$< dh_A(\mathfrak{m})$. Maintenant il est facile à voir que $dh_{A_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \leq \leq dh_A(\mathfrak{p})$ (d'ailleurs, on a un résultat plus général, à savoir: soient A un anneau noethérien, S une partie multiplicative de A et M un A-module de type fini; alors $dh_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \leq \leq dh_A(M)$ - cf. D. G. Northcott, An introduction to homological algebra, Chap. IX, §9.2, th. 9) et donc,

$$dh_{A_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) < dh_A(\mathfrak{m}).$$

On remarque que pour démontrer l'inegalité dont on avait bésoin dans le théorème ci-dessus, à savoir, que $dh_{A_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \leq \leq dh_A(\mathfrak{p})$ on procède comme suit. Si $dh_A(\mathfrak{p}) = n$, d'après le théorème des syzygies, il existe une résolution libre de type fini $(0) \to L_n \to \ldots \to L_0 \to \mathfrak{p} \to (0)$ et comme $A_{\mathfrak{p}}$ est plat et $L_i \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module libre pour $i = 0, 1, \ldots, n$, ceci nous donne une résolution libre de type fini

$$(0) \to L_n \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \to \ldots \to L_0 \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \to \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \to (0)$$

et donc, $dh_{A_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \leq n$. Le lemme ci-dessous nous permet de trouver une telle résolution libre par une méthode élémentaire.

LEMME 5 - *Soient A un anneau commutatif à élément unité et intègre, S une partie multiplicative de A telle que $0 \notin S$, $B = S^{-1}A$ et φ: $A^p \to A^q$ un homomorphisme du A-module libre A^p dans le A-module libre A^q. Si $\overline{\varphi}$: $B^p \to B^q$ est l'homomorphisme obtenu de φ par extension des scalaires, alors on a $Ker(\overline{\varphi}) = B.Ker(\varphi)$ et $Im(\overline{\varphi}) = B.Im(\varphi)$.*

La deuxième assertion est triviale et démontrons que $Ker(\overline{\varphi}) = B.Ker\overline{\varphi}$. Or, il est clair que $B.Ker(\varphi) \subset Ker(\overline{\varphi})$ et soit $y \in Ker(\overline{\varphi})$. Si $e_1, \ldots, e_p$ est la base canonique du B-module libre B^p, alors on peut écrire que $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i$ et chaque $y_i \in B$ s'écrit sous la forme $y_i = a_i/s$ où les a_i sont dans l'anneau A et où $s \in S$. Donc, $0 = \overline{\varphi}(y) = \sum_{i=1}^{p} y_i \overline{\varphi}(e_i)$ et ceci nous montre que $\sum_{i=1}^{p} a_i \varphi(e_i) = 0$ (on remarque ici qu'on note encore $e_1, \ldots, e_p$ la base canonique du A-module libre A^p). On a ainsi montré que $\sum_{i=1}^{p} a_i e_i \in Ker(\varphi)$ et donc, $y = (1/s) \sum_{i=1}^{p} a_i e_i \in B.Ker(\varphi)$.

§5. FACTORIALITÉ DES ANNEAUX LOCAUX RÉGULIERS

LEMME 6 - *Soient A un anneau commutatif à élément unité et P un A-module projectif admettant une résolution libre finie. Alors il existe un A-module libre L tel que $P \oplus L$ soit libre.*

Soit $(0) \to L_n \to L_{n-1} \to \ldots \to L \xrightarrow{\varphi} P \to (0)$ une résolution libre finie de P et on va démontrer le lemme par récurrence sur la longueur de la résolution. Pour $n = 1$ on a $(0) \to L_1 \to \to L_0 \to P \to (0)$ et comme P est projectif alors $L_0 = L_1 \oplus P$. Dans le cas général on écrit la suite exacte $(0) \to Ker(\varphi) \to L_0 \to P \to (0)$ et comme P est projectif on a $L_0 = P \oplus Ker(\varphi)$. Ceci nous montre que $Ker(\varphi)$ est aussi projectif et d'après l'hypothèse de récurrence il existe des modules libres L et L' tels que $L' \oplus Ker(\varphi) = L$. On a ainsi $P \oplus L = P \oplus Ker(\varphi) \oplus L' = L_0 \oplus L'$ et comme $L_0 \oplus L'$ est libre, le lemme est démontré.

