\mathrm{d}u\Big)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi y}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi u}\,\mathrm{d}u\Big)g(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi u}\,\mathrm{d}u\Big)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi y}\,\mathrm{d}y\Big) = \mathfrak{F}f(\xi)\,\mathfrak{F}g(\xi).$$

On conclut : $\boxed{\mathfrak{F}(f*g) = (\mathfrak{F}f)(\mathfrak{F}g)}$

Remarque : On peut retrouver le résultat de (a) à partir de celui de (b), en remarquant, pour toute $h \in \mathcal{L}^1,\ \mathfrak{F}h(0) = \int_{\mathbb{R}} h$, donc, sous les hypothèses de l'énoncé :

$$\int_{\mathbb{R}} f*g = \big(\mathfrak{F}(f*g)\big)(0) = \big((\mathfrak{F}f)(\mathfrak{F}g)\big)(0) = \mathfrak{F}f(0)\,\mathfrak{F}g(0) = \int_{\mathbb{R}} f \int_{\mathbb{R}} g.$$

5. *Remarque :* **L'énoncé a oublié** de faire montrer qu'une telle fonction θ existe. Par exemple, la fonction θ suivante convient : $\quad \theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

5.(a) Soit $\delta > 0$ fixé.

Puisque $\theta \in \mathcal{L}^1$, on a : $\quad \displaystyle\int_0^X |\theta(x)|\,\mathrm{d}x \underset{X \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x,$

donc : $\quad \displaystyle\int_X^{+\infty} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x - \int_0^X |\theta(x)|\,\mathrm{d}x \underset{X \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$

Il existe donc $A_1 > 0$ tel que : $\quad \displaystyle\forall\, X \geqslant A_1,\ \int_X^{+\infty} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\delta}{2}.$

De même, il existe $A_2 > 0$ tel que : $\quad \displaystyle\forall\, Y \leqslant -A_2,\ \int_{-\infty}^{Y} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\delta}{2}.$

En notant $A = \mathrm{Max}\,(A_1, A_2) > 0$, on a donc : $\quad \displaystyle\forall\, X \geqslant A,\ \int_X^{+\infty} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\delta}{2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-X} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\delta}{2},$

d'où, en additionnant : $\quad \displaystyle\forall\, X \geqslant A,\ \int_{-\infty}^{-X} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x + \int_X^{+\infty} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x < \delta.$

En particulier (pour $X = A$), on conclut : $\quad \displaystyle\exists\, A > 0,\ \int_{-\infty}^{-A} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x + \int_A^{+\infty} |\theta(x)|\,\mathrm{d}x < \delta.$

5.(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\big|f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)\big| &= \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\theta_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y - f(x)\Big|\,\mathrm{d}y = \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\frac{1}{\varepsilon}\theta\Big(\frac{y}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}y - f(x)\Big|\,\mathrm{d}y \\
&\underset{z=\frac{y}{\varepsilon}}{=} \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\varepsilon z)\theta(z)\,\mathrm{d}z - f(x)\big|\,\mathrm{d}z = \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\varepsilon z)\theta(z)\,\mathrm{d}z - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\theta(z)\,\mathrm{d}z\Big| \\
&= \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x-\varepsilon z) - f(x)\big)\theta(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(x-\varepsilon z) - f(x)\big|\,|\theta(z)|\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

cette dernière intégrale existant car : $\forall z \in \mathbb{R},\quad |f(x-\varepsilon z) - f(x)|\,|\theta(z)| \leqslant 2||f||_\infty|\theta(z)|$ et $\theta \in \mathcal{L}^1$.

5.(c) On a, par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(x-\varepsilon y) - f(x)\big|\,|\theta(y)|\,\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{-A} + \int_{-A}^{A} + \int_{A}^{+\infty} \\
&\leqslant 2||f||_\infty \int_{-\infty}^{-A} |\theta(y)|\,\mathrm{d}y + \int_{-A}^{A} \big|f(x-\varepsilon y) - f(x)\big|\,|\theta(y)|\,\mathrm{d}y + 2||f||_\infty \int_{A}^{+\infty} |\theta(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\underset{\text{(a)}}{\leqslant} 2\delta||f||_\infty + \int_{-A}^{A} \big|f(x-\varepsilon y) - f(x)\big|\,|\theta(y)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure lorsque x décrit J et en utilisant (b), on déduit :

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Sup}_{x\in J} |f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)| &\leqslant 2\delta||f||_\infty + \operatorname*{Sup}_{x\in J} \int_{-A}^{A} \big|f(x-\varepsilon y) - f(x)\big|\,|\theta(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant 2\delta||f||_\infty + \int_{-A}^{A} \Big(\operatorname*{Sup}_{x\in J} |f(x-\varepsilon y) - f(x)|\Big)|\theta(y)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Remarque : **L'énoncé a oublié** de faire montrer que l'application $y \longmapsto \operatorname*{Sup}_{x\in J} -f(x-\varepsilon y) - f(x)|$ est continue. Cette continuité se montre en utilisant une inégalité sur la borne supérieure et l'uniforme continuité de f sur un segment (voir question suivante).

5.(d) Notons $J = [\alpha\,;\beta]$ et $K = [\alpha - A\,;\beta + A]$. Puisque f est continue sur le compact K, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur K. Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x_1, x_2) \in K^2,\quad \big(|x_1 - x_2| \leqslant \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \delta\big).$$

Supposons $\varepsilon \leqslant \dfrac{\eta}{A}$. On a alors : $\forall y \in [-A\,;A],\quad x - \varepsilon y \in K$ et $x \in K$ et $|(x-\varepsilon y) - x| = \varepsilon|y| \leqslant \varepsilon A \leqslant \eta$,

donc : $$\forall y \in [-A\,;A],\quad |f(x-\varepsilon y) - f(x)| \leqslant \delta,$$

puis : $$\int_{-A}^{A} \Big(\operatorname*{Sup}_{x\in J} |f(x-\varepsilon y) - f(x)|\Big)|\theta(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{-A}^{A} |\theta(y)|\delta\,\mathrm{d}y = \delta \int_{-A} A|\theta(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \delta \int_{\mathbb{R}} |\theta|.$$

On déduit : $$\forall \varepsilon \in]0\,;\eta/A],\quad \operatorname*{Sup}_{x\in J} |f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)| \leqslant \Big(2||f||_\infty + \int_{\mathbb{R}} |\theta|\Big)\delta.$$

Ceci montre : $$\operatorname*{Sup}_{x\in J} |f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)| \underset{\varepsilon \,\longrightarrow\, 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

et on conclut : $\boxed{(f * \theta_\varepsilon)_\varepsilon \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } J \text{ lorsque } \varepsilon \longrightarrow 0}$

6.(a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. soient $\varepsilon > 0$ et $\Phi_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \xi \longmapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x\xi - \pi\varepsilon^2\xi^2}$.

