CHAPITRE VI

MÉTHODES D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE DANS LA THÉORIE DES ANNEAUX FACTORIELS

§1. MODULES NOETHÉRIENS

Soient A un anneau et M un groupe abélien. On dira que M est un *A-module à gauche* s'il est muni d'une loi de composition externe ayant A comme ensemble d'opérateurs; cette loi fait correspondre à chaque paire $(a,x) \in A \times M$ un élément noté $ax \in M$, de telle façon que les axiomes suivants soient vérifiés:

(1) $a(x+y)=ax+ay$, pour tout $a \in A$ et $(x,y) \in M \times M$;

(2) $(a+b)x=ax+bx$, pour tout $(a,b) \in A \times A$ et $x \in M$;

(3) $a(bx)=(ab)x$, pour tout $(a,b) \in A \times A$ et $x \in M$.

De même, on peut introduire la notion de *A-module à droite*. Si l'anneau A a un élément unité (qu'on notera 1) et si, de plus, on a l'axiome:

(4) $1.x=x$ pour tout $x \in M$,

alors on dira que M est un *A-module à gauche unitaire*. De même, on a la notion de *A-module à droite unitaire*. Si l'anneau A est commutatif, les notions de module à gauche et à droite sont les mêmes. Plus précisement, si A est commutatif, tout A-module à gauche peut-être muni d'une structure de A-module à droite et réciproquemant. A ce moment là on dira tout simplement que M est un *A-module* (respectivement, un *A-module unitaire*). On remarque que tout A-module à gauche M se décompose en une somme directe d'un A-module à gauche unitaire M' et d'un A-module à gauche M'' tel que si 1 est l'élément unité de A, alors $1.M''=(0)$. Il suffit de prendre $M'=\{x\in M \mid 1.x=x\}$ et $M''=\{x-1.x\in M \mid x\in M\}$ et il est facile à vérifier que M' est unitaire, que $1.M''=(0)$ et que $M=M'\oplus M''$. Des exemples de A-modules: A est un A-module unitaire et les sous-A-modules à gauche de A sont les idéaux à gauche.

THÉORÈME 1 - *Soient A un anneau et M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *la condition maximale pour les sous-A-modules de M;*

(2) *toute suite croissante de sous-A-modules de M est stationnaire;*

(3) *tout sous-A-module de M est de type fini, c'est à dire, pour tout sous-A-module E de M, il existe un nombre fini d'éléments $x_1,\dots,x_n$ de E tels que tout élément x de E s'écrit sous la forme $x=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ avec les a_i dans l'anneau A.*

Démonstration aux soins du lecteur. Voir, au chapitre I, §3, n. 2, théorème 4, une demonstration analogue par les anneaux.

Un module qui vérifie les conditions équivalentes du théorème 1 s'appele un *module noethérien*. Un *anneau* A est *noethérien* si le A-module A l'est.

THÉORÈME 2 - *Soient A un anneau et*

$$(0)\to M'\to M\to M''\to(0)$$

une suite exacte de A-modules. Pour que M soit noethérien il faut et il suffit que M' et M'' soient noethériens.

Supposons que M soit noethérien et soient N' un sous-A-module de M' et N'' un sous-A-module de M''. Comme M' s'identifie à un sous-A-module de M, alors N' est aussi un sous-A-module de M et donc, il est de type fini. Ceci nous montre que M' est noethérien. D'autre part, on sait qu'on peut écrire $M''=M/M'$ et donc, $N''=N/M'$ où N est un sous-A-module de M contenant M'. Comme N est de type fini, il en est de même de N''. On a ainsi montré que M'' est noethérien. Supposons maintenant que M' et M'' soient noethériens et soit N un sous-A-module de M. On va montrer que N est de type fini. En effet, $N\cap M'$ étant un sous-A-module de M', il est de type fini, c'est à dire, engendré par des éléments $e'_1,\dots,e'_m$ et comme $N/(N\cap M')$ $(=(N+M')/M')$ est un sous-A-module de $M/M'=M''$, il est aussi de type fini. Soit $\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n$ un système de générateurs de $N/N\cap M'$, où les e_i sont dans N. On va montrer que $e'_1,\dots,e'_m$, $e_1,\dots,e_n$ est un système de générateurs de N. En effet, si $x\in N$, alors $\bar{x}\in N/(N\cap M')$ et donc, on peut écrire $\bar{x}=\sum_{j=1}^{n} a_j\bar{e}_j$ où les a_j sont dans A. Ceci nous montre que $x-\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\in N\cap M'$ et donc, $x-\sum_{j=1}^{n} a_j e_j=\sum_{i=1}^{m} a'_i e'_i$ où les a'_i sont dans A. Ceci nous montre que N est de type fini.

COROLLAIRE 1 - *Soient $M_1,\dots,M_n$ des modules noethériens. Alors le produit $M_1\times\dots\times M_n$ est aussi un module noethérien.*

Pour $n=2$, ceci est donné par le théorème 2 et donc, la démonstration marche par récurrence sur n.

COROLLAIRE 2 - *Tout module de type fini sur un anneau noethérien est aussi noethérien. En particulier, tout sous-module d'un module de type fini sur un anneau noethérien est aussi de type fini.*

Soient A un anneau noethérien, M un A-module de type fini et $x_1,\dots,x_n$ un système de générateurs de M

sur A. Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique du A-module libre A^n et soit φ: $A^n \to M$ l'homomorphisme de A^n dans M défini par $\varphi(e_i) = x_i$ pour $i = 1, \dots, n$. On voit facilement que φ est surjectif et donc, on peut écrire $M = \varphi(A^n) = A^n/Ker(\varphi)$, c'est à dire, M s'écrit comme un quotient du A-module libre A^n. Comme A est noethérien, alors A^n l'est aussi d'après le corollaire 1 et comme le quotient d'un noethérien est encore noethérien, ceci entraîne que M est noethérien.

Idéaux premiers associés à un module

Soient A un anneau commutatif à élément unité et M un A-module unitaire. Pour tout élément $x \in M$, on appele *annulateur de* x l'ensemble $Ann(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$. Il est clair que pour tout $x \in M$, $Ann(x)$ est un idéal de A et si $x \neq 0$, alors $Ann(x) \neq A$, car sinon on aurait $x = 1.x = 0$, étant donné que $1 \in A$. On dira qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est *associé à* M s'il existe un élément $x \in M$ tel que $\mathfrak{p} = Ann(x)$. Un tel x est nécessairement $\neq 0$, car $Ann(0) = A$ et A n'est pas un idéal premier.