On remarque que si P est un A-module projectif et L est un A-module libre tels que $P \oplus L$ soit libre, ceci n'entraîne pas, en général, que P soit libre. Toutefois, cela est vrai si P est un idéal. Plus précisement, on a le lemme suivant:

LEMME 7 - *Soient A un anneau commutatif à élément unité et intègre et $\mathfrak{a}$ un idéal de A tel que $\mathfrak{a} \oplus A^n = A^{n+1}$. Alors $\mathfrak{a}$ est principal.*

Soit $e_0, e_1, \ldots, e_n$ la base canonique du A-module libre A^{n+1} et on choisit une base x_0 de A et une base $x_1, \ldots, x_n$ de A^n. On peut alors définir une homomorphisme φ: $A^{n+1} \longrightarrow \mathfrak{a} \oplus A^n (\subset A \oplus A^n)$ en posant $\varphi(e_j) = a_j x_0 + \sum_{i=1}^{n} c_{j,i} x_i$ où les a_j et les $c_{j,i}$ sont dans l'anneau A. On va désigner par d le determinant $det(\varphi)$ et par d_j le cofacteur de a_j dans le déterminant $det(\varphi)$. Il est clair que $d = \sum_{j=0}^{n} a_j d_j$ et si l'on pose

$y_0=\sum_{j=0}^{n} d_j e_j \in A^{n+1}$, alors

$$\varphi(y_0)=\sum_{j=0}^{n} d_j\varphi(e_j)=\sum_{j=0}^{n} d_j(a_jx_0+\sum_{i=1}^{n} c_{j,i}x_i).$$

Comme on a $\sum_{j=0}^{n} d_jc_{j,i}=0$ pour $i=1,\dots,n$, alors $\varphi(y_0)=dx_0$. Pour chaque i tel que $1\leq i\leq n$, il existe un $y_i\in A^{n+1}$ tel que $\varphi(y_i)=x_i$ (on remarque que φ est un homomorphisme surjectif) et donc, les rélations $det(\varphi(y_0),\dots,\varphi(y_n))=det(\varphi).det(y_0,\dots,y_n)=$ $=d.det(y_0,\dots,y_n)$ et $det(\varphi(y_0),\dots,\varphi(y_n))=det(dx_0,x_1,\dots,x_n)=$ $=d.det(x_0,x_1,\dots,x_n)=d$ (car $det(x_0,x_1,\dots,x_n)=1$) nous donnent $d.det(y_0,\dots,y_n)=d$. Comme A est intègre, il en resulte que $det(y_0,\dots,y_n)=1$ et ceci nous montre que $y_0,\dots,y_n$ est une base de A^{n+1}. Pour tout $i\geq 1$, $\varphi(y_i)$ est dans le deuxième facteur direct de la somme $\mathfrak{a}\oplus A^n$ et comme φ est surjectif, alors $\mathfrak{a}x_0=\varphi(Ay_0)=Adx_0$. Puisque A est intègre, il s'en suit que $\mathfrak{a}=Ad$.

On peut encore donner du lemme ci-dessus la jolie démonstration que voici: on sait que $\bigwedge^{n+1}(A^{n+1})=A$ et que $\bigwedge^{n+1}(\mathfrak{a}\oplus A^n)=\sum_{j=0}^{n+1}\bigwedge^{j}(\mathfrak{a})\oplus_A\bigwedge^{n+1-j}(A^n)$. Pour $j=0$ on a $\bigwedge^{\circ}(\mathfrak{a})=A$ et $\bigwedge^{n+1}(A^n)=(0)$; pour $j=1$, on a $\bigwedge^{1}(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}$ et $\bigwedge^{n}(A^n)=A$ et finalement, pour $j\geq 2$, $\bigwedge^{j}(\mathfrak{a})$ est un A-module de torsion. Ceci nous montre que $A=\mathfrak{a}\oplus_A A$ donc, $\mathfrak{a}$ est libre, c'est à dire principal.

LEMME 8 - *Soient A un anneau noethérien intègre, K son corps de fractions et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Alors il y a équivalence entre les assertions suivantes:* (a) *$\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ est un idéal principal de $A_\mathfrak{p}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de l'anneau A;* (b) *il existe des éléments b_i dans $\mathfrak{a}$ et u_i dans K (en nombre fini) tels que $u_i\mathfrak{a}\subset A$ pour tout i et $\sum_i b_iu_i=1$;* (c) *l'idéal $\mathfrak{a}$ est un A-module projectif.*