• Il est clair que Φ_ε est continue sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\Phi_\varepsilon(\xi)| = \mathrm{e}^{-\pi\varepsilon^2\xi^2}$,
donc Φ_ε est intégrable sur $\mathbb{R}$ (cf. aussi I 6.(a)).

• On a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{F}\Phi_\varepsilon(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\varepsilon(y)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi y}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi xy - \pi\varepsilon^2y^2 - 2\mathrm{i}\pi\xi y}\,\mathrm{d}y \underset{z=\varepsilon y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi z^2}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\frac{z}{\varepsilon}(-x+\xi)}\,\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi z^2}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\frac{-x+\xi}{\varepsilon}z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\varepsilon}\mathfrak{F}\gamma\Big(\frac{-x+\xi}{\varepsilon}\Big) \underset{\text{I 6.(c)}}{=} \frac{1}{\varepsilon}\gamma\Big(\frac{-x+\xi}{\varepsilon}\Big) = \gamma_\varepsilon(\xi - x).$$

On conclut : $\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}\Phi_\varepsilon(\xi) = \gamma_\varepsilon(\xi - x)}$

6.(b) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\mathfrak{F}f \in \mathcal{L}^1$.
On a, pour tout $\varepsilon > 0$, d'après I 3., puisque $\Phi_\varepsilon \in \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{L}^1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\varepsilon(\xi)\mathfrak{F}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}\phi_\varepsilon(\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Notons $\qquad U : [0\,;1[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\varepsilon, \xi) \longmapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x\xi - \pi\varepsilon^2\xi^2}\mathfrak{F}f(\xi).$

• L'application U est continue par rapport à ε, continue par morceaux (car continue) par rapport ξ.

• On a : $\forall (\varepsilon, \xi) \in [0\,;1[\times\mathbb{R}, \quad |U(\varepsilon, \xi)| = \big|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x\xi - \pi\varepsilon^2\xi^2}\mathfrak{F}f(\xi)\big| = \mathrm{e}^{-\pi\varepsilon^2\xi^2}|\mathfrak{F}f(\xi)| \leqslant |\mathfrak{F}f(\xi)|$,
et $|\mathfrak{F}f|$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (car continue), $\geqslant 0$, intégrable sur $\mathbb{R}$ (hypothèse de l'énoncé).
D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, avec hypothèse de domination globale, on déduit que l'application $\varepsilon \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x\xi - \pi\varepsilon^2\xi^2}\mathfrak{F}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ est continue en 0, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\varepsilon(\xi)\mathfrak{F}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x\xi - \pi\varepsilon^2\xi^2}\mathfrak{F}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x\xi}\mathfrak{F}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \mathfrak{G}(\mathfrak{F}f)(x).$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon \in]0\,;1[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}\Phi_\varepsilon(y)f(y)\,\mathrm{d}y \underset{\text{(a)}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\varepsilon(y - x)f(y)\,\mathrm{d}y \underset{\gamma \text{ est paire}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\varepsilon(x - y)f(y)\,\mathrm{d}y = (\gamma_\varepsilon * f)(x).$$

Comme $\gamma \in \mathcal{L}^1$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \gamma = 1$, on peut appliquer le résultat de 5.(d) à γ à la place de θ, donc la convergence uniforme entraînant la convergence simple, on a : $(\gamma_\varepsilon * f)(x) \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} f(x)$.
On déduit, par unicité de la limite : $\qquad \mathfrak{G}(\mathfrak{F}f)(x) = f(x)$.
On conclut : $\boxed{f = \mathfrak{G}(\widehat{f})}$

- Partie III : Espace $\mathcal{S}$ -

1.(a) Soient $f \in \mathcal{S}$, $m, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$. On a : $\left|(1+|x|^m)x^\alpha(D^\beta f)(x)\right| = |x|^\alpha|(D^\beta f)(x)| + |x|^{m+\alpha}|(D^\beta f)(x)|$,
donc $x \longmapsto (1+|x|^m)x^\alpha(D^\beta f)(x)\big|$ est bornée, en appliquant l'hypothèse $f \in \mathcal{S}$ à (α, β) et à $(m+\alpha, \beta)$.

1.(b) Soient $f \in \mathcal{S}$, $m, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$. L'application $\varphi : x \longmapsto (1+|x|^m)x^\alpha(D^\beta f)(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Puisque $f \in \mathcal{S}$, avec $\alpha+2$ à la place de α, la fonction $x \longmapsto x^{\alpha+2}D^\beta f(x)$ est bornée. D'après l'exemple de Riemann en $\pm\infty$ $(2 > 1)$ et le théorème de majoration pour des fonctions $\geqslant 0$, on conclut que $x \longmapsto x^\alpha D^\beta f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $x^\alpha D^\beta f$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

En particulier, pour $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, on obtient : $f \in \mathcal{L}^1$. Ainsi : $\boxed{\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1}$

1.(c) Soient $f, g \in \mathcal{S}$. Puisque f et g sont de classe C^∞, par produit, fg est de classe C^∞.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$. On a, par la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^\alpha D^\beta(fg)(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} D^k f(x) D^{\beta-k} g(x) = \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} \underbrace{x^\alpha D^k f(x)}_{\text{bornée car } f\in\mathcal{S}} \ \underbrace{x^0 D^{\beta-k} g(x)}_{\text{bornée car } g\in\mathcal{S}},$$

donc $x \longmapsto x^\alpha D^\beta(fg)(x)$ est bornée.
On conclut : $\boxed{\forall\, f, g \in \mathcal{S}, \quad fg \in \mathcal{S}}$

2.(a) Soient $n \in \mathbb{N}$, $f, g \in \mathcal{S}$. On a, pour tout $(\alpha, \beta) \in \{0, ..., n\}^2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|x|^\alpha|D^\beta(f+g)(x)| = |x|^\alpha|D^\beta f(x) + D^\beta g(x)| \leqslant |x|^\alpha|D^\beta f(x)| + |x|^\alpha|D^\beta g(x)| \leqslant p_n(f) + p_n(g),$$

donc : $$\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha|D^\beta(f+g)(x)| \leqslant p_n(f) + p_n(g),$$

puis : $$p_n(f+g) = \operatorname*{Max}_{0\leqslant\alpha\leqslant n,\ 0\leqslant\beta\leqslant n} \left(\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha|D^\beta(f+g)(x)|\right) \leqslant p_n(f) + p_n(g).$$

Ainsi, p_n vérifie l'inégalité triangulaire.