LEMME 1 - *Tout élément maximal parmi les idéaux $Ann(x)$ pour x parcourant M et $x \neq 0$ est un idéal premier de A.*

En effet, soit $Ann(x_0)$ un tel élément maximal et soient $a, b \in A$ tels que $ab \in Ann(x_0)$ et $b \notin Ann(x_0)$. Il en resulte que $abx_0 = 0$ et $bx_0 \neq 0$ et donc, $a \in Ann(bx_0) \neq A$. Si $c \in Ann(x_0)$, alors $cx_0 = 0$ et donc, $c(bx_0) = 0$. Ceci nous montre que $c \in Ann(bx_0)$, c'est à dire, $Ann(x_0) \subset Ann(bx_0)$. D'après le caractère maximal de $Ann(x_0)$, il en resulte que $Ann(bx_0) = Ann(x_0)$ et on a donc, $a \in Ann(x_0)$.

LEMME 2 - *Soient M' un sous-A-module de M et $\mathfrak{p}$ un idéal premier associé à M. Alors, $\mathfrak{p}$ est associé soit à M', soit à M/M'.*

Il existe un élément $x \in M$ tel que $\mathfrak{p} = Ann(x)$ et soit $\bar{x}$ la classe de x modulo le sous-A-module M'. Si $c \in Ann(x)$, alors $cx = 0$ et donc, $c\bar{x} = 0$ et ceci nous montre que $c \in Ann(\bar{x})$. On a ainsi $Ann(x) \subset Ann(\bar{x})$. Deux cas sont possibles: ou bien $Ann(x) = Ann(\bar{x})$ et dans ce cas $\mathfrak{p}$ est associé à M/M', ou bien $Ann(x) \neq Ann(\bar{x})$ et dans ce cas il existe un élément $a \in Ann(\bar{x})$ tel que $a \notin \mathfrak{p} = Ann(x)$. Ceci nous montre que $a\bar{x} = 0$ et donc, $ax \in M'$. Il est clair que $\mathfrak{p} \subset Ann(ax)$ (puisque $a \notin \mathfrak{p}$, alors $ax \neq 0$) et soit $c \in Ann(ax)$. On a $cax = 0$ et ceci entraîne que $ca \in Ann(x) = \mathfrak{p}$ et comme $a \notin \mathfrak{p}$, alors $c \in \mathfrak{p} = Ann(x)$. On a montré que $\mathfrak{p} = Ann(ax)$ et donc, $\mathfrak{p}$ est associé à M'.

LEMME 3 - *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de l'anneau A. Alors $\mathfrak{p}$ est le seul idéal premier associé à $A/\mathfrak{p}$.*

En effet, soit $\bar{a} \in A/\mathfrak{p}$. Ou bien $\bar{a} = 0$ ($\Leftrightarrow a \in \mathfrak{p}$) et alors $A = Ann(\bar{a})$ que n'est pas un idéal premier, ou bien $\bar{a} \neq 0$ ($\Leftrightarrow a \notin \mathfrak{p}$) et dans ce cas $Ann(\bar{a}) = \mathfrak{p}$.

THÉORÈME 3 - *Soient A noethérien et M un A-module de type fini* (donc, noethérien). *Alors,*

(1) *il existe une suite de composition*

$$M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

dont les modules quotients M_i/M_{i-1} sont isomorphes à des modules de la forme $A/\mathfrak{p}_i$ où les $\mathfrak{p}_i$ sont des idéaux premiers de l'anneau A;

(2) *les idéaux premiers associés à M sont parmi les $\mathfrak{p}_i$ et sont donc en nombre fini.*

(1) Soit $\mathcal{F}$ la famille des sous-A-modules de M admettant une telle suite de composition finie. On voit que la famille $\mathcal{F}$ est $\neq \emptyset$, car le sous-A-module (0) en fait partie; comme M est noethérien, alors $\mathcal{F}$ admet un élément maximal N. On va montrer que $M = N$. En effet, supposons que $M \neq N$ ($\Leftrightarrow M/N \neq (0)$) et on considère un élément maximal $\mathfrak{p}$ parmi les $Ann(\bar{x})$ pour $\bar{x} \in M/N$ et $\bar{x} \neq 0$. Soit $\mathfrak{p} = Ann(\bar{x}_0)$ et d'après le lemme 1, $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau A. On voit que le A-module $N + Ax_0$ est un sous-A-module de M contenant N, $N + Ax_0 \neq N$ et

$$(N+Ax_0)/N = Ax_0/(Ax_0 \cap N) = A\overline{x}_0 = A/Ann(\overline{x}_0) = A/\mathfrak{p}$$

(on considère l'homomorphisme $A \to A\overline{x}_0$ qui envoie chaque $c \in A$ dans l'élément $c\overline{x}_0 \in A\overline{x}_0$; on voit que cet homomorphisme est surjectif et que son noyau est l'idéal $\mathfrak{p} = Ann(\overline{x}_0)$). Donc, $N+Ax_0$ a une suite de composition finie du type indiqué, ce qui est absurde d'après la maximalité de N.

(2) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier associé à M et on va montrer que $\mathfrak{p}$ se trouve parmi les $\mathfrak{p}_i$. Ou bien $\mathfrak{p}$ est associé à $M/M_{n-1} = A/\mathfrak{p}_{n-1}$ et d'après le lemme 3, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{n-1}$ ou bien $\mathfrak{p}$ est associé à M_{n-1} et à ce moment là on recommence le processus. Par récurrence sur n on a ce qu'il faut.

COROLLAIRE - *Soient A un anneau noethérien et M un A-module de type fini. Les élément de A qui sont des diviseurs de zero dans M forment la réunion d'une famille finie d'idéaux premiers.*

On dit qu'un élément $a \in A$ est un *diviseur de zero dans M* s'il existe un élément $x \in M$, $x \neq 0$ tel que $ax = 0$. Soit U la réunion des idéaux premiers associés à M et on va montrer que U est l'ensemble des diviseurs de zero dans M. Soit $a \in A$ un diviseur de zero dans M. Il existe un élément $x \in M$, $x \neq 0$ tel que $ax = 0$ et comme $Ax \neq (0)$ (car $x \neq 0$), alors le sous-A-module Ax de M admet, d'après le lemme 1, un idéal premier associé $\mathfrak{p}$. Comme $\mathfrak{p}$ est associé à Ax, il s'ensuit que $\mathfrak{p}$ est associé à M. D'autre part, on sait qu'on peut écrire $\mathfrak{p} = Ann(bx)$ avec $b \in A$ et comme $a(bx) = b(ax) = 0$, alors $a \in \mathfrak{p}$. Ceci nous montre que $a \in U$. Si $a \in U$, alors il existe un idéal premier $\mathfrak{p} = Ann(x)$ tel que $a \in \mathfrak{p}$ et donc, $ax = 0$, avec $x \in M$, $x \neq 0$ (car, si $x = 0$ alors $Ann(x) = A$ et A n'est pas un idéal premier de A).