Supposons que $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ soit un idéal principal de $A_\mathfrak{p}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de A, c'est à dire, que $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}=b_\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de A et on peut supposer $b_\mathfrak{p}\in\mathfrak{a}$ pour tout $\mathfrak{p}$. Pour tout x dans $\mathfrak{a}$ on peut écrire $x=(c/s)b_\mathfrak{p}$ avec $c\in A$ et $s\notin\mathfrak{p}$ et comme $\mathfrak{a}$ est de type fini, on peut prendre le même dénominateur, qu'on notera $s_\mathfrak{p}$, pour tout x dans $\mathfrak{a}$. Ceci nous montre que $s_\mathfrak{p}\mathfrak{a}\subset b_\mathfrak{p}A$. L'idéal engendré par les $s_\mathfrak{p}$ n'est contenu dans aucun idéal maximal $\mathfrak{p}$ de A et donc, cet idéal est l'anneau A tout entier. En particulier, l'unité peut s'écrire sous la forme $1=\sum_\mathfrak{p} c_\mathfrak{p}s_\mathfrak{p}$ où les $c_\mathfrak{p}$ sont dans l'anneau A et sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Supposons que $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ sont les idéaux maximaux de de A pour lesquels $c_{\mathfrak{p}_i}\neq 0$ et on va poser $c_i=c_{\mathfrak{p}_i}\neq 0$ pour $i=1,\dots,n$, $s_i=s_{\mathfrak{p}_i}$, $b_i=b_{\mathfrak{p}_i}$ et $u_i=s_ic_i/b_i\in K$ pour $i=1,\dots,n$. Il est facile à voir que $u_i\mathfrak{a}=(c_i/b_i)(s_i\mathfrak{a})\subset(c_i/b_i)Ab_i=Ac_i\subset A$, c'est à dire, $u_i\mathfrak{a}\subset A$ pour $i=1,\dots,n$ et $\sum_{i=1}^{n}u_ib_i=\sum_{i=1}^{n}s_ic_i=1$. Ceci nous montre que (a) $\Rightarrow$ (b).

Supposons maintenant que (b) soit vraie; on va définir deux homomorphismes $\mathfrak{a}\xrightarrow{\varphi}A^n\xrightarrow{\varphi'}\mathfrak{a}$ en posant

$$\varphi(c)=\sum_{i=1}^{n}u_ice_i \quad\text{et}\quad \varphi'(\sum_{i=1}^{n}a_ie_i)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

pour tout $c\in\mathfrak{a}$ et pour tout $(a_1,\dots,a_n)\in A^n$, où $e_1,\dots,e_n$ est la base canonique du A-module libre A^n. On voit que

$$\varphi'(\varphi(c))=\varphi'(\sum_{i=1}^{n}u_ice_i)=\sum_{i=1}^{n}u_icb_i=c\sum_{i=1}^{n}u_ib_i=c,\quad\text{car}\quad\sum_{i=1}^{n}u_ib_i=1.$$

Ceci nous montre que on a $\varphi'\circ\varphi=1_\mathfrak{a}$ et donc, $\mathfrak{a}$ est un facteur direct de A^n, c'est à dire, $\mathfrak{a}$ est un A-module projectif. On a ainsi montré que (b) $\Rightarrow$ (c).

Supposons maintenant que $\mathfrak{a}$ soit un A-module projectif. Alors $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module projectif et comme A est noethérien, il en est de même $A_\mathfrak{p}$, ce qui entraîne que $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module projectif de type fini. Puisque $A_\mathfrak{p}$ est local noethérien, alors $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module libre et donc, un idéal principal.

D'après le lemme 8, on dira que, pour les idéaux, *projectif équivaut à localement principal.*

THÉORÈME 11 - (*Théorème de Auslander-Buschbaum*). *Tout anneau local régulier est factoriel.*

Soit A un anneau local régulier et on va démontrer le théorème par récurrence sur $\delta(A)$. On remarque que A étant local régulier, $\delta(A)$ est finie. Si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, alors on sait que $\delta(A)=dh_A(\mathfrak{m})+1$ et donc, si $\delta(A)=0$ on a $dh_A(\mathfrak{m})=-1$ et ceci nous montre que $\mathfrak{m}=(0)$. Donc, A est un corps et donc, factoriel. Soit maintenant t un premier élément d'une A-suite engendrant l'idéal $\mathfrak{m}$. On sait que l'élément t est premier et donc, d'après le théorème de Nagata, il suffit de démontrer que l'anneau $B=A[1/t]$ est factoriel. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de B, alors $B_\mathfrak{p}=A_{\mathfrak{p}\cap A}$ (on remarque que $\mathfrak{p}\cap A$ est un idéal premier de A non maximal) et donc, $B_\mathfrak{p}$ est local régulier, car A étant local régulier, $A_{\mathfrak{p}\cap A}$ l'est aussi. Comme $\delta(B_\mathfrak{p})=\delta(A_{\mathfrak{p}\cap A})\leq\delta(A)$, l'hypothèse de récurrence nous montre que $B_\mathfrak{p}$ est factoriel pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de B. Pour montrer que B est factoriel, il suffit de montrer que si $\mathfrak{b}=Bu\cap Bv$ est l'intersection de deux idéaux principaux, alors l'idéal $\mathfrak{b}$ est lui même principal, car l'anneau B est noethérien. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de B on a $\mathfrak{b}B_\mathfrak{p}=B_\mathfrak{p}u\cap B_\mathfrak{p}v$ et comme $B_\mathfrak{p}$ est factoriel, alors $\mathfrak{b}B_\mathfrak{p}$ est un idéal principal c'est à dire, $\mathfrak{b}B_\mathfrak{p}$ est un $B_\mathfrak{p}$-module libre pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de B. Ceci nous montre qùe $\mathfrak{b}$ est un B-module projectif. D'autre part, A étant un anneau local régulier, le théorème des syzygies nous montre que $\mathfrak{b}\cap A$ admet une résolution libre de type fini et donc, $\mathfrak{b}$ lui aussi admet une résolution libre de type fini. Par le lemme 6, il existe un B-module libre B^n tel que $\mathfrak{b}\oplus B^n=B^{n+1}$ et comme B est intègre, d'après le lemme 7, $\mathfrak{b}$ est principal. Ceci nous montre que B est factoriel et par le théorème de Nagata, il en est de même de l'anneau A. Cette démonstration est dûe à I. Kaplansky.