2.(b) • L'application $\sigma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \sigma'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0,$$

donc σ est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Il est clair que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \sigma(x) < 1$, donc σ est bornée.

• Soit $y \in \mathbb{R}_+$ fixé. L'application $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \varphi(x) = \sigma(x+y) - \sigma(x) - \sigma(y)$
est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi'(x) = \sigma'(x+y) - \sigma'(x) = \dfrac{1}{(1+x+y)^2} - \dfrac{1}{(1+x)^2} \leqslant 0$,
donc φ est décroissante.
Comme $\varphi(0) = \sigma(x) - \sigma(x) - \sigma(0) = 0$, on déduit : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) \leqslant 0$,
c'est-à-dire finalement : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \sigma(x+y) \leqslant \sigma(x) + \sigma(y)$.
On dit que σ est *sous-additive*.

2.(c) Soient $f, g \in \mathcal{S}$.

- On a : $$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant \frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(f-g)\big) \leqslant \frac{1}{2^n},$$

donc, d'après la série géométrique ($|1/2| < 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(f-g)\big)$ converge.

Ceci montre que, pour tout $(f,g) \in \mathcal{S}^2$, $d(f,g)$ existe.

- Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est paire :

$$\forall\, f \in \mathcal{S},\quad p_n(-f) = \underset{0\leqslant\alpha\leqslant n,\ 0\leqslant\beta\leqslant n}{\mathrm{Max}} \Big(\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha |D^\beta(-f)(x)|\Big) = \underset{0\leqslant\alpha\leqslant n,\ 0\leqslant\beta\leqslant n}{\mathrm{Max}} \Big(\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha |D^\beta f(x)|\Big) = p_n(f).$$

On a donc : $\displaystyle\forall\,(f,g) \in \mathcal{S}^2,\quad d(g,f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(g-f)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(f-g)\big) = d(f,g).$

Ainsi, d est symétrique.

- On a, pour toutes $f, g, h \in \mathcal{S}$:

$$d(f,g) + d(g,h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(f-g)\big) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(g-h)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\Big[\sigma\big(p_n(f-g)\big) + \sigma\big(p_n(g-h)\big)\Big]$$

$$\underset{\text{(b)}}{\geqslant} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(f-g) + p_n(g-h)\big) \underset{\text{(a) et } \sigma \text{ croissante}}{\geqslant} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n((f-g)+(g-h))\big) = d(f,h).$$

Ainsi, d vérifie l'inégalité triangulaire.

- Soient $f, g \in \mathcal{S}$. On a :

$$d(f,g) = 0 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(f-g)\big)}_{\geqslant 0} = 0 \iff \Big(\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sigma\big(p_n(f-g)\big) = 0\Big) \iff \Big(\forall\, n \in \mathbb{N},\ p_n(f-g) = 0\Big)$$

$$\text{car : } \forall\, x \in \mathbb{R}_+,\quad \big(\sigma(x) = 0 \implies x = 0\big)$$

$$\iff \Big(\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\,(\alpha,\beta) \in \{0,\dots,n\}^2,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad |x|^\alpha |D^\beta(f-g)(x)| = 0\Big)$$

$$\underset{\alpha=0,\ \beta=0}{\implies} \forall\, x \in \mathbb{R},\quad (f-g)(x) = 0 \iff f = g.$$

Les trois points précédents permettent de conclure que d est une distance sur $\mathcal{S}$.

- Soient $f, g, h \in \mathcal{S}$. On a :

$$d(f+h, g+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\sigma\Big(p_n\big(((f+h)-(g+h)\big)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(f-g)\big) = d(f,g),$$

donc d est invariante par translation.

2.(d) • Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{S}$.

1) Supposons $f_i \xrightarrow[i\infty]{\mathcal{S}} 0$, c'est-à-dire $d(f_i,0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(f_i)\big) \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2$. Notons $n = \mathrm{Max}\,(\alpha,\beta)$.

Puisque les termes de la série précédente sont tous $\geqslant 0$, on a : $\forall\, i\in\mathbb{N},\ \ 0 \leqslant \dfrac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(f_i)\big) \leqslant d(f_i,0)$,

donc, par théorème d'encadrement : $\dfrac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(f_i)\big) \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où, n étant fixé : $\sigma\big(p_n(f_i)\big) \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$,

puis, comme σ est bijective et que $\sigma^{-1} \underset{0}{\longrightarrow} 0$, on déduit : $p_n(f_i) \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ensuite, par définition de p_n, comme $0 \leqslant \displaystyle\mathop{\mathrm{Sup}}_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha |D^\beta f_i(x)| \leqslant p_n(f_i)$,

on déduit :
$$\mathop{\mathrm{Sup}}_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha |D^\beta f_i(x)| \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2) Réciproquement, supposons que, pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2$, on ait : $\displaystyle\mathop{\mathrm{Sup}}_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha |D^\beta f_i(x)| \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a alors :
$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ p_n(f_i) = \mathop{\mathrm{Max}}_{0\leqslant\alpha\leqslant n,\ 0\leqslant\beta\leqslant n} \Big(\mathop{\mathrm{Sup}}_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha |D^\beta f_i(x)|\Big) \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0,$$

comme maximum d'un nombre fini fixé de termes tendant vers 0.

Ensuite, comme $\sigma(x) \underset{x\,\longrightarrow\,0}{\longrightarrow} 0$, on a : $\sigma\big(p_n(f_i)\big) \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme :
$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, i\in\mathbb{N},\ \ 0 \leqslant \frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(f_i)\big) \leqslant \frac{1}{2^n},$$

la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\Big(i \longmapsto \frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(f_i)\big)\Big)$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{N}$.

