A' la topologie $\mathfrak{m}A'$-adique et on va montrer que celle-ci est la topologie induite sur A' par la topologie $\mathfrak{m}\hat{A}$-adique de $\hat{A}$. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout entier $n \geqq 0$ on a $(\mathfrak{m}\hat{A})^n \cap A' = (\mathfrak{m}A')^n$. Il est clair que $(\mathfrak{m}\hat{A})^n \cap A' \supset (\mathfrak{m}A')^n$ et on va montrer l'inclusion opposée. Soit alors $s^{-1}a \in (\mathfrak{m}\hat{A})^n \cap A'$. On a que $a \in A$ et $s \in 1+\mathfrak{m}$ et comme $s^{-1}a \in (\mathfrak{m}\hat{A})^n$ et $\hat{A}$ est de Zariski, alors $a \in (\mathfrak{m}\hat{A})^n$. Donc, $a \in (\mathfrak{m}\hat{A})^n \cap A = \mathfrak{m}^n$ (car, l'idéal $\mathfrak{m}$ étant ouvert, il est fermé). On voit alors que $a/s = (1/s)a \in A'\mathfrak{m}^n = (\mathfrak{m}A')^n$ et on a ce qu'il faut. On en déduit encore que $\hat{A}$ est le complété de A' pour la topologie $\mathfrak{m}A'$-adique. On va montrer maintenant que A' muni de la topologie $\mathfrak{m}A'$-adique est un anneau de Zariski. En effet, il s'agit de montrer que tout élément de $1+\mathfrak{m}A'$ est inversible dans A'. Si $x \in 1+\mathfrak{m}A'$, alors on peut écrire que $x = 1 + (m/(1+m'))$ avec $m, m' \in \mathfrak{m}$ et donc, x est inversible, son inverse étant $1/x = (1+m')/(1+m+m')$. On voit ainsi que le passage de A à $\hat{A}$ peut se décomposer en un passage de A à A' et d'un passage de A' à $\hat{A}$ L'anneau A' s'appele la *zariskification de l'anneau A*. On remarque que le passage de A' à $\hat{A}$ est la complétion d'un anneau de Zariski. Ainsi, si $\hat{A}$ est factoriel, par le théorème de Mori on en déduit que A' est aussi factoriel et dans certains cas, on sait que si A' est factoriel, alors A l'est aussi, par le théorème de Nagata. On peut donner le result suivant:

THÉORÈME 10 - (*Théorème de Nagata-Mori*). *Soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{m}$ un idéal de A tel que $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n = (0)$ et $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Si $\hat{A}$ est factoriel et si $1+\mathfrak{m}$ est engendré par des éléments premiers, alors A est aussi factoriel.*

CHAPITRE V

SÉRIES FORMELLES

§1. PRÉLIMINAIRES

Soient A un anneau (intègre) commutatif à élément unité, $R = A[[X]]$ et S une partie multiplicative de A. On peut former $S^{-1}R$ et $(S^{-1}A)[[X]]$, mais en général on a $S^{-1}R \subsetneqq (S^{-1}A)[[X]]$. En effet, il suffit de voir que

$$1 + (1/s)X + (1/s^2)X^2 + \ldots + (1/s^n)X^n + \ldots$$

est un élément de l'anneau $(S^{-1}A)[[X]]$ qui n'est pas en général dans $S^{-1}R$, où $s \in S$. Par exemple, si l'on prend

$$A = Z \quad \text{et} \quad S = \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots\}$$

alors l'élément $1 + (1/2)X + (1/2^2)X^2 + \ldots + (1/2^n)X^n + \ldots$ est dans $(S^{-1}Z)[[X]]$ mais il n'est pas dans $S^{-1}(Z[[X]])$, d'où, $S^{-1}Z[[X]]) \subsetneqq (S^{-1}Z)[[X]]$. On va démontrer la proposition suivante:

PROPOSITION 1 - L'anneau $(S^{-1}A)[[X]]$ *est le complété de $S^{-1}R$ pour la topologie (X)-adique. De plus, la zariskification de $S^{-1}R$ est l'anneau $T^{-1}R$, où T est l'ensemble des séries formelles dont le terme constant est un élément de S.*

En effet, soit

$$f(X)=(a_0/s_0)+(a_1/s_1)X+\ldots+(a_n/s_n)X^n+\ldots\in(S^{-1}A)[[X]];$$

on va montrer que $f(X)$ est la limite d'une suite d'éléments de $S^{-1}R$. Pour cela on va poser

$$f_n(X)=(a_0/s_0)+(a_1/s_1)X+\ldots+(a_n/s_n)X^n$$

et on voit immediatement que $f_n(X)\in S^{-1}R$ pour tout $n\geq 0$ et que $f(X)-f_n(X)\in(X)^{n+1}$. Donc, $(S^{-1}R)^\wedge=(S^{-1}A)[[X]]$. En général, $S^{-1}R$ n'est pas un anneau de Zariski si on le munit de la topologie (X)-adique. On va montrer toutefois que la zariskification de $S^{-1}R$ est $T^{-1}R$, où T est l'ensemble des séries formelles dont le terme constant est un élément de S. En effet, on sait que la zariskification de $S^{-1}R$ est l'anneau $\{a/s\in(S^{-1}R)^\wedge \mid a\in S^{-1}R,\ s\in 1+(X)\}$. Donc, si $f(X)$ est dans la zariskification de $S^{-1}R$, on peut écrire que