§6. ANNEAUX GLOBAUX RÉGULIERS

LEMME 9 - *Soit A un anneau commutatif à élément unité et supposons, de plus, que A soit noethérien intègre. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes: (1) $A_\mathfrak{m}$ est local régulier pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A; (2) $A_\mathfrak{p}$ est local régulier pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A.*

L'implication $(2)\Rightarrow(1)$ est triviale et montrons que $(1)\Rightarrow(2)$. Soit alors $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{p}$. On a $(A_\mathfrak{m})_{\mathfrak{p}A_\mathfrak{m}}=A_{\mathfrak{p}A_\mathfrak{m}\cap A}=A_\mathfrak{p}$ et comme $A_\mathfrak{m}$ est local régulier par hypothèse, alors d'après le théorème 10, $(A_\mathfrak{m})_{\mathfrak{p}A_\mathfrak{m}}$ est local régulier. Ceci nous montre que $A_\mathfrak{p}$ est local régulier.

Un anneau A tel que les conditions équivalentes du lemme 9 soient vérifiées s'appele un *annneau régulier*. Il est clair que si A est un anneau régulier et si S est une partie multiplicative de A, alors $S^{-1}A$ est aussi un anneau régulier. En effet, on n'a qu'à voir que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $S^{-1}A$ on a $(S^{-1}A)_\mathfrak{m}=A_{\mathfrak{m}\cap A}$ et que A étant régulier, $A_{\mathfrak{m}\cap A}$ l'est aussi. On voit encore que si A est un anneau régulier et si $u,v\in A$, alors l'idéal $Au\cap Av$ est un A-module projectif. En effet, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A on a $(Au\cap Av)_\mathfrak{m}=A_\mathfrak{m}u\cap A_\mathfrak{m}v$ et comme $A_\mathfrak{m}$ est local régulier, donc factoriel, alors $A_\mathfrak{m}u\cap A_\mathfrak{m}v$ est un idéal principal. Ceci nous montre que l'idéal $Au\cap Av$ est localement principal, donc projectif.

LEMME 10 - *Soient A un anneau factoriel noethérien et $\mathfrak{b}$ un idéal projectif de A. Alors $\mathfrak{b}$ est un idéal principal.*

Comme A est factoriel, il est intègre, et soit K son corps de fractions. On sait, d'après le lemme 8, qu'il existe des éléments $b_i\in\mathfrak{b}$ et $u_i\in K$ (en nombre fini) tels que $u_i\mathfrak{b}\subset A$ pour tout i et $\sum_i b_iu_i=1$. On va montrer que $\mathfrak{b}=\bigcap_i Au_i^{-1}$. En effet, d'après $u_i\mathfrak{b}\subset A$ pour tout i, on a $\mathfrak{b}\subset Au_i^{-1}$ pour tout i et donc, $\mathfrak{b}\subset\bigcap_i Au_i^{-1}$. Maintenant, si l'on prend $x\in\bigcap_i Au_i^{-1}$, alors $x\in Au_i^{-1}$ pour tout i et donc, pour chaque i il existe un

$a_i \in A$ tel que $u_i x = a_i$. Ceci nous donne $b_i u_i x = b_i a_i$ pour tout i et comme $\sum_i b_i u_i = 1$ on a $x = \sum_i b_i a_i \in \mathfrak{b}$. On a montré ainsi que $\mathfrak{b} = \bigcap_i A u_i^{-1}$ c'est à dire, $\mathfrak{b}$ est une intersection finie d'idéaux principaux. Comme A est factoriel, cette intersection est encore un idéal principal et donc, $\mathfrak{b}$ est principal.