§2. MODULES SUR LES ANNEAUX LOCAUX

Soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{m} \subset Rad(A)$ un idéal de A et M un A-module de type fini (donc, noethérien).

THÉORÈME 4 - *Soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments du A-module M tels que les classes $\overline{x}_i \in M/\mathfrak{m}M$ engendrent le $(A/\mathfrak{m})$-module $M/\mathfrak{m}M$. Alors les x_i engendrent le A-module M.*

En effet, soit $M' = (x_1, \dots, x_n)A$ le sous-A-module de M engendré par les x_i. Comme les $\overline{x}_i$ engendrent le $(A/\mathfrak{m})$-module $M/\mathfrak{m}M$, alors il en resulte que $M = M' + \mathfrak{m}M$ et donc, $\mathfrak{m}(M/M') = M/M'$. Puisque on a $\mathfrak{m} \subset Rad(A)$ et M/M' de type fini, par le lemme de Nakayama on a $M/M' = (0)$, c'est à dire, $M = M'$.

Cas local. On dira que A est un *anneau local* s'il a un seul idéal maximal $\mathfrak{m}$ et dans ce cas les éléments inversibles sont ceux de $A - \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m} = Rad(A)$. Dans ces conditions, $k = A/\mathfrak{m}$ est un corps et $M/\mathfrak{m}M$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. On prend $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n$ une base de $M/\mathfrak{m}M$ sur k et en relevant ces éléments on obtient un système minimal de générateurs de M sur A.

COROLLAIRE - *Supposons que $M/\mathfrak{m}M$ soit un $(A/\mathfrak{m})$-module libre. Alors il existe un A-module libre L de type fini et un sous-A-module L' de L tel qu'on ait une suite exacte $(0) \to L' \to L \to M \to (0)$ avec $L' \subset \mathfrak{m}L$.*

On considère des éléments $x_1, \dots, x_n$ dans M tels que les classes $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n$ forment une base du $(A/\mathfrak{m})$-module libre $M/\mathfrak{m}M$. Soit $L = A^n$ et $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de L sur A. On définit un homomorphisme φ: $L \to M$ en posant $\varphi(e_i) = x_i$ $(i = 1, \dots, n)$ et comme d'après le théorème 4, les x_i engendrent M, alors φ est surjectif. Si l'on pose $L' = Ker(\varphi)$ on a la suite exacte $(0) \to L' \to L \to M \to (0)$ et il faut seulement démontrer que $L' \subset \mathfrak{m}L$. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in L'$ avec les a_i dans l'anneau A. On a $0 = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ et si l'on réduit cette expression modulo $\mathfrak{m}M$, on a $0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i \overline{x}_i$ où les $\overline{a}_i$ sont dans $A/\mathfrak{m}$ et les $\overline{x}_i$ sont dans $M/\mathfrak{m}M$. Comme $M/\mathfrak{m}M$ est un $(A/\mathfrak{m})$-

module libre et $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ est une base de $M/\mathfrak{m}M$ sur $A/\mathfrak{m}$, alors $\bar{a}_i = 0$ pour $i = 1, \dots, n$ et ceci nous montre que $a_i \in \mathfrak{m}$ pour $i = 1, \dots, n$. On a ainsi montré que $x \in \mathfrak{m}L$.

THÉORÈME 5 - *Soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{m} \subset Rad(A)$ un idéal de A et M un A-module de type fini. Supposons que $M/\mathfrak{m}M$ soit un $(A/\mathfrak{m})$-module libre et que l'homomorphisme canonique $\mathfrak{m} \otimes_A M \to A \otimes_A M = M$ soit injectif. Alors M est un A-module libre.*

Soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments de M tels que les classes $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ forment une base du $(A/\mathfrak{m})$-module libre $M/\mathfrak{m}M$. On considère le A-module libre $L = A^n$ dont la base canonique est $e_1, \dots, e_n$ et soit L' le noyau de l'homomorphisme $L \to M$. On sait, d'après le corollaire du th. 4, qu'on a une suite exacte $(0) \to L' \to L \to M \to (0)$ avec $L' \subset \mathfrak{m}L$. Si l'on démontre que $L' = \mathfrak{m}L'$, alors d'après le lemme de Nakayama on a $L' = (0)$ et donc, $M = L$, c'est à dire, M est un A-module libre. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in L'$. Comme $L' = Ker(L \to M)$, alors $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ et comme l'homomorphisme canonique $\mathfrak{m} \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M = M$ est injectif, alors on a $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i = 0$. Ceci nous montre que l'on a $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes e_i \in Im(\mathfrak{m} \otimes_A L' \to \mathfrak{m} \otimes_A L)$ et donc, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in \mathfrak{m}L'$. On a ainsi montré que $L' = \mathfrak{m}L'$ et comme L' est de type fini, puisqu'il est un sous-A-module d'un module noethérien, alors on peut appliquer le lemme de Nakayama.

COROLLAIRE - *Soient A un anneau local noethérien et M un A-module de type fini. Alors les assertions suivantes sont équivalentes: (a) M est libre; (b) M est projectif; (c) M est plat; (d) $Tor_1^A(A/\mathfrak{m}, M) = (0)$; (e) l'homomorphisme canonique $\mathfrak{m} \otimes_A M \to M$ est injectif.*

Les implications $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$ sont bien connues et comme $Tor_1^A(A/\mathfrak{m}, M) = Ker(\mathfrak{m} \otimes_A M \to M)$, alors $(d) \Rightarrow (e)$. D'après le théorème 5, on a $(e) \Rightarrow (a)$.