D'autre part :
$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ \sigma\big(p_n(f_i)\big) \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On peut donc, d'après un théorème du cours, permuter série et limite, d'où :

$$d(f_i,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\sigma\big(p_n(f_i)\big) \underset{i\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0,$$

et donc :
$$f_i \xrightarrow[i\infty]{\mathcal{S}} 0.$$

Finalement :
$$\boxed{f_i \xrightarrow[i\infty]{\mathcal{S}} 0 \iff \forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2,\ \ \mathop{\mathrm{Sup}}_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha |D^\beta f_i(x)| \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0}$$

• Considérons l'inclusion canonique $\mathcal{I} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{L}^1,\ \ f \longmapsto f$, où $\mathcal{S}$ est muni de d et $\mathcal{L}^1$ est muni de $||.||_1$.
Il est clair que $\mathcal{I}$ est linéaire. Pour montrer la continuité de $\mathcal{I}$ sur $\mathcal{S}$, il suffit donc de montrer la continuité de $\mathcal{I}$ en 0. Nous allons montrer que $\mathcal{I}$ est continue en 0 en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité.

Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{S}$ telle que $f_i \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'après le point précédent, on a en particulier : $\displaystyle\mathop{\mathrm{Sup}}_{x\in\mathbb{R}} |f_i(x)| \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\mathop{\mathrm{Sup}}_{x\in\mathbb{R}} |x^2 f_i(x)| \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$,

obtenus respectivement pour $(\alpha,\beta) = (0,0)$ et pour $(\alpha,\beta) = (2,0)$.

D'où :
$$\underbrace{\mathop{\mathrm{Sup}}_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)|f_i(x)|}_{\text{noté } \varepsilon_i} \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi :
$$\varepsilon_i \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ et } \ \forall\, x\in\mathbb{R},\ \forall\, i\in\mathbb{N},\ \ |f_i(x)| \leqslant \frac{\varepsilon_i}{1+x^2}.$$

On a : $\forall\, i \in \mathbb{N},\quad ||f_i||_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f_i(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_i}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\varepsilon_i,$

donc : $||f_i||_1 \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire : $f_i \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathcal{L}^1$ muni de $||.||_1$.

On conclut : $\boxed{\mathcal{I} \text{ est continue sur } \mathcal{S}}$

3. Soient $f, g \in \mathcal{S}$.

• Puisque f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et sont dans $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^\infty$, d'après II 3., en réitérant, $f * g$ est de classe C^∞ et : $\forall\, \beta \in \mathbb{N},\quad D^\beta(f*g) = (D^\beta f) * g.$

• D'autre part, montrons que, pour toute $f \in \mathcal{S}$, on a : $xf \in \mathcal{S}$.

Soit $f \in \mathcal{S}$. Déjà, xf est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, en utilisant la formule de Leibniz :

$$x^\alpha D^\beta(xf) = x^\alpha\big(xD^\beta f + \beta D^{\beta-1} f\big) = x^{\alpha+1} D^\beta f + \beta x^\alpha D^{\beta-1} f.$$

Puisque $f \in \mathcal{S}$, les applications $x \longmapsto x^{\alpha+1} D^\beta f(x)$ et $x \longmapsto \beta x^\alpha D^{\beta-1} f(x)$ sont bornées, donc, par combinaison linéaire à coefficients constants, l'application $x \longmapsto x^\alpha D^\beta(x)(x)$ est bornée.

Ceci montre : $xf \in \mathcal{S}$.

• On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x(f*g)(x) = x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \big((x-y)+y\big)f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \big((x-y)f(x-y)\big)g(y)\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\big(yg(y)\big)\,\mathrm{d}y$$

car ces deux intégrales convergent

$$= \big((xf)*g\big)(x) + \big(f*(xg)\big)(x) = \big((xf)*g + f*(xg)\big)(x),$$

donc : $x(f*g) = (xf)*g + f*(xg).$

Ainsi, l'application $f \in \mathcal{S} \longmapsto xf$ vérifie la même formule vis-à-vis de $*$ que la dérivation vis-à-vis de $\cdot$. On a donc, par récurrence, une formule analogue à la formule de Leibniz :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N},\quad x^\alpha(f*g) = \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (x^{\alpha-i}f)*(x^i g).$$

• On a donc, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2$: $x^\alpha D^\beta(f*g) = x^\alpha\big((D^\beta f)*g\big) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (\underbrace{x^{\alpha-i}D^\beta f}_{\text{bornée}})*(\underbrace{x^i g}_{\text{bornée}}).$

donc $x^\alpha D^\beta(f*g)$ est bornée.

Finalement : $\boxed{\forall\, f, g \in \mathcal{S},\quad f*g \in \mathcal{S}}$

Autrement dit, la loi $*$ est interne dans $\mathcal{S}$.

4.(a) Soient $f \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{N}$. D'après 1.(b), $f \in \mathcal{L}^1$, puis, d'après I 4. : $D(\mathfrak{F}f) = \mathfrak{F}(-2\mathrm{i}\pi x f)$.

Comme $-2\mathrm{i}\pi xf \in \mathcal{S}$ (car $f \in \mathcal{S}$), on peut réitérer, et, de proche en proche, on obtient : $D^\alpha(\mathfrak{F}f) = \mathfrak{F}g$, où $g : x \longmapsto (-2\mathrm{i}\pi x)^\alpha f(x)$.

4.(b) Soient $f \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Puisque $f \in \mathcal{S}$, on a : $f \in \mathcal{L}^1$ et $Df \in \mathcal{L}^1$, donc, d'après I5.(b) :

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R},\quad \mathfrak{F}(Df)(\xi) = (2\mathrm{i}\pi\xi)\mathfrak{F}f(\xi).$$

De même, en réitérant, on obtient : $\forall\, \xi \in \mathbb{R},\quad \mathfrak{F}(D^\alpha f)(\xi) = (2\mathrm{i}\pi\xi)^\alpha \mathfrak{F}f(\xi)$.

4.(c) Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors, $\mathfrak{F}f$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a, d'après (b) appliqué à $x^\beta f$: $\mathfrak{F}\big(D^\alpha(x^\beta f)\big) = (2\mathrm{i}\pi x)^\alpha \mathfrak{F}(x^\beta f)$.