THÉORÈME 12 - *Si A est un anneau régulier (resp. régulier et factoriel), alors l'anneau de séries formelles $A[[X]]$ est aussi régulier (resp. régulier et factoriel).*

1) *Concernant la régularité*. Supposons que A soit un anneau régulier et montrons que l'anneau de séries formelles $B = A[[X]]$ est aussi régulier. Tout d'abord on va démontrer que si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de B, alors $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m} \cap A)B + BX$ et pour cela on n'a qu'à démontrer que $X \in \mathfrak{m}$, ou encore, que $X \in Rad(B)$. Pour démontrer ceci on voit que pour tout élément $b \in B$, la série formelle $1 + bX$ est inversible dans B, son inverse étant la série $(1+bX)^{-1} = 1 - bX + b^2X^2 - b^3X^3 + \ldots$, et donc $X \in Rad(B)$. Ceci étant, on démontre facilement que $B/\mathfrak{m} = A/(\mathfrak{m} \cap A)$ et donc, $\mathfrak{m} \cap A$ est un idéal maximal de A. Comme $A_{\mathfrak{m} \cap A}$ est local régulier, alors son idéal maximal $(\mathfrak{m} \cap A)A_{\mathfrak{m} \cap A}$ est engendrée par une $(A_{\mathfrak{m} \cap A})$-suite $c_1, \ldots, c_s$ et comme $\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}$ (idéal maximal de l'anneau local $B_{\mathfrak{m}}$) est engendré par $(\mathfrak{m} \cap A)A_{\mathfrak{m} \cap A}$ et par l'indéterminée X (on remarque que $A_{\mathfrak{m} \cap A} \subset B_{\mathfrak{m}}$, car $A - (\mathfrak{m} \cap A) \subset B - \mathfrak{m}$), il s'en suit que $\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}$ est engendrée par la $B_{\mathfrak{m}}$-suite $X, c_1, \ldots, c_s$. Ceci nous montre que $B_{\mathfrak{m}}$ est un anneau local régulier et donc, B est régulier. On remarque que A étant noethérien intègre, B l'est aussi.

2) *Concernant la factorialité*. Supposons que l'anneau A soit régulier et factoriel et montrons que B l'est aussi. D'après la partie 1) de la démonstration, il faut démontrer seulement que B est factoriel. Comme A est noethérien, il suffit de démontrer que étant donnés $u, v \in B$, alors l'idéal $\mathfrak{b} = Bu \cap Bv$ est principal. On peut supposer que u et v ne sont pas multiples de X, car si $u = X^m u'$ et $v = X^q v'$ avec $u', v' \in B$ et où $m \geq 0$ et $q \geq 0$ sont deux entiers, alors on aurait $Bu \cap Bv = (Bu' \cap Bv')X^{\max(m,q)}$ (on rappele ici que X est un élément premier de l'anneau B). Supposons alors que u et v ne soient pas multiples de X. Puisque A est un anneau régulier, alors $\mathfrak{b}$ est un A-module projectif (car il est localement principal), donc plat et la suite exacte $(0) \to BX \to B \to A \to (0)$ nous donne $(0) \to \mathfrak{b}X \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} \oplus_B A \to (0)$. On remarque que $B/BX = A$. On a ainsi $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}X = \mathfrak{b} \oplus_B A$ et ceci nous montre que $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}X$ est un A-module projectif. Si l'on montre que $\mathfrak{b}X = \mathfrak{b} \cap BX$, alors $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}X = (\mathfrak{b} + BX)/BX$ est un idéal de $B/BX = A$ et donc, $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}X$ est un idéal projectif de A. Puisque l'anneau A est factoriel, d'après le lemme 10, $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}X$ est un idéal principal de A et donc, un A-module libre. Le théorème 5 nous montre alors que $\mathfrak{b}$ est un A-module libre et comme A est factoriel, alors $\mathfrak{b}$ est principal. On a ainsi montré que B est un anneau factoriel. Pour terminer la démonstration, il faut seulement montrer que $\mathfrak{b} \cap BX = \mathfrak{b}X$. Or on sait que $\mathfrak{b} \cap BX \supset \mathfrak{b}X$ et soit $c \in \mathfrak{b} \cap BX$. On peut écrire $c = u'u = v'v$ avec $u', v' \in B$ et comme $u'u \in BX$ (idéal premier de B) et $u \notin BX$, alors $u' \in BX$, c'est à dire, on peut écrire $u' = u''X$ avec $u'' \in B$. De même, comme $v'v \in BX$ et $v \notin BX$, alors $v' \in BX$, c'est à dire, on a $v' = v''X$ avec $v'' \in B$. La rélation $v'v = u'u$ s'ecrit alors sous la forme $v''vX = u''uX$, d'où $v''v = u''u$ et ceci nous montre que $u''u \in Bu \cap Bv = \mathfrak{b}$. On a ainsi $c = u''uX \in \mathfrak{b}X$ et on a ce qu'il faut.