PROPOSITION 1 - *Soient A un anneau local noethérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et supposons que tout élément de $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ soit un diviseur de zero dans A. Alors il existe un élément $a \in A$ tel que $a \neq 0$ et $a\mathfrak{m} = (0)$.*

On peut, dans la démonstration de cette proposition, envisager deux cas: (a) Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$, alors en tant que A-module, on peut d'après la relation $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}.\mathfrak{m}$ appliquer à $\mathfrak{m}$ le lemme de Nakayama et on a $\mathfrak{m} = (0)$, c'est à dire, A est un corps. Il suffit alors de prendre, par exemple, $a = 1$. (b) Supposons que $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$ et soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ (en nombre fini) les idéaux premiers associés à l'anneau A. On sait (d'après le corollaire du théorème 3 du §1) que $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ est l'ensemble des diviseurs de zero de A et donc, $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2 \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. On fixe un élément $b \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ et soit $c \in \mathfrak{m}$. Les éléments $b + c^q$, où $q \geq 2$ est un entier, sont dans $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$. En effet si l'on suppose que $b + c^q \notin \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, comme $c^q \in \mathfrak{m}^2$ (car $q \geq 2$), il en resulte que $b \in \mathfrak{m}^2$. Donc, $b + c^q \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ pour tout $q \geq 2$ et ceci nous montre que $b + c^q \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ pour tout $q \geq 2$. Or, il y a une infinité d'éléments $b + c^q$ et ils sont contenus dans une réunion finie d'idéaux premiers et donc, il existe deux tels éléments differents contenus dans un même idéal premier $\mathfrak{p}_j$. Soient alors $q' \geq 2$ et $q'' \geq 2$ deux entiers tels que $q' \neq q''$, $b + c^{q'} \in \mathfrak{p}_j$ et $b + c^{q''} \in \mathfrak{p}_j$. Si l'on suppose que $q' < q''$ on a $c^{q'}(1 - c^{q''-q'}) = c^{q'} - c^{q''} = (b + c^{q'}) - (b + c^{q''}) \in \mathfrak{p}_j$ et comme $1 - c^{q''-q'}$ n'est pas dans l'idéal $\mathfrak{m}$, alors il est inversible dans l'anneau A et ceci nous montre que $c^{q'} \in \mathfrak{p}_j$. Étant donné que $\mathfrak{p}_j$ est un idéal premier il s'en suit que $c \in \mathfrak{p}_j$ et on a alors $\mathfrak{m} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. Puisque $\mathfrak{m}$ est contenu dans une réunion d'idéaux premiers il est contenu dans l'un des $\mathfrak{p}_i$, soit $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}_j$ (voir le lemme ci-dessous). D'après la maximalité de $\mathfrak{m}$, il en resulte que $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_j$ et ceci nous montre que $\mathfrak{m}$ est un idéal premier associé au A-module A, c'est à dire, il existe un élément $a \in A$, $a \neq 0$ tel que $\mathfrak{m} = Ann(a)$. On a ainsi $a\mathfrak{m} = (0)$. Pour terminer la démonstration de cette proposition il suffit de démontrer le lemme suivant:

LEMME 4 - (*Lemme d'évitement*). *Soient A un anneau commutatif à élément unité et $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ des idéaux premiers de A. Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de A tel que $\mathfrak{b} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, alors $\mathfrak{b}$ est contenu dans l'un des $\mathfrak{p}_i$.*

En effet, on peut toujours s'arranger pour que $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ si $i \neq j$ car si $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_j$ on peut supprimer le $\mathfrak{p}_i$ et ceci ne modifie pas la réunion. Donc, il existe des éléments $c_{i,j} \notin \mathfrak{p}_i$ tels que $c_{i,j} \notin \mathfrak{p}_j$ pour $i \neq j$. On considère alors l'élément $c_j = \prod_{i \neq j} c_{i,j}$ et on voit alors que $c_j \in \mathfrak{p}_i$ si $i \neq j$ et $c_j \notin \mathfrak{p}_j$ pour tout j. Par hypothèse on sait que $\mathfrak{b} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ et supposons que $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{p}_i$ pour tout i. Alors il existe, pour chaque i, un élément $b_i \in \mathfrak{b}$ tel que $b_i \notin \mathfrak{p}_i$ et soit $c = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i$. Il est clair que $c \in \mathfrak{b}$ et comme $b_i c_i \notin \mathfrak{p}_i$ et $b_j c_j \in \mathfrak{p}_i$ si $i \neq j$, alors $c \notin \mathfrak{p}_i$ pour tout i. En effet, supposons qu'il existe un i tel que $c \in \mathfrak{p}_i$ et comme $b_j c_j \in \mathfrak{p}_i$ pour $i \neq j$, alors $b_i c_i = c - \sum_{j \neq i} b_j c_j \in \mathfrak{p}_i$, ce qui est absurde. Donc, $c \notin \mathfrak{p}_i$ pour tout i et ceci nous montre que $c \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. Or, ceci contrédit le fait que $c \in \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. Le lemme est démontré.

§3. DIMENSION HOMOLOGIQUE DES MODULES SUR UN ANNEAU LOCAL

Soient A un anneau local noethérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et M un A-module de type fini. On appele *dimension homologique de M sur A* et nous allons noter $dh_A(M)$, le plus petit entier n tel que $Tor_{n+1}^A(M, A/\mathfrak{m}) = (0)$. Si les groupes Tor sont tous $\neq (0)$ alors on dira que la dimension homologique de M sur A est infinie et on posera $dh_A(M) = +\infty$. On remarque ici que pour une définition plus générale on peut consulter, par exemple, D. G. Northcott, An Introduction to Homological Algebra, Chap. VII, §7.5 ou encore d'autres ouvrages d'Algèbre Homologique. On voit que $dh_A(M) = -1$ si et seulement si $M = (0)$. En effet, si $M = (0)$ alors $Tor_0^A(M, A/\mathfrak{m}) = M \otimes_A (A/\mathfrak{m}) = (0)$ et ceci nous donne $dh_A(M) = -1$. Réciproquement, si $dh_A(M) = -1$, alors $(0) = Tor_0^A(M, A/\mathfrak{m}) = M \otimes_A (A/\mathfrak{m})$ et ceci nous donne $M = \mathfrak{m}M$. Par le lemme de Nakayama il en resulte que $M = (0)$. D'autre part, $dh_A(M) = 0$ si et seulement si M est libre et $M \neq (0)$. En effet, si $dh_A(M) = 0$ alors $Tor_1^A(M, A/\mathfrak{m}) = (0)$ et d'après le corollaire du théorème 5, M est libre. De plus, $M \neq (0)$, car sinon $dh_A(M) = -1$. Réciproquement, si M est libre, $M \neq (0)$ alors $Tor_1^A(M, A/\mathfrak{m}) = (0)$ et ceci nous donne $dh_A(M) = 0$, car si $dh_A(M) = -1$ on aurait $M = (0)$.