$$f(X)=(a(X)/s):(1+X(b(X)/s'))=(s'a(X))/(s's+sXb(X))$$

et on voit tout suite que l'on a $s's+sXb(X)\in T$ et $s'a(X)\in R$, car $a(X),b(X)\in R$ et $s,s'\in S$. Supposons maintenant que $f(X)\in T^{-1}R$. Alors on peut écrire

$$f(X)=a(X)/(s+Xb(X))=(a(X)/s).(1/(1+X(b(X)/s)))$$

avec $a(X),b(X)\in R$ et $s\in S$. Ceci nous montre que $f(X)$ est dans la zariskification de $S^{-1}R$.

§2. SÉRIES FORMELLES SUR UN ANNEAU FACTORIEL

PROPOSITION 2 - *Soit A un anneau noethérien intègre et supposons qu'il existe des éléments $x,y,z\in A$ et trois entiers $m,n,q>0$ tels que l'on ait $mnq-mn-nq-qm\geq 0$, y prèmier, $z\notin yA$, $x^{m-1}\notin Ay+Az$ et que $x^m\in Ay^q+Az^n$. Alors l'anneau $R=A[[X]]$ n'est pas factoriel.*

On considère dans l'anneau A le système multiplicatif $S=\{1,z,z^2,\ldots\}$ et soit S' l'ensemble de toutes les séries formelles dont le terme constant est dans S. On voit immediatement que S' est une partie multiplicative de R; soit $B=S^{-1}R$ et $B'=S'^{-1}R$. On sait que B' est un anneau de Zariski pour la topologie (X)-adique (B' est la zariskification de l'anneau B) et que si l'on désigne par $\hat{B}$ la complétion (X)-adique de B, alors on a $\hat{B}=(S^{-1}A)[[X]]$. De plus, on a $R\subset B\subset B'\subset\hat{B}$ et $\hat{B}$ est encore la complétion (X)-adique de B'. On considère la série formelle $v=yz-x^{m-1}X$ (on voit même que $v\in A[X]$) et on va démontrer la proposition en trois pas:

(1) *Dans $\hat{B}$, v n'est associée à aucune série formelle de la forme $y+a_1X+a_2X^2+\ldots$, où les a_i sont dans A.*

En effet, supposons que l'on a

$$(yz-x^{m-1}X)(z^{-1}+c_1z^{-s}X+\ldots)\in R.$$

Le coefficient de X doit être dans A, c'est à dire,

$$c_1yz^{1-s}-x^{m-1}z^{-1}\in A \quad\text{et donc,}\quad c_1y-x^{m-1}z^{s-2}\in Az^{s-1}.$$

Ceci nous montre que $c_1y\in Az^{s-2}$ et donc, il existe un $d\in A$ tel que $c_1y=dz^{s-2}$. Comme y est premier, alors l'idéal Ay l'est aussi et comme $z\notin Ay$ et $dz^{s-2}\in Ay$, il en resulte que $d\in Ay$, c'est à dire, il existe un élément $e\in A$ tel que $d=ey$. On voit finalement que $eyz^{s-2}-x^{m-1}z^{s-2}\in Az^{s-1}$ et comme A est intègre, alors $ey-x^{m-1}\in Az$, d'où $x^{m-1}\in Ay+Az$. Ceci contrédit une des hypothèses de la proposition. L'assertion (1) est vraie, à fortiori, dans B'.

(2) *Il existe un entier t et une série formelle $v'=y^tz^{-1}+b_1z^{-2}X+\ldots+b_sz^{-(s+1)}X^s+\ldots\in\hat{B}$ tels que $u=v'v\in R$, où les $b_i\in A$.*