COROLLAIRE 1 - *Si A est un anneau régulier (resp. régulier et factoriel) alors l'anneau des séries formelles $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ est aussi régulier (resp. régulier et factoriel).*

Démonstration par récurrence sur le nombre n d'indeterminées.

COROLLAIRE 2 - *Si K est un corps ou un anneau principal, alors l'anneau des séries formelles $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ est régulier et factoriel.*

Il suffit de démontrer que si K est un corps ou un anneau principal, alors K est régulier et factoriel. Pour un corps ceci est évident et supposons que K soit un anneau principal. On sait déjà que un anneau principal est factoriel et on va montrer que K est régulier. Pour cela, soit $\mathfrak{m}$ un idéal principal de K, $\mathfrak{m}=Kp$, où p est un élément extremal de K et $p\neq 0$. On voit facilement que $\mathfrak{m}K_{\mathfrak{m}}$ est principal (c'est un idéal engendré par l'élément p) et comme p n'est pas diviseur de zero dans $K_{\mathfrak{m}}$, alors p est une $K_{\mathfrak{m}}$-suite. Ceci nous montre que $K_{\mathfrak{m}}$ est un anneau régulier.

REMARQUE - Si K est un corps, alors on peut aussi démontrer que l'anneau de séries formelles $K[[X_1,\dots,X_n]]$ est factoriel en se servant du théorème de préparation de Weierstrass (cf. O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra Vol. II, Chap. VII, §1, th. 6).

THÉORÈME 13 - *Si A est un anneau régulier (resp. régulier et factoriel), alors l'anneau des polynômes $A[X]$ est aussi régulier* (*resp. régulier et factoriel*).

En vertu du lemme de Gauss, il suffit de démontrer que si A est régulier, alors l'anneau de polynômes $B=A[X]$ l'est aussi. Soit alors $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de B et soit $C=(A_{\mathfrak{m}\cap A})[X]$. Puisque $A_{\mathfrak{m}\cap A}$ est un sous-anneau de $B_{\mathfrak{m}}$, alors C est aussi un sous-anneau de $B_{\mathfrak{m}}$. On voit que $B\subset C$ et que $B_{\mathfrak{m}}=C_{\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}\cap C}$ et donc A étant régulier, $A_{\mathfrak{m}\cap A}$ est local régulier et il faut démontrer que ceci entraîne que C est régulier, car à ce moment là, $C_{\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}\cap C}$ est local régulier et il en est de même de $B_{\mathfrak{m}}$. Mais, $B_{\mathfrak{m}}$ local régulier pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B équivaut à B régulier. En changeant les notations, on est ramené à démontrer le résultat suivant: *si A est un anneau local régulier, alors l'anneau de polynômes $B=A[X]$ est un anneau régulier*. En effet, soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de B et on va montrer que $B_{\mathfrak{m}}$ est un anneau local régulier. Pour cela, on a vu qu'on peut supposer que $\mathfrak{m}\cap A$ est l'idéal maximal de A et donc, il est engendré par une A-suite $a_1,\dots,a_n$ (où n est la dimension de Krull de A). On voit facilement que $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}\cap A)B$ est l'idéal maximal de $B/(\mathfrak{m}\cap A)B=$ $=(A/\mathfrak{m}\cap A)[X]$ (on remarque que $(\mathfrak{m}\cap A)B\subset\mathfrak{m}$) et comme $A/\mathfrak{m}\cap A$ est un corps, alors $(A/\mathfrak{m}\cap A)[X]$ est un anneau principal. Ceci nous montre que $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}\cap A)B$ est un idéal principal, c'est à dire, engendré par un polynôme non constant $\bar{f}(X)\in(A/\mathfrak{m}\cap A)[X]$. Comme $\bar{f}(X)$ est la classe d'un polynôme $f(X)\in\mathfrak{m}$, alors $\mathfrak{m}=(a_1,\dots,a_n,f(X))B$ et $a_1,\dots,a_n,f(X)$ est une B-suite, car $\bar{f}(X)$ n'est pas diviseur de zero dans $B/(\mathfrak{m}\cap A)B$. En passant aux anneaux de fractions on en déduit que $\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}$ est engendré par la $B_{\mathfrak{m}}$-suite $a_1,\dots,a_n,f(X)$. Donc, $B_{\mathfrak{m}}$ est un anneau local régulier.

COROLLAIRE - *Soit A un anneau régulier et factoriel. Alors tout anneau du type*

$$A[X_1,\dots,X_m]\ [[Y_1,\dots,Y_n]]\ [Z_1,\dots,Z_q]\ [[T_1,\dots,T_r]]$$

est régulier et factoriel.

REMARQUE - L'ordre sélon laquelle on fait les adjonctions nous donne des anneaux differents. En effet, $A[X][[Y]]\supsetneqq A[[Y]][X]$.