Comme M est de type fini, alors il existe un A-module libre L_0 de type fini et un sous-A-module R_0 de L_0 tels que la suite $(0) \to R_0 \to L_0 \to M \to (0)$ soit exacte. Puisque L_0 est de type fini et A est noethérien, il en resulte que R_0 est aussi de type fini et on peut récommencer le processus, c'est à dire, il existe un A-module libre L_1 de type fini et un sous-A-module R_1 de L_1, R_1 étant aussi de type fini, tels que la suite $(0) \to R_1 \to L_1 \to R_0 \to (0)$ soit exacte. On peut ainsi par récurrence construir une *résolution libre*

$$\dots \to L_n \to L_{n-1} \to \dots \to L_1 \to L_0 \to M \to (0)$$

où les L_i sont libres et de type fini. Une telle résolution s'appele une *résolution de type fini*. Si l'on prend des systèmes minimaux de générateurs pour $M, R_0, R_1, \dots$ on obtient une *résolution minimale de M*.

THÉORÈME 6 - *Soient A un anneau local noethérien et M un A-module de type fini. Si $dh_A(M) \leq n$ et si*

$$L_{n-1} \to L_{n-2} \to \dots \to L_1 \to L_0 \to M \to (0)$$

est une résolution libre de type fini, alors $L_n = Ker(L_{n-1} \to L_{n-2})$ est libre de type fini et on a la suite exacte

$$(0) \to L_n \to L_{n-1} \to \dots \to L_0 \to M \to (0).$$

Il est clair que L_n est de type fini et on va démontrer que L_n est libre. Or, on voit immediatement que $Tor_{n+1}^A(M, A/\mathfrak{m}) = Tor_1^A(L_n, A/\mathfrak{m})$ ("formule de décalage des Tor") et comme $dh_A(M) \leq n$, alors $Tor_{n+1}^A(M, A/\mathfrak{m}) = (0)$. Ceci nous donne, d'après le corollaire du théorème 5, que L_n est libre.

On voit, d'après le théorème ci-dessus, que dire que $dh_A(M)=n$ ceci révient à dire qu'il existe une résolution de type fini $(0)\to L_n\to L_{n-1}\to\ldots\to L_0\to M\to(0)$ et il n'existe pas une telle résolution avec un nombre plus petit de termes.

COROLLAIRE 1 - *Soient A un anneau local noethérien et M un A-module de type fini. Si $dh_A(M)$ est finie, alors $Tor_q^A(M,N)=(0)$ pour tout A-module N et pour tout entier $q>dh_A(M)$.*

En effet, si $dh_A(M)=n<+\infty$, alors il existe une résolution de type fini $(0)\to L_n\to L_{n-1}\to\ldots\to L_0\to M\to(0)$ et considérons cette résolution découpée en morceaux, à savoir,

$$(0)\to R_0\to L_0\to M\to(0),$$
$$(0)\to R_1\to L_1\to R_0\to(0),\ldots,(0)\to L_n\to L_{n-1}\to R_{n-2}\to(0).$$

Puisque les L_i sont libres, alors on a $Tor_q^A(L_i,N)=(0)$ pour tout $q\geq 1$ et pour tout A-module N. Si on tensorise les morceaux ci-dessus par N, on obtient $Tor_{q+1}^A(M,N)=Tor_q^A(R_0,N)$, $Tor_{q+1}^A(R_0,N)=Tor_q^A(R_1,N),\ldots,Tor_{q+1}^A(R_{n-2},N)=Tor_q^A(L_n,N)$ pour tout entier $q\geq 1$. Il en resulte alors que

$$Tor_q^A(M,N)=Tor_{q-1}^A(R_0,N)=Tor_{q-2}^A(R_1,N)=\ldots$$
$$\ldots=Tor_{q-(n-1)}^A(R_{n-2},N)=Tor_{q-n}^A(L_n,N)$$

et si $q-n\geq 1$ alors $Tor_{q-n}^A(L_n,N)=(0)$ car L_n est libre. Ceci nous montre que pour tout entier $q\geq n+1$ et pour tout A-module N on a $Tor_q^A(M,N)=(0)$.

COROLLAIRE 2 - *Soient A un anneau local noethérien et $(0)\to M'\to M\to M''\to(0)$ une suite exacte de A-modules de type fini. Alors on a:*

(1) $dh_A(M)\leq max(dh_A(M'),dh_A(M''))$;

(2) $dh_A(M')\leq max(dh_A(M),dh_A(M''))$;

(3) $dh_A(M'')\leq 1+max(dh_A(M),dh_A(M'))$.

En effet, il suffit de voir qu'on a la suite exacte

$$\ldots\to Tor_{q+1}^A(M,A/\mathfrak{m})\to Tor_{q+1}^A(M'',A/\mathfrak{m})\to Tor_q^A(M',A/\mathfrak{m})\to$$

$$\to Tor_q^A(M,A/\mathfrak{m})\to Tor_q^A(M'',A/\mathfrak{m})\to Tor_{q-1}^A(M',A/\mathfrak{m})\to\ldots$$

et d'après le corollairé 1 on a le corollaire ci-dessus.

REMARQUE - Soit $a\in A$ un non-diviseur de zero dans A. Alors on a la suite exacte $(0)\to Aa\to A\to A/Aa\to(0)$ et ici on a $dh_A(Aa)=0$, $dh_A(A)=0$ et $dh_A(A/Aa)=1$.

PROPOSITION 2 - *Soient A un anneau local noethérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et M un A-module de type fini. Si $a\in\mathfrak{m}$ n'est pas diviseur de zero dans M, c'est à dire, l'application $x\in M\longrightarrow ax\in M$ est injective, alors on a $dh_A(M/aM)=$ $=1+dh_A(M)$.*

On va noter α: $M\to M$ l'application définie par $\alpha(x)=ax$ pour tout $x\in M$ et ceci nous donne la suite exacte $(0)\to M\xrightarrow{\alpha} M\to M/aM\to(0)$, car par hypothèse α est injective. Pour chaque entier $q\geq 0$ on considère l'application

$$\alpha_q:\ Tor_q^A(M,A/\mathfrak{m})\to Tor_q^A(M,A/\mathfrak{m})$$

qu'on obtient à partir de la multiplication par a dans M. On voit que α_0: $M\otimes_A(A/\mathfrak{m})\to M\otimes_A(A/\mathfrak{m})$ et que

$$\alpha_0(x\otimes\bar{c})=\alpha(x)\otimes\bar{c}=ax\otimes\bar{c}=x\otimes(\overline{ac})=0,$$

car $a\in\mathfrak{m}$ et donc, $\bar{a}=0$. Ceci étant vrai pour tout $x\in M$ et pour tout $\bar{c}\in A/\mathfrak{m}$, il s'en suit que $\alpha_0=0$ et de même, $\alpha_q=0$ pour tout entier $q\geq 0$. Puisque on a la suite exacte