D'autre part, d'après (a) : $D^\beta(\mathfrak{F}f) = \mathfrak{F}\big((-2\mathrm{i}\pi)^\beta x^\beta f\big) = (-2\mathrm{i}\pi)^\beta \mathfrak{F}(x^\beta f)$.

d'où : $\mathfrak{F}\big(D^\alpha(x^\beta f)\big) = (2\mathrm{i}\pi x)^\alpha (-2\mathrm{i}\pi)^{-\beta} D^\beta(\mathfrak{F}f) = (-1)^\beta (2\mathrm{i}\pi)^{\alpha-\beta} x^\alpha D^\beta(\mathfrak{F}f)$.

On a donc : $$x^\alpha D^\beta(\mathfrak{F}f) = \underbrace{(-1)^\beta (2\mathrm{i}\pi)^{\beta-\alpha}}_{\text{constante}}\ \underbrace{\mathfrak{F}\big(D^\alpha(x^\beta f)\big)}_{\text{bornée}}.$$

Il en résulte que $x^\alpha D^\beta(\mathfrak{F}f)$ est bornée.

On conclut : $\mathfrak{F}f \in \mathcal{S}$.

Ceci montre que $\mathcal{S}$ est stable par $\mathfrak{F}$.

On peut donc encore noter $\mathfrak{F}$ l'application induite par $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{S}$: $\mathfrak{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S},\quad f \longmapsto \mathfrak{F}f$.

4.(d) Puisque $\mathfrak{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ est linéaire, il suffit de montrer que $\mathfrak{F}$ est continue en 0. Nous allons utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité en 0.

Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{S}$ telle que $f_i \underset{i\infty}{\overset{\mathcal{S}}{\longrightarrow}} 0$.

D'après III2.(d), ceci signifie que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, la suite $(x^\alpha D^\beta f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers 0.

Il s'agit de montrer que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, la suite $(x^\alpha D^\beta \widehat{f_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

On a, d'après 4.(a) et (b), comme en 4.(c) : $x^\alpha D^\beta \widehat{f_i} = (-1)^\beta (2\mathrm{i}\pi)^{\beta-\alpha}\widehat{g_i}$, où on a noté $g_i = D^\alpha x^\beta f_i$.

D'après l'hypothèse sur $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et la formule de Leibniz, on a : $g_i \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'après III2.(d), on a alors : $||g_i||_1 \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$.

Puis, d'après I1.(b), comme $||\widehat{g_i}||_\infty \leqslant ||g_i||_1$, on déduit : $||\widehat{g_i}||_\infty \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire : $\widehat{g_i} \underset{i\infty}{\overset{C.U.}{\longrightarrow}} 0$.

Il en résulte : $$x^\alpha D^\beta \widehat{f_i} = (-1)^\beta (2\mathrm{i}\pi)^{\beta-\alpha}\widehat{g_i} \underset{i\infty}{\overset{C.U.}{\longrightarrow}} 0.$$

Ceci montre : $$\widehat{f_i} \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut que $\mathfrak{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S},\quad f \longmapsto \widehat{f}$ est continue.

5. • Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors, $\mathfrak{F}f \in \mathcal{S}$, donc on a : $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\mathfrak{F}f \in \mathcal{L}^1$, d'où, d'après II6.(b) : $\mathfrak{G}(\mathfrak{F}f) = f$.

Ainsi : $$\forall\, f \in \mathcal{S},\quad \mathfrak{G}(\mathfrak{F}f) = f.$$

• Soit $f \in \mathcal{S}$. Notons $\widetilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\quad x \longmapsto \widetilde{f}(x) = f(-x)$ la symétrisée de f.

Il est clair que $\widetilde{f}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$: $x^\alpha D^\beta(\widetilde{f}) = (-1)^{\alpha+\beta}\widetilde{x^\alpha D^\beta} f$, donc $x^\alpha D^\beta \widetilde{f}$ est bornée, donc $\widetilde{f} \in \mathcal{S}$.

On a : $\mathfrak{G}(\widetilde{f}) = \widetilde{\mathfrak{F}f}$ et $\mathfrak{F}(\widetilde{f}) = \widetilde{\mathfrak{G}f}$, d'où : $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}f) = \mathfrak{F}\big(\mathfrak{G}(\widetilde{\widetilde{f}})\big) = \mathfrak{F}\big(\widetilde{\mathfrak{F}(\widetilde{f})}\big) = \widetilde{\mathfrak{G}\big(\mathfrak{F}\widetilde{f}\big)} = \widetilde{\widetilde{f}} = f$.

Ainsi : $$\forall\, f \in \mathcal{S},\quad \mathfrak{F}(\mathfrak{G}f) = f.$$

On obtient : $$\forall\, f \in \mathcal{S},\quad \mathfrak{G}\mathfrak{F}(f) = f \ \text{ et }\ \mathfrak{F}\mathfrak{G}f = f,$$

donc : $\boxed{\mathfrak{F} \text{ est une bijection de } \mathcal{S} \text{ sur } \mathcal{S},\ \mathfrak{G} \text{ aussi, et } \mathfrak{G} = \mathfrak{F}^{-1}}$

- Partie IV : Espace $\mathcal{S}'$ -

1.(a) L'application $\delta : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto f(0)$ est une forme linéaire car, pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{S}$:

$$\delta(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda\delta(f) + \delta(g).$$

• Pour montrer $\delta \in \mathcal{S}'$, il suffit de montrer que δ est continue en 0. Utilisons la caractérisation séquentielle de la continuité en 0. Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{S}$ telle que $f_i \xrightarrow[i\infty]{\mathcal{S}} 0$. Alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$: $x^\alpha D^\beta f_i \xrightarrow[i\infty]{C.U.} 0$. En particulier, pour $(\alpha, \beta) = (0, 0)$: $f_i \xrightarrow[i\infty]{C.U.} 0$, puis, comme la convergence uniforme entraîne la convergence simple : $\delta(f_i) = f_i(0) \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci montre que δ est continue en 0.

Finalement : $\boxed{\delta \in \mathcal{S}'}$

1.(b) Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux.

1) Supposons u intégrable sur $\mathbb{R}$.

• Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors, f est bornée, donc $|uf| = |u|\,|f| \leqslant ||f||_\infty |u|$. Comme u est intégrable sur $\mathbb{R}$, par théorème de majoration pour des fonctions $\geqslant 0$, uf est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\displaystyle\int_\mathbb{R} uf$ existe.

• L'application $T_u : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto T_u(f) = \displaystyle\int_\mathbb{R} uf$ est donc bien définie.

Il est clair que T_u est linéaire (par linéarité de l'intégration).

• Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{S}$ telle que $f_i \xrightarrow[i\infty]{\mathcal{S}} 0$. En particulier : $f_i \xrightarrow[i\infty]{C.U.} 0$. On a :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}, \quad |T_u(f_i)| = \left| \int_\mathbb{R} uf_i \right| \leqslant \int_\mathbb{R} |uf_i| = \int_\mathbb{R} |u|\,|f_i| \leqslant \underbrace{||f_i||_\infty}_{\underset{i\infty}{\longrightarrow} 0} \int_\mathbb{R} |u|,$$

donc : $T_u(f_i) \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ceci montre, par la caractérisation séquentielle de la continuité en 0, que T_u est continue en 0.
Puisque T_u est linéaire et que T_u est continue en 0, on conclut que T_u est continue sur $\mathcal{S}$, et finalement : $T_u \in \mathcal{S}'$.

2) Supposons u bornée sur $\mathbb{R}$.

• Soit $f \in \mathcal{S}$. On a : $\quad |uf| = |u|\,|f| \leqslant ||u||_\infty |f|$.

D'après III2., f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc, par théorème de majoration pour des fonctions $\geqslant 0$, uf est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\displaystyle\int_\mathbb{R} uf$ existe.

L'application $T_u : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto T_u(f) = \displaystyle\int_\mathbb{R} uf$ est donc bien définie.

Il est clair que T_u est linéaire (par linéarité de l'intégration).

• Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{S}$ telle que $f_i \xrightarrow[i\infty]{\mathcal{S}} 0$. D'après III2., on a alors : $\displaystyle\int_\mathbb{R} |f_i| = ||f_i||_1 \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a :
$$\forall\, i \in \mathbb{N}, \quad |T_u(f_i| = \left| \int_\mathbb{R} uf_i \right| \leqslant \int_\mathbb{R} |u|\,|f_i| \leqslant ||u||_\infty \underbrace{\int_\mathbb{R} |f_i|}_{\underset{i\infty}{\longrightarrow} 0},$$

donc : $T_u f_i \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$ et on termine comme ci-dessus.

2. Soit $L \in \mathcal{LC}(\mathcal{S})$ telle qu'il existe $L' \in \mathcal{LC}(\mathcal{S})$ telle que : $\forall f, g \in \mathcal{S}, \quad \displaystyle\int_R L(f)g = \int_{\mathbb{R}} fL'(g)$.

L'énoncé admet l'unicité de L'.

Remarque : L' est l'adjoint de L.

• Pour toute $T \in \mathcal{S}'$, l'application $T \circ L'$ est bien définie, car : $\mathcal{S} \xrightarrow{L'} \mathcal{S} \xrightarrow{T} \mathbb{C}$, et $T \circ L'$ est une application de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\underline{L}(T) = T \circ L'$.

• Pour toute $T \in \mathcal{S}'$, l'application $\underline{T} = T \circ L'$ est linéaire et continue car T et L' le sont, donc $\underline{L}(T) \in \mathcal{S}'$.

Ainsi, $\underline{L}$ est une application de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.

• On a, pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$, $T_1, T_2 \in \mathcal{S}'$:

$$\underline{L}(\lambda T_1 + T_2) = (\lambda T_1 + T_2) \circ L' = \lambda T_1 \circ L' + T_2 \circ L' = \lambda \underline{L}(T_1) + \underline{L}(T_2),$$

donc $\underline{L}$ est linéaire.

Finalement, $\underline{L}$ est une application linéaire de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.

3.(a) • L'application $D : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}, \quad f \longmapsto Df = f'$ est bien définie, linéaire, continue car, si $f_i \xrightarrow[i\infty]{\mathcal{S}} 0$, alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, $x^\alpha D^\beta f \xrightarrow[i\infty]{C.U.} 0$, donc, en particulier, $x^\alpha D^{\beta+1} f \xrightarrow[i\infty]{C.U.} 0$, c'est-à-dire $x^\alpha D^\beta (Df) \xrightarrow[i\infty]{C.U.} 0$, donc $Df_i \xrightarrow[i\infty]{\mathcal{S}} 0$. On peut donc appliquer la construction de IV2. à D à la place de L.

• On a, par intégration par parties, pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X \leqslant Y$:

$$\int_X^Y (Df)g = [fg]_X^Y - \int_X^Y f(Dg).$$

Comme $f \underset{\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ et $g \underset{\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit, en faisant tendre X vers $-\infty$ et Y vers $+\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}} (Df)g = -\int_{\mathbb{R}} f(Dg) = \int_{\mathbb{R}} f(-Dg),$$

et $-D \in \mathcal{LC}(\mathcal{S})$, d'où (par unicité de D') : $\boxed{D' = -D}$

Remarque : D est antisymétrique.

3.(b) Soit $T \in \mathcal{S}'$, $f \in \mathcal{S}$. On a : $\underline{D}(T)(f) = (T \circ D')(f) = \big(T \circ (-D)\big)(f) = -(T \circ D)(f)$.

3.(c) • Remarquons d'abord que, pour toutes $L_1, L_2 \in \mathcal{LC}(\mathcal{S})$, on a : $(L_1 \circ L_2)' = L_2' \circ L_1'$.

En effet, pour toutes $f, g \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(L_1 \circ L_2)'(g) &= \int_{\mathbb{R}} (L_1 \circ L_2)(f)g = \int_{\mathbb{R}} L_1\big(L_2(f)\big)g \\ &\underset{\text{définition de } L_1'}{=} \int_{\mathbb{R}} L_2(f)L_1'(g) \underset{\text{définition de } L_2'}{=} \int_{\mathbb{R}} f\, L_2'\big(L_1'(g)\big) = \int_{\mathbb{R}} f(L_2' \circ L_1')(g),\end{aligned}$$

d'où, par unicité de $(L_1 \circ L_2)'$: $\qquad (L_1 \circ L_2)' = L_2' \circ L_1'$.

• On a donc, par récurrence immédiate et d'après (b) :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad (D^\alpha)' = (D')^\alpha = (-D)^\alpha = (-1)^\alpha D^\alpha.$$

Ainsi : $\qquad L' = (-1)^\alpha D^\alpha$.

• Enfin : $\quad \underline{L}(T)(f) = T \circ L'(f) = \big(T \circ ((-1)^\alpha D^\alpha)\big)(f) = (-1)^\alpha T \circ D^\alpha(f) = (-1)^\alpha T(f^{(\alpha)})$.