§7. AUTRES RÉSULTATS SUR LES ANNEAUX FACTORIELS

1. *Le théorème de Grothendieck*

Soient R un anneau local régulier et I un idéal premier de R engendré par une R-suite et on considère l'anneau quotient $A=R/I$. *Si $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau factoriel pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A de hauteur ≤ 3, alors A est un anneau factoriel*. La démonstration fait appel à la théorie des schémas et il n'en existe par l'instant pas de démonstration élémentaire. On vera par la suite quelques applications du théorème de Grothendieck.

Applications. (a) Soit V une variété algébrique dans l'espace projectif $P_n(K)$ telle que V soit non-singulière, $dim(V)\geq 3$ et définie par $codim(V)$ équations, c'est à dire, l'idéal de la variété V est engendré par $codim(V)$ éléments. Géométriquement ceci veut dire que V est une intersection complète. Alors, *l'anneau de la variété V est factoriel (Théo-*

rème de Lefschetz). En effet, soient C le cône de la variété V, A l'anneau local de O sur C, R l'anneau local de O sur K^{n+1} et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A de hauteur ≤ 3. On voit facilement que A s'écrit comme un quotient de R et que $\mathfrak{p}$ définit une sous-variété du cône C. Comme l'origine est le seul point singulier sur C et que $dim(C) \geq 4$, alors $A_{\mathfrak{p}}$ est local régulier et donc, $A_{\mathfrak{p}}$ est factoriel. D'après le théorème de Grothendieck, A est factoriel.

(b) Soit V une variété algébrique de dimension $n-1$ dans l'espace projectif $P_n(K)$ et supposons que $dim(V) \geq 3$ et que les points singuliers de V forment un ensemble algébrique de codimension ≥ 4. Alors *l'anneau de la variété V est factoriel (Théorème de Andreotti-Salmon).* La démonstration se fait à partir du théorème de Grothendieck par le même procédé que ci-dessus.

(c) La partie commune aux théorèmes de Lefschetz et de Andreotti-Salmon est un résultat plus ancien dû à Severi.

2. *Groupe des classes de diviseurs d'un anneau*

Soit A un anneau intègre. On dit qu'un idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$ de A est *divisoriel* s'il est intersection d'idéaux principaux fractionnaires. Soit $D(A)$ l'ensemble des idéaux divisoriels de A et on va munir $D(A)$ d'une multiplication. Pour cela, étant donnés deux idéaux divisoriels $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, le produit $\mathfrak{a}.\mathfrak{b}$ n'est pas forcement un idéal divisoriel, mais on considère alors le plus petit idéal divisoriel contenant $\mathfrak{a}.\mathfrak{b}$, c'est à dire, l'idéal $A:(A:(\mathfrak{a}.\mathfrak{b}))$. On dit que A est un *anneau de Krull* si $D(A)$ est un groupe par cette loi de composition. Par exemple, un anneau noethérien intégralement clos est un anneau de Krull. Il est clair que tout idéal principal fractionnaire de A est divisoriel et soit $P(A)$ le sous-groupe de $D(A)$ formé par les idéaux principaux fractionnaires de A. Le groupe quotient $C(A) = D(A)/P(A)$ s'appele le *groupe des classes de diviseurs de l'anneau A* et on peut démontrer que *pour que A soit factoriel il faut et il suffit que A soit un anneau de Krull et que $C(A) = (0)$.*

Soient maintenant A' un anneau de Krull, A un sous-anneau de Krull de A' et supposons que A' soit un A-module plat (cf. H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press 1956). On peut démontrer (cf. P. Samuel, Sur les anneaux factoriels, Bull. Soc. Math. France 89 (1961), 155-173) qu'il existe un homomorphisme canonique $C(A) \to C(A')$ et on va étudier par la suite plusieurs cas particuliers.

Soit A un anneau de Krull. L'homomorphisme canonique $C(A) \to C(A[X])$ est bijectif et donc, *A est factoriel si et seulement si $A[X]$ l'est aussi (théorème de Gauss).*

Soit S une partie multiplicative d'un anneau de Krull A ne contenant pas le zero. L'homomorphisme canonique $C(A) \to C(S^{-1}A)$ est surjectif et, de plus, si S est engendré par des éléments premiers alors $C(A) \to C(S^{-1}A)$ est bijectif. Il resulte de ceci que *si A est factoriel, alors il en est de même de $S^{-1}A$* et, de plus, *si S est engendré par des éléments premiers, alors A est factoriel si et seulement si $S^{-1}A$ l'est aussi (théorème de Nagata).*

Finalement, soit A un anneau de Zariski tel que son complété $\hat{A}$ soit un anneau de Krull. Alors, l'homomorphisme canonique $C(A) \to C(\hat{A})$ est injectif et ceci nous donne le *théorème de Mori.*