$$\ldots\xrightarrow{\alpha_{q+1}} Tor_{q+1}^A(M,A/\mathfrak{m})\to Tor_{q+1}^A(M/aM,A/\mathfrak{m})\to$$
$$\to Tor_q^A(M,A/\mathfrak{m})\xrightarrow{\alpha_q} Tor_q^A(M,A/\mathfrak{m})\to Tor_q^A(M/aM,A/\mathfrak{m})\to$$
$$\to Tor_{q-1}^A(M,A/\mathfrak{m})\xrightarrow{\alpha_{q-1}} Tor_{q-1}^A(M,A/\mathfrak{m})\to\ldots$$

et comme $Im(\alpha_q)=(0)$ pour tout entier $q\geq 0$, alors on a

$$(0)\to Tor_q^A(M,A/\mathfrak{m})\to Tor_q^A(M/aM,A/\mathfrak{m})\to Tor_{q-1}^A(M,A/\mathfrak{m})\to(0)$$

pour tout entier $q\geq 1$. Si $dh_A(M)=n$ alors $Tor_{q-1}^A(M,A/\mathfrak{m})=(0)$ pour tout $q-1\geq n+1$, c'est à dire, pour tout $q\geq n+2$. Ceci nous donne $Tor_q^A(M/aM,A/\mathfrak{m})=(0)$ pour tout $q\geq n+2$. Si $q=n+1$, alors $Tor_q^A(M,A/\mathfrak{m})=(0)$ et donc $Tor_q^A(M/aM,A/\mathfrak{m})=$ $=Tor_{q-1}^A(M,A/\mathfrak{m})\neq(0)$. Si $q<n+1$ alors $Tor_q^A(M,A/\mathfrak{m})\neq(0)$ et comme $Tor_q^A(M/aM,A/\mathfrak{m})$ contient celui-ci comme sous-module,

on a aussi $Tor_q^A(M/aM, A/\mathfrak{m}) \neq (0)$. On voit alors que $Tor_q^A(M/aM, A/\mathfrak{m}) \neq (0)$ pour tout $q < n+2$ et donc, par la définition de dimension homologique on a $dh_A(M/aM) = n+1$.

COROLLAIRE - *Soient A un anneau local noethérien, L un A-module libre et $M \subset L$ un sous-A-module de L. Si $a \in \mathfrak{m}$ (où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A) n'est pas diviseur de zero dans L/M, alors $dh_A(M+aL) = dh_A(M)+1$.*

Soit $E = L/M$ et considerons la suite exacte

$$(0) \to M \to L \to E \to (0).$$

D'après la formule de décalage des *Tor* on a $dh_A(E) = 1 + dh_A(M)$. On considère maintenant la suite exacte

$$(0) \to M + aL \to L \to E/aE \to (0)$$

(on remarque que $L/(M+aL) = E/(aL/aL \cap M) = E/aE$) et d'après la formule de décalage des *Tor* on a $dh_A(E/aE) = 1 + dh_A(M+aL)$. Maintenant on emploie la proposition 2 et ceci nous donne $dh_A(E/aE) = 1 + dh_A(E)$. Il en resulte alors que $dh_A(M+aL) = dh_A(M)+1$.

PROPOSITION 3 - (*passage d'un anneau à un anneau quotient*). *Soient A un anneau local noethérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, M un A-module de type fini et $a \in \mathfrak{m}$ un élément qui n'est pas diviseur de zero dans M. Si l'on considère le (A/aA)-module M/aM, on a $dh_{A/aA}(M/aM) \leq dh_A(M)$.*

L'inégalité étant trivialement vraie pour $dh_A(M)$ égale a -1 ou 0, on procédera par récurrence sur $dh_A(M)$. On considère M comme le quotient d'un module libre L et soit $R = Ker(L \to M)$. On a ainsi la suite exacte

$$(0) \to R \to L \xrightarrow{\varphi} M \to (0)$$

et donc, $dh_A(M) = dh_A(R)+1$. Puisque $dh_A(R) = dh_A(M)-1$, alors l'hypothèse de récurrence s'applique à R. Si l'on remarque que $L/(R+aL) = (L/R)/(R+aL/R) = (L/R)/(aL/aL \cap R) = M/aM$, alors on peut écrire la suite exacte $(0) \to R+aL \to L \to M/aM \to (0)$ et par passage au quotient on a $(0) \to (R+aL)/aL \to L/aL \to M/aM \to (0)$. Si l'on démontré que $R \cap aL = aR$, alors on a la suite exacte $(0) \to R/aR \to L/aL \to M/aM \to (0)$. En effet, $R \cap aL \supset aR$ et soit $y \in R \cap aL$. On peut écrire $y = ax$ avec $y \in R$ et $x \in L$ et donc, $0 = \varphi(y) = a\varphi(x)$. Étant donné que a n'est pas diviseur de zero dans M, il en resulte que $\varphi(x) = 0$ et donc, $x \in Ker(\varphi) = R$. On a ainsi montré que $y \in aR$, c'est à dire, que $R \cap aL = aR$. Comme L/aL est un (A/aA)-module libre, la formule de décalage des *Tor* nous donne $dh_{A/aA}(M/aM) = dh_{A/aA}(R/aR)+1$ et d'après l'hypothèse de récurrence $dh_{A/aA}(R/aR) \leq dh_A(R)$. Donc, $dh_{A/aA}(M/aM) \leq 1 + dh_A(R) = dh_A(M)$.

§4. ANNEAUX LOCAUX RÉGULIERS

Soient A un anneau local et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. On dira qu'une suite $a_1, \dots, a_n$ d'éléments de $\mathfrak{m}$ est une *A-suite* ou une *suite première* si a_i n'est pas diviseur de zero dans $A/(a_1, \dots, a_{i-1})A$ pour $i = 1, \dots, n$, où l'on pose $(a_1, \dots, a_{i-1})A = (0)$ pour $i = 1$. Des exemples de A-suites sont faciles à donner. Si l'on prend l'anneau local $k[[X_1, \dots, X_n]]$, où k est un corps, alors $X_1, \dots, X_n$ est une $k[[X_1, \dots, X_n]]$-suite. Maintenant, si $a_1, \dots, a_n$ est une A-suite et si $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_q)A$ est l'idéal de A engendré par les éléments $a_1, \dots, a_q$ pour $q < n$, alors les classes $\bar{a}_{q+1}, \dots, \bar{a}_n$ forment une $(A/\mathfrak{a})$-suite.