On conclut : $\qquad \underline{L}(T)(f) = (-1)^\alpha T(f^{(\alpha)}$.

3.(d) On a, pour toute $f \in \mathcal{S}$:

$$\underline{D}(T_Y)(f) = (T_Y \circ D')(f) = \big(T_Y \circ (-D)\big)(f) = -(T_Y \circ D)(f) = -T_Y(f')$$
$$= -\int_{\mathbb{R}} Yf' = -\int_0^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x = -[f(x)]_0^{+\infty} = -\underbrace{\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)}_{=0} + f(0) = f(0) = \delta(f).$$

On conclut : $\boxed{\underline{D}(T_Y) = \delta}$

4. Soit $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à croissance lente.
D'après la définition de l'énoncé, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il existe $m_i \in \mathbb{N}$ tel que : $D^i P(x) = \underset{x \longrightarrow \pm\infty}{O}(|x|^{m_i})$.

• Montrons que, pour toute $f \in \mathcal{S}$, on a $Pf \in \mathcal{S}$.
D'abord, Pf est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, car P et f le sont.
On a, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, d'après la formule de Leibniz :

$$x^\alpha D^\beta(Pf) = x^\alpha \sum_{i=0}^{\beta} \binom{\beta}{i} (D^i P)(D^{\beta - i} f) = \sum_{i=0}^{\beta} \binom{\beta}{i} (D^i P)(x^\alpha D^{\beta-i} f).$$

Chaque $D^i P$, pour $i \in \{0, ..., \beta\}$, est un $\underset{x \longrightarrow \pm\infty}{O}(|x|^{m_i})$, donc un $\underset{x \longrightarrow \pm\infty}{O}(|x|^m)$ où $m = \underset{0 \leqslant i \leqslant \beta}{\mathrm{Max}}\, m_i$.
Ensuite, chaque $x^{\alpha+m} D^\beta f$ est bornée, car $f \in \mathcal{S}$.
Par combinaison linéaire à coefficients constants, on en déduit que $x^\alpha D^\beta(Pf)$ est un $O(|x^m|)$.
Ceci montre : $Pf \in \mathcal{S}$.
Ainsi : $\forall f \in \mathcal{S},\ \ L(f) = Pf \in \mathcal{S}$, donc L est bien une application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

• L'application L est linéaire. En effet, pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{S}$:

$$L(\lambda f + g) = P(\lambda f + g) = \lambda P f + Pg = \lambda L(f) + L(g).$$

• Montrons que L est continue, en utilisant la linéarité de L pour se ramener en 0, et la caractérisation séquentielle de la continuité en 0.
Soit $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{S}$ telle que $f_i \underset{i\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour chaque $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, $\big(x^\alpha D^\beta(Pf_i)\big)_{i \in \mathbb{N}}$ est combinaison linéaire de suites qui sont toutes, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}$, en $\underset{\pm\infty}{O}(x^\gamma D^\delta f_i)$, qui convergent uniformément vers 0, donc $x^\alpha D^\beta(Pf_i) \underset{i\infty}{\overset{C.U.}{\longrightarrow}} 0$, et on déduit : $L(f_i) = Pf_i \underset{i\infty}{\overset{\mathcal{S}}{\longrightarrow}} 0$.
Ceci montre que L est continue.
Ainsi : $L \in \mathcal{LC}(\mathcal{S})$.

• On a, pour toutes $f, g \in \mathcal{S}$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} fL'(g) = \int_{\mathbb{R}} L(f)g = \int_{\mathbb{R}} (Pf)g = \int_{\mathbb{R}} f(Pg)$,
donc : $L' : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S},\ \ g \longmapsto Pg$, c'est-à-dire : $L' = L$.

Remarque : L est symétrique.

• On a, pour toutes $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$: $\underline{L}(T)(f) = T \circ L'(f) = T \circ L(f) = T(Pf)$.

5.(a) • L'application $L : f \longmapsto \widehat{f} = \mathfrak{F}f$ est bien une application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, linéaire, continue (cf. III4.(d)), donc : $L \in \mathcal{LC}(\mathcal{S})$.

• On a, pour toutes $f, g \in \mathcal{S}$, d'après I3. : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} L(f)g = \int_{\mathbb{R}} (\mathfrak{F}f)g = \int_{\mathbb{R}} f(\mathfrak{F}g) = \int_{\mathbb{R}} fL(g)$,

donc (par unicité de L', on a : $L' = L$.

• D'où, pour toutes $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$: $\underline{L}(T)(f) = T \circ L'(f) = T \circ L(f) = T(\widehat{f})$.

Ainsi, avec les notations de l'énoncé : $\underline{\mathfrak{F}}T = \widehat{T} = \underline{L}(T) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}, \quad f \longmapsto T(\widehat{f})$,

ou encore : $\boxed{\widehat{T} : f \longmapsto \widehat{T}(f) = T(\widehat{f})}$

5.(b) • Comme ci-dessus : $\mathfrak{G} \in \mathcal{LC}(\mathcal{S})$.

• On a, pour toutes $f, g \in \mathcal{S}$:

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathfrak{G}f)g = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}f(-x)g(x)\,\mathrm{d}x \underset{y=-x}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}f(y)g(-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}f(y)\widetilde{g}(y)\,\mathrm{d}y$$
$$\underset{(a)}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y)(\mathfrak{F}\widetilde{g})(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathfrak{F}g(-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathfrak{G}g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(\mathfrak{G}g),$$

d'où : $\boxed{\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}}$

• On a, pour toutes $T \in \mathcal{LC}(\mathcal{S})$ et $f \in \mathcal{S}$: $\underline{\mathfrak{G}}(T)(f) = T \circ \mathfrak{G}'(f) = T \circ \mathfrak{G}(f)$.

• D'où, pour toutes $T \in \mathcal{LC}(\mathcal{S})$ et $f \in \mathcal{S}$:

$$\underline{\mathfrak{G}}\big(\underline{\mathfrak{F}}(T)\big)(f) = \mathfrak{G}\big(T(\mathfrak{F}f)\big) = T \circ \mathfrak{G}(\mathfrak{F}f) = T \circ (\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F})(f) = T(f),$$

donc : $\underline{\mathfrak{G}} \circ \underline{\mathfrak{F}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}$.