3. *Réciproque du théorème de Mori*

On a déjà vu que si A est un anneau de Zariski tel que son complété $\hat{A}$ soit factoriel, alors A est aussi factoriel (théorème de Mori). On va montrer que la réciproque de ce résultat n'est pas vraie. Pour cela, soit B un anneau local factoriel tel que l'anneau de séries formelles $B[[X]]$ ne soit pas factoriel (cf. Chap. V - Séries formelles) et on considère l'anneau local $A=B[X]_{(X)}$. On sait que A est factoriel et le complété de l'anneau de séries formelles $B[[X]]$ est l'anneau $\hat{A}=\hat{B}[[X]]$. Mais alors, *l'anneau A n'est pas factoriel*, car s'il en était ainsi, d'après le théorème de Mori l'anneau $B[[X]]$ sérait factoriel.

4. *Factorialité de l'anneau des séries formelles restreintes*

Soient A un anneau commutatif à élément unité muni d'une topologie linéaire et $A\{X_1,\ldots,X_n\}$ l'anneau des séries formelles restreintes en les indéterminées $X_1,\ldots,X_n$ à coefficients dans l'anneau A (cf. N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Chap. III, §4, n.º 2). On démontre (cf. P. Salmon, Sur les séries formelles restreintes, C. R. Ac. Sc. Paris, 9 Juillet 1962) que *si A est un anneau noethérien il en est de même de $A\{X_1,\ldots,X_n\}$* et que *si A est un anneau noethérien local et régulier, alors l'anneau $A\{X_1,\ldots,X_n\}$ est régulier* (non nécessairement local) *et factoriel*.

5. *Dérivations*

Soient A un anneau factoriel de caractéristique $p\neq 0$, $d\colon A\to A$ une dérivation de l'anneau A et $A'=Ker(d)$. On voit facilement que A' est un sous-anneau de A et que si K est le corps de fractions de A et K' est le corps de fractions de A', alors K' est un sous-corps de K. On démontre que $[K:K']=p^n$ où $n\geq 1$ est un entier; supposons ici que $[K:K']=p$, c'est à dire, que K soit un K'-espace vectoriel de dimension p. Pour tout élément $a\in A$, $a\neq 0$, le quotient $d(a)/a$ s'appele la *dérivée logarithmique de a* et on voit que, en général, $d(a)/a\in K$ pour tout $a\in A$, $a\neq 0$. Soit alors D l'ensemble des $d(a)/a\in A$ pour a parcourant A, c'est à dire, $D=\{d(a)/a\in A \mid a\in A\}$. On voit que D est un sous-groupe additif de A car, pour $a,b\in A$ tels que $d(a)/a\in A$ et $d(b)/b\in A$, on a $d(ab)/ab=(d(a)/a)+(d(b)/b)$. Soit maintenant D' l'ensemble des dérivées logarithmiques $d(u)/u\in D$ telles que u soit inversible dans A. On voit que D' est un sous-groupe de D et on démontre que $C(A')=D/D'$. Ceci nous permet de calculer un certain nombre de groupes de classes de diviseurs. Voici quelques exemples: soient k un corps de caractéristique 2 et $A=k[x,y]$ (respect. $A=k[[x,y]]$). On définit une dérivation d sur A en posant d triviale sur k, $d(x)=y^{2j}$ où $j\geq 0$ est un entier et $d(y)=x^2$. On peut montrer que si $A'=Ker(d)$, alors on a $A'=k[u,v,w]$ (respect. $A'=k[[u,v,w]]$) avec la rélation $w^2=u^3+v^{2j+1}$. On remarque ici que $d(x^3+y^{2j+1})=0$. On va maintenant considérer les deux cas suivants:

Cas de l'anneau des polynômes. Si $2j+1\not\equiv 0$ (mod. 3), alors $C(A')=(0)$ et donc, A' est factoriel; pour $2j+1\equiv 0$ (mod 3), on a $C(A')=\mathbf{Z}/(2)\times\mathbf{Z}/(2)$ (produit direct).

Cas de l'anneau des séries formelles. Si $2j+1\not\equiv 0$ (mod 3), on a $C(A')=k^{[j/3]}$ où $[j/3]$ est la partie entière de $j/3$ et si $2j+1\equiv 0$ (mod 3), alors on a $C(A')=k^{[j/3]}\times\mathbf{Z}/(2)\times\mathbf{Z}/(2)$. Pour $j=2$ on a $C(A')=(0)$ et donc, A' est factoriel (on rappelle qu'ici on a $w^2=u^3+v^5$) tandis que pour $j=3$ A' n'est pas factoriel (on a $w^2=u^3+v^7$).

(Paris, le 25 Septembre 1962)