Soient maintenant A un anneau local noethérien et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. On dira que A est un *anneau local régulier* si $\mathfrak{m}$ peut être engendré par une A-suite. On remarque là dessus qu'il existe d'autres définitions équivalentes (cf. O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra Vol. II, Chap. VIII, §11). Par exemple, l'anneau des séries formelles $k[[X_1, \dots, X_n]]$, où k est un corps, est un anneau local régulier (dont la dimension dans le sens de Krull est égale à n). On n'a qu'à voir que son idéal maximal $(X_1, \dots, X_n)$ est engendré par une $k[[X_1, \dots, X_n]]$-suite. L'importance des anneaux locaux réguliers est bien connue en Géométrie Algébrique. Ainsi, si k est un corps et si V est une k-variété algébrique, on peut considérer pour chaque point de V l'anneau local de ce point.

Plus précisement, soit $p \in V$ un point de V et soit A l'ensemble des fonctions rationnelles sur V dont le denominateur est $\neq 0$ en p. L'anneau A est local. En effet, soit $k[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau de coordonnées de V et $\mathfrak{p}$ idéal premier des éléments de $k[x_1, \ldots, x_n]$ s'annulant au point p. On voit facilement que $A = k[x_1, \ldots, x_n]_{\mathfrak{p}}$, c'est à dire, A est local. Maintenant, un résultat bien connu est que *A est régulier si et seulement si le point p est simple*. L'anneau A s'appele *l'anneau local du point p*. Par exemple, sur la courbe $y^2 = x^3$, l'anneau local de l'origine n'est pas régulier, car l'origine est un point double.

THÉORÈME 7 - *Tout anneau local régulier est intègre.*

Soit A un anneau local régulier, soit $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_n)A$ son idéal maximal et on va démontrer que A est intègre par récurrence sur n. Pour $n = 0$ on a $\mathfrak{m} = (0)$ et donc, A est un corps. Ceci nous montre que A est intègre. Maintenant on voit que l'idéal maximal de l'anneau local A/a_1A est $\mathfrak{m}/a_1A = (\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)(A/a_1A)$, où $\bar{a}_i$ est la classe de a_i modulo l'idéal a_1A pour $i = 2, \ldots, n$. Puisque $\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ est une (A/a_1A)-suite, il s'en suit que A/a_1A est local régulier et donc, par l'hypothèse de récurrence il est intègre. Montrons que A est intègre. En effet, soient $a, b \in A$ tels que $ab = 0$. On sait qu'on peut écrire $a = a'a_1^m$ et $b = b'a_1^q$ où $m \geq 0$ et $q \geq 0$ sont des entiers et où $a', b' \in A$ sont tels que $a', b' \notin a_1A$. On a $0 = ab = a'b'a_1^{m+q}$ et comme a_1 n'est pas diviseur de zero dans A, alors $a'b' = 0$. Ceci ne peut pas arriver car a' et b' ne sont pas dans l'idéal premier a_1A et $a'b' = 0 \in a_1A$. Donc, on doit avoir forcément $a = 0$ ou $b = 0$, c'est à dire, A est intègre.

THÉORÈME 8 - (*Théorème des syzygies de Hilbert; démonstration dûe à Koszul*). *Soient A un anneau local régulier, $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_n)A$ son idéal maximal. Alors $dh_A(\mathfrak{m}) = n-1$, $dh_A(A/\mathfrak{m}) = n$ et $dh_A(M) \leq n$ pour tout A-module M de type fini.*

En effet, d'après le corollaire de la proposition 2, on a $dh_A((a_1, \ldots, a_j)A) = 1 + dh_A((a_1, \ldots, a_{j-1})A)$ pour $j = 1, \ldots, n$ et donc, par récurrence, on a $dh_A(\mathfrak{m}) = n + dh_A((0)) = n-1$. La suite exacte $(0) \to \mathfrak{m} \to A \to A/\mathfrak{m} \to (0)$ nous donne $dh_A(A/\mathfrak{m}) = 1 + dh_A(\mathfrak{m}) = n$. D'après le corollaire 1 du théorème 6, on a $Tor_q^A(A/\mathfrak{m}, M) = (0)$ pour tout A-module de type fini M et pour tout entier $q > n$. En particulier, si $q = n+1$, on a $Tor_{n+1}^A(A/\mathfrak{m}, M) = (0)$ et donc, $Tor_{n+1}^A(M, A/\mathfrak{m}) = (0)$. Ceci nous montre que $dh_A(M) \leq n$.

COROLLAIRE - *Soient A un anneau local régulier, $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_n)A$ son idéal maximal et L un A-module libre de type fini. Si M est un sous-A-module de L, alors $dh_A(M) \leq n-1$.*

On considère la suite exacte $(0) \to M \to L \to L/M \to (0)$ et d'après la formule de décalage des Tor on a $dh_A(L/M) = 1 + dh_A(M)$. Comme L/M est un A-module de type fini, le théorème ci-dessus nous donne $dh_A(L/M) \leq n$ et donc, $dh_A(M) \leq n-1$.

Soit A un anneau local. La borne supérieure des $dh_A(M)$ pour tous les A-modules de type fini M s'appele la *dimension homologique globale de A* qu'on designera par $dh.gl(A)$ ou encore par $\delta(A)$. Le théorème des syzygies nous montre que si A est local régulier alors $\delta(A) < +\infty$. On va donner la réciproque de ce résultat, à savoir:

THÉORÈME 9 - (*Théorème de Serre-Auslander-Buschbaum*). *Soit A un anneau local tel que $\delta(A)$ soit finie. Alors A est local régulier.*

Montrons tout d'abord que $\delta(A) = 1 + dh_A(\mathfrak{m})$. En effet, la suite exacte $(0) \to \mathfrak{m} \to A \to A/\mathfrak{m} \to (0)$ nous montre que $dh_A(A/\mathfrak{m}) = 1 + dh_A(\mathfrak{m})$. D'autre part, $\delta(A)$ étant la borne supérieure des dimensions homologiques des A-modules, pour tous les A-modules de type fini, il en resulte que $dh_A(A/\mathfrak{m}) \leq \delta(A)$. Soit maintenant $dh_A(A/\mathfrak{m}) = q$. Alors on a $Tor_{q+1}^A(M, A/\mathfrak{m}) = (0)$ pour tout A-module M de type fini (cf. corollaire 1 du théorème 6) et donc, $dh_A(\mathfrak{m}) \leq q$ pour tout A-module M de type fini. Ceci nous montre que $\delta(A) \leq q$ et donc, $\delta(A) = dh_A(A/\mathfrak{m})$. La rélation $\delta(A) = 1 + dh_A(\mathfrak{m})$ nous dit alors que $\delta(A)$ est finie si et seulement si $dh_A(\mathfrak{m})$ l'est aussi. Supposons alors que $dh_A(\mathfrak{m}) < +\infty$ et soit $\mathfrak{m} = (a_1, \dots, a_n)A$, où $a_1, \dots, a_n$ est une base minimale de $\mathfrak{m}$. Alors on sait que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un espace vectoriel sur $A/\mathfrak{m}$ et $[\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 : A/\mathfrak{m}] = n$. Si $n = 0$, on a $\mathfrak{m} = (0)$ et donc A est un corps. On sait qu'un corps est un anneau local régulier. La méthode de démonstration dans le cas général est dûe à Kaplansky et on a deux cas:

