

Échange Annales

PUBLICAÇÕES DA SOCIEDADE DE MATEMÁTICA DE SÃO PAULO

BSM

12032

ANNEAUX FACTORIELS

par

P. SAMUEL

Rédaction de Artibano Micali

1

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
LABORATOIRE
DE MATHÉMATIQUES PURES
INSTITUT FOURIER

SOCIÉDADÉ DE MATEMÁTICA DE SÃO PAULO

Diretor das Publicações: L. H. Jacy Monteiro

All correspondence should be addressed to

L. H. JACY MONTÉIRO
 SOCIÉDADÉ DE MATEMÁTICA DE SÃO PAULO
 RUA MARIA ANTÔNIA, 258
 SÃO PAULO - BRAZIL

ANNEAUX FACTORIELS

ERRATA

page	ligne	au lieu de	lire
2	-2	$y \leq \bar{x}$	$\bar{y} \leq \bar{x}$
8	-4	$G = \mathbf{Z}^{(p)}$	$G \cong \mathbf{Z}^{(p)}$
8	-2	$G = \mathbf{Z}^{(p)}$	$G \cong \mathbf{Z}^{(p)}$
28	-2	$p \in I_1$	$p \in I_1$
29	6	mA_p	mA_p
40	23	équivalentes	équivalentes
49	11)A,)A.
53	-9	qu en \hat{A}	que $m\hat{A}$
56	3	=)	= (
58	14).():(
60	1	l'on supposé	l'on suppose
69	3	dans cas	dans ce cas
69	4	dans cas	dans' ce cas
70	17	X	M
70	22	lemme 1;	lemme 1,
74	14	$c \in p_i$	$c \notin p_i$
74	16	$j \neq 1$	$j \neq i$
75	1	H	M
77	-10	A/m	A/m
82	-2	on	on a
83	10	(1/x	(1/x)
101	13	Eilenberg	Eilenberg

12032
SAMUEL

LE I

 LABORATOIRE
 DE MATHÉMATIQUES PURES

BSM 12032

PUBLICAÇÕES DA SOCIEDADE DE MATEMÁTICA DE SÃO PAULO

ANNEAUX FACTORIELS

par

P. SAMUEL

Rédaction de Artibano Micali

1

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I

LABORATOIRE

DE MATHÉMATIQUES PURES

INSTITUT FOURIER

SOCIEDADE DE MATEMÁTICA DE SÃO PAULO

IMPRESSO NO BRASIL
POR
A. OSHIRO - PUBLICAÇÕES
EDITORA - GRÁFICA

INTRODUCTION

Les présentes notes ont été prises à l'option du cours de Mathématiques Approfondies que j'ai professée à la Faculté des Sciences de Paris au 2-ème semestre de 1961-62 (2h de cours par semaine). Ce cours est destiné à des Licenciés de Mathématiques, qui veulent s'orienter vers les Mathématiques pures. Je n'ai donc, dans les 5 premiers chapitres, supposé connus que des notions et résultats faisant partie des programmes de la Licence française, c'est à dire la partie la plus élémentaire de l'Algèbre abstraite. Je prie donc le lecteur mieux informé de m'excuser si, à de nombreuses reprises, il constate qu'un traitement plus court ou plus systématique peut être donné en utilisant des outils plus puissants (par exemple ceux qu'on trouve dans l'Algèbre Commutative de Bourbaki). Par contre le lecteur non informé trouvera, par exemple, dans ces notes, des exposés très élémentaires du passage à un anneau de fractions, et de la complétion d'un anneau m -adique.

Le Chapitre VI, consacré essentiellement aux anneaux réguliers et à leur factorialité, utilise par contre un peu d'Algèbre Homologique. Ceci ne va pas loin, et se réduit à la définition des foncteurs Tor, et à leurs propriétés de décalage, de commutativité et de suite exacte. Dans un remarquable cours polycopié ("Homological dimension of rings and modules", University of Chicago, 1959), dont je me suis souvent inspiré, Irving Kaplansky a cependant montré que la théorie des anneaux locaux réguliers (théorèmes des syzygies, réciproque, localisation, factorialité) peut se développer très élémentairement, sans foncteurs Tor ni Ext; afin de gagner du temps, et d'éviter aussi une inutile duplication, j'ai préféré suivre une autre voie et utiliser les Tor. A la fin du chapitre VI j'ai donné, sans démonstration, un aperçu des résultats de factorialité qui n'ont pu figurer dans mon cours.

Le lecteur constatera que la théorie des anneaux factoriels, bien que très élémentaire dans son principe, a été très active ces dernières années. Même dans les 5 premiers chapitres, à côté des noms de Gauss et de Klein (et même d'Euclide), il trouvera des résultats récents de Nagata (sur les anneaux de fractions), de Mori (sur les complétés) et de l'auteur (sur la non-factorialité de certains anneaux de séries formelles). Quant aux résultats du chapitre VI, dus à Koszul, Serre, Auslander, Buchsbaum, Kaplansky et l'auteur, ils sont presque tous très récents.

Je tiens à remercier très vivement mon élève et ami Artibano Micali, qui a rédigé ces notes avec beaucoup de soin, d'intelligence, de dévouement et de compétence. Je remercie aussi Mademoiselle Lucette Dutheil, qui a participé à cette rédaction, et la Sociedade de Matemática de São Paulo qui a bien voulu se charger de la polycopie et de la diffusion.

Paris, Septembre 1962.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
CHAPITRE I - Théorie Élémentaire	1
1. Divisibilité	1
2. Définition des anneaux factoriels	6
3. Anneaux principaux	13
1. Idéaux et divisibilité	13
2. Anneaux noethériens	13
3. Anneaux principaux	15
CHAPITRE II - Anneau de polynômes sur un anneau factoriel	19
CHAPITRE III - Anneaux de fractions d'un anneau factoriel	25
1. Relations entre idéaux de A et de $S^{-1}A$	26
2. Factorialité des anneaux de fractions	29
3. Théorème de Nagata	31
4. Lien avec la Géométrie Algébrique	37
CHAPITRE IV - Complétés de certains anneaux	39
1. Idéaux maximaux	39
2. Le lemme d'Artin-Rees et le théorème de Krull	41
3. Topologie m -adique	44
4. Anneaux complétés	47
5. Complétion	49
CHAPITRE V - Séries formelles	57
1. Préliminaires	57
2. Séries formelles sur un anneau factoriel	58
CHAPITRE VI - Méthodes d'algèbre homologique dans la théorie des anneaux factoriels	65
1. Modules noethériens	65
2. Modules sur les anneaux locaux	70
3. Dimension homologique des modules sur un anneau local	74
4. Anneaux locaux réguliers	79
5. Factorialité des anneaux locaux réguliers	85
6. Anneaux globaux réguliers	88
7. Autres résultats sur les anneaux factoriels	93
1. Le théorème de Grothendieck	93
2. Groupe des classes de diviseurs d'un anneau	94
3. Réciproque du théorème de Mori	95
4. Factorialité de l'anneau des séries formelles restreintes	96
5. Dérivations	96
BIBLIOGRAPHIE	101