De même : $\underline{\mathfrak{F}}\big(\underline{\mathfrak{G}}(T)\big)(f) = \mathfrak{F}\big(T(\mathfrak{G}f)\big) = T \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{G}f) = T \circ (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G})(f) = T(f)$,

donc : $\underline{\mathfrak{F}} \circ \underline{\mathfrak{G}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}$.

Finalement, on conclut : $\boxed{\underline{\mathfrak{F}} \text{ et } \underline{\mathfrak{G}} \text{ sont des bijections de } \mathcal{S}' \text{ sur lui-même, réciproques l'une de l'autre}}$

5.(c) Soit $u \in \mathcal{L}^1$.

1) On a : $\forall f, g \in \mathcal{S}, \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}} (T_u f)g = \int_{\mathbb{R}} (uf)g = \int_{\mathbb{R}} f(ug) = \int_{\mathbb{R}} f(T_u g)$, donc : $(T_u)' = T_u$.

2) On a, pour toute $f \in \mathcal{S}$: $\displaystyle\underline{\mathfrak{F}}(T_u)(f) = (T_u \circ \mathfrak{F})(f) = \int_{\mathbb{R}} u(\mathfrak{F}f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}\xi$.

Notons $\quad U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (x, \xi) \longmapsto u(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi} f(x)$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\xi \longmapsto U(x, \xi)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $|U(x, \xi)| = |u(\xi)|\,|f(x)|$ et u est supposée intégrable sur $\mathbb{R}$.

• L'application $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x, \xi)|\,\mathrm{d}\xi = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\Big)|f(x)| = ||u||_1 |f(x)|$ est continue sur $\mathbb{R}$, car f l'est.

• L'application $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} U(x, \xi)\,\mathrm{d}\xi = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi\Big) f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, par théorème de continuité sous le signe intégrale, l'hypothèse de domination globale étant assurée par $u \in \mathcal{L}^1$.

• Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto U(x, \xi)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, car u l'est.

• L'application $\xi \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x,\xi)|\,\mathrm{d}x = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x\Big)|u(\xi)|$ est continue sur $\mathbb{R}$, car u l'est.

• L'application $\xi \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} U(x,\xi)\,\mathrm{d}x = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x\Big)u(\xi)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par théorème de continuité sous le signe intégrale, l'hypothèse de domination étant assurée par $f \in \mathcal{L}^1$.

D'après le théorème de permutation de deux intégrales admis dans les préliminaires de l'énoncé, on a donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathfrak{F}u(x)\,\mathrm{d}x = T_{\mathfrak{F}u}(f).$$

On conclut : $\boxed{\underline{\mathfrak{F}}(T_u) = T_{\mathfrak{F}u}}$

5.(d) • On a, d'après (a) :

$$\forall f \in \mathcal{S},\ \ \underline{\mathfrak{F}}(\delta)(f) = \delta(\widehat{f}) = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x 0}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 f(x)\,\mathrm{d}x = T_1(f),$$

d'où : $\boxed{\underline{\mathfrak{F}}(\delta) = T_1}$

• De même :

$$\forall f \in \mathcal{S},\ \ \underline{\mathfrak{G}}(\delta)(f) = \delta(\widehat{\widetilde{f}}) = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\,\mathrm{d}x \underset{y=-x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f = T_1(f),$$

d'où : $\boxed{\underline{\mathfrak{G}}(\delta) = T_1}$

6. Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. On note $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ x \longmapsto (-2\mathrm{i}\pi x)^\alpha,\ \ Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ x \longmapsto (2\mathrm{i}\pi x)^\alpha$. Soit $T \in \mathcal{S}'$.

• On a, pour toute $f \in \mathcal{S}$, d'après I5.(b) : $\mathfrak{F}(D^\alpha f) = (2\mathrm{i}\pi x)^\alpha \mathfrak{F} f$,
d'où, pour toute $T \in \mathcal{LC}(\mathcal{S})$:

$$\underline{D^\alpha}\big(\underline{\mathfrak{F}}(T)\big) = \underline{D^\alpha}(T\circ\mathfrak{F}') = (T\circ\mathfrak{F}')\circ(D^\alpha)' = T\circ\mathfrak{F}\circ(-1)^\alpha D^\alpha = (-1)^\alpha T\circ\mathfrak{F}\circ D^\alpha = (-1)^\alpha T(P\mathfrak{F}) = (-1)^\alpha T\underline{\mathfrak{F}}(P)$$

$$\underline{\mathfrak{F}}\big(\underline{D^\alpha}(T)\big) = \underline{\mathfrak{F}}\big(T\circ(D^\alpha)'\big) = T\circ(D\alpha)'\circ\mathfrak{F}' = T\circ(-1)^\alpha D^\alpha\circ\mathfrak{F} = (-1)^\alpha(QT)\circ\mathfrak{F} = (-1)^\alpha Q(T\circ\mathfrak{F}) = (-1)^\alpha Q\underline{\mathfrak{F}}(T).$$

7. Puisque $\underline{\mathfrak{F}}$ est une bijection de $\mathcal{S}'$ sur $\mathcal{S}'$, on a, pour toute $U \in \mathcal{S}'$, en notant $V = \underline{\mathfrak{F}}U$:

$$-\underline{D^2}U + U = \delta \iff \underline{\mathfrak{F}}(-\underline{D^2}U + U) = \underline{\mathfrak{F}}\delta \iff -(2\mathrm{i}\pi x)^2 V + V = T_1 \iff V = \frac{1}{1+4\pi^2x^2}T_1.$$

Notons $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ x \longmapsto \dfrac{1}{1+4\pi^2x^2}$. On a alors : $\dfrac{1}{1+4\pi^2x^2}T_1 = uT_1 = T_u$,
puis : $V = T_u \iff U = \underline{\mathfrak{G}}V = \underline{\mathfrak{G}}T_u = T_{\mathfrak{G}u}$.
On a vu en I2. : $\mathfrak{F}(\mathrm{e}^{-|x|}) = \dfrac{2}{1+4\pi^2x^2} = 2u$. Notons $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ x \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$. On a alors : $\mathfrak{F}u = v$,
donc : $u = \mathfrak{G}v = \mathfrak{F}\widetilde{v} = \mathfrak{F}v$, car v est paire, d'où : $v = \mathfrak{G}u$. Donc : $V = T_u \iff U = T_{\mathfrak{G}u} = T_v$.
Finalement, l'équation différentielle proposée admet une solution et une seule, qui est $\boxed{T_v}$

* *