(a) *Tout élément de* $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ *est diviseur de zero dans l'anneau* A. On a déjà vu qu'il existe un élément $a \in A$, $a \neq 0$ tel que $a\mathfrak{m} = (0)$ (cf. Chap. VI, prop. 1 du § 2). Si M est un A-module de type fini, on va montrer que $dh_A(M)$ est égale à -1, 0 ou $+\infty$. En effet, comme $dh_A(M) \leq \delta(A) < +\infty$, alors on n'a qu'à démontrer que $dh_A(M)$ est égale à -1 ou 0. Supposons que $dh_A(M) \geq 1$ et par résolution de M, on peut supposer que $dh_A(M) = 1$. Comme $M/\mathfrak{m}M$ est un $(A/\mathfrak{m})$-espace vectorial de dimension finie, par le corollaire du théorème 4, il existe un A-module libre L de type fini et un sous-A-module L' de L tel qu'on ait la suite exacte $(0) \to L' \to L \to M \to (0)$ avec $L' \subset \mathfrak{m}L$. Comme $dh_A(M) = 1$, alors L' est libre (car la suite exacte ci-dessus est une résolution libre de type fini de M) et comme $aL' \subset a\mathfrak{m}L = (0)$, alors de $aL' = (0)$ il s'en suit que $L' = (0)$. Ceci nous donne $M = L$ et ceci contrédit le fait que $dh_A(M) = 1$. Donc, $dh_A(M) = -1$ ou 0, c'est à dire, M est un A-module libre. Étant donné que pour le A-module $\mathfrak{m}$ on a $dh_A(\mathfrak{m}) < +\infty$, alors $\mathfrak{m}$ est aussi un A-module libre (tout A-module de dimension homologique finie est nécessairement libre) et donc, $a\mathfrak{m} = (0)$ nous donne $\mathfrak{m} = 0$. Donc, A est un corps, et ainsi, A est un anneau local régulier.

(b) *Il existe un élément* $a \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ *qui n'est pas diviseur de zero dans* A. Ici on fera intervenir l'hypothèse de récurrence. D'après la proposition 3, on a

$$dh_{A/aA}(\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}) \leq dh_A(\mathfrak{m}) < +\infty$$

et si l'on démontre que $\mathfrak{m}/aA$ est un facteur direct de $\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$, alors $\mathfrak{m}/aA$ est aussi de dimension homologique finie sur A/aA. Pour cela, on sait que A/aA est un anneau local dont l'idéal maximal est $\mathfrak{m}/aA = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n-1})(A/aA)$ où les b_i sont dans A et donc $\mathfrak{m} = (a, b_1, \dots, b_{n-1})A$. Soit $\mathfrak{b} = (b_1, \dots, b_{n-1})A$. On considère l'homomorphisme composé $\mathfrak{b} \to \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$ dont le noyau est $\mathfrak{b} \cap a\mathfrak{m}$ et on va démontrer que $\mathfrak{b} \cap a\mathfrak{m} = \mathfrak{b} \cap aA$. En effet, il est clair que $\mathfrak{b} \cap a\mathfrak{m} \subset \mathfrak{b} \cap aA$ et soit $y \in \mathfrak{b} \cap aA$. On peut écrire que $y = ax$ avec $y \in \mathfrak{b}$ et $x \in A$. Si l'on suppose que $x \notin \mathfrak{m}$, alors x est inversible dans A et donc, $a = (ax)(1/x) \in \mathfrak{b}$ et ceci contrédit la minimalité de $a, b_1, \dots, b_{n-1}$. On a ainsi démontré que $\mathfrak{b} \cap a\mathfrak{m} = \mathfrak{b} \cap aA$ et par passage au quotient on en déduit un homomorphisme $\mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap aA) \to \mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$. Comme $\mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap aA) = (\mathfrak{b} + aA)aA = \mathfrak{m}/aA$, on a un homomorphisme $\mathfrak{m}/aA \to \mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$ et d'autre part, l'application identique $\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ nous donne par passage au quotient un homomorphisme $\mathfrak{m}/a\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/aA$. Maintenant il est facile de voir que l'application composée $\mathfrak{m}/aA \to \mathfrak{m}/a\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/aA$ est l'identité dans $\mathfrak{m}/aA$ et ceci nous montre que $\mathfrak{m}/aA$ est un facteur direct de $\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$. Comme $dh_{A/aA}(\mathfrak{m}/aA) < +\infty$ et comme $\mathfrak{m}/aA$ est engendré par $n-1$ éléments, d'après l'hypothèse de récurrence il en resulte que A/aA est local régulier et donc, $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n-1}$ est une (A/aA)-suite. On voit alors que $a, b_1, \dots, b_{n-1}$ est une A-suite et ceci nous dit que A est local régulier.

THÉORÈME 10 - (*Serre*) - *Soient* A *un anneau local régulier et* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal. Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ *de* A, *on a* $A_\mathfrak{p}$ *local régulier et* $\delta(A_\mathfrak{p}) < \delta(A)$.

Il suffit de montrer que $\delta(A_\mathfrak{p}) \leq \delta(A)$ et appliquer le théorème 9 et comme $\delta(A_\mathfrak{p}) = 1 + dh_{A_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})$ et $\delta(A) = 1 + dh_A(\mathfrak{m})$, alors on doit démontrer que $dh_{A_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \leq dh_A(\mathfrak{m})$. Puisque $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, alors il existe un élément $a \in \mathfrak{m}$ tel que $a \notin \mathfrak{p}$ et ceci équivaut à a n'est pas diviseur de zero dans $A/\mathfrak{p}$. D'après le corollaire de la prop. 2, on a $dh_A(\mathfrak{p} + aA) = 1 + dh_A(\mathfrak{p})$ et par le théorème des syzygies on a $dh_A(\mathfrak{p} + Aa) \leq dh_A(\mathfrak{m})$. Donc, $dh_A(\mathfrak{p}) <$