On doit déterminer des éléments $b_1,\ldots,b_s,\ldots$ de l'anneau A tels que les coefficients de u soient dans l'anneau A. Le terme constant de u est y^{t+1} qui est dans A; le coefficient de X est $b_1yz^{-1}-x^{m-1}y^tz^{-1}$ et le coefficient de X^s pour tout $s\geq 2$ est $b_syz^{-s}-b_{s-1}x^{m-1}z^{-s}$. Pour que ces coefficients soient dans A il faut et il suffit que $b_1y-x^{m-1}y^t\in Az$ et $b_sy-x^{m-1}b_{s-1}\in Az^s$ pour tout $s\geq 2$. Si l'on prend $b_1y-x^{m-1}y^t=0$, alors $b_1=x^{m-1}y^{t-1}$ et par ce procédé on aura, en général, $b_s=x^{(m-1)s}y^{t-s}$ pour $s\geq 2$ (évidemment, pour que $b_s\in A$ pour $s\geq 2$, on doit avoir $t\geq s$). On voit que $b_{mn-1}=x^{(m-1)(mn-1)}y^{t-mn+1}$, si l'on suppose que $t \geq mn$ (ceci sera supposé par la suite) et on va déterminer le terme suivant, c'est à dire, b_{mn}. Pour cela, on doit avoir $b_{mn}y - x^{m-1}b_{mn-1} \in Az^{mn}$ et donc, $b_{mn}y - x^{mn(m-1)}y^{t-mn+1} \in Az^{mn}$. Étant donné qu'on peut écrire $x^m = cy^q + dz^n$ avec $c,d \in A$, alors on doit avoir la rélation $b_{mn}y - (cy^q+dz^n)^{n(m-1)}y^{t-mn+1} \in Az^{mn}$. Dans le developpement de $(cy^q+dz^n)^{n(m-1)}$ au moyen du binôme de Newton, les termes dans lesquels z apparaît avec un exposant $\leq mn$ peuvent s'écrire sous la forme $y^{q(n(m-1)-m)}f_1(y^q,z^n)$, où f_1 est une forme de degré m à coefficients dans l'anneau A. La dernière rélation peut alors s'écrire sous la forme que voici $b_{mn}y - y^{mnq-mn-nq-qm+t+1}f_1(y^q,z^n) \in Az^{mn}$ et ceci peut se resoudre en prenant $b_{mn} = y^{mnq-mn-nq-qm+t}f_1(y^q,z^n)$. On voit que l'exposant de y est $\geq t$, car $mnq-mn-nq-qm \geq 0$. Supposons qu'on a déterminé $b_1,\ldots,b_{(s-1)mn}$ de telle façon que $b_{(s-1)mn} = y^{\varphi(s-1)}f_{s-1}(y^q,z^n)$, où f_{s-1} est un polynôme homogène de degré $(s-1)m$ et $\varphi(s-1)$ est un entier tel que $\varphi(s-1) \geq t \geq mn$ (f_{s-1} est un polynôme à coefficients dans l'anneau A). Ceci est vrai pour $s=1$, car alors on a $\varphi(0)=t$, $f_0(y^q,z^n)=1$ et $b_0=y^t$. Puisque on a $b_{(s-1)mn+1}y - x^{m-1}b_{(s-1)mn} \in Az^{(s-1)mn}$, alors on peut prendre $b_{(s-1)mn+1} = x^{m-1}y^{\varphi(s-1)-1}f_{s-1}(y^q,z^n)$ et en multipliant chaque fois par $x^{m-1}y^{-1}$ (cette opération doit se répéter $mn-1$ fois), on arrive à $b_{smn-1} = x^{(m-1)(mn-1)}y^{\varphi(s-1)-mn+1}f_{s-1}(y^q,z^n)$. Maintenant on emploie $b_{smn}y - x^{m-1}b_{smn-1} \in Az^{smn}$ et on obtient alors la rélation $b_{smn}y - x^{mn(m-1)}y^{\varphi(s-1)-mn+1}f_{s-1}(y^q,z^n) \in Az^{smn}$ et en employant le fait que $x^m = cy^q+dz^n$ on a

$$b_{smn}y - (cy^q+dz^n)^{n(m-1)}y^{\varphi(s-1)-mn+1}f_{s-1}(y^q,z^n) \in Az^{smn}.$$

Dans le developpement de $(cy^q+dz^n)^{n(m-1)}f_{s-1}(y^q,z^n)$, la somme des termes où z apparaît avec un exposant $\leq smn$ peut s'écrire sous la forme $y^{q((s-1)m+n(m-1)-sm)}f_s(y^q,z^n)$ où f_s est une forme de degré sm à coefficients dans l'anneau A. On peut alors résoudre en posant $b_{smn} = y^{\varphi(s-1)-mn+mnq-nq-qm}f_n(y^q,z^n)$. En effet, si l'on pose $\varphi(s) = mnq-mn-nq-qm+\varphi(s-1)$, comme $mnq-mn-nq-qm \geq 0$ alors on a $\varphi(s) \geq \varphi(s-1) \geq t \geq mn$. On voit

ainsi que les b_{smn} satisfont les mêmes conditions que $b_{(s-1)mn}$ et donc, les coefficients b_i sont déterminés par récurrence sur i. La récurrence marche par cycles de longueur mn.

(3) *L'anneau R n'est pas factoriel.*

Supposons que R soit factoriel. Les notations étant celles du n. 2, on sait que la série formelle $u = v'v$ peut s'écrire sous la forme $u = y^{t+1} + a_1X + a_2X^2 + \ldots$ où les a_i sont dans l'anneau A. Soit $u = u_1 \ldots u_s$ la décomposition de u en facteurs irreductibles dans R. Puisque le terme constant de u est égal à y^{t+1}, alors il en est de même du produit des termes constants des u_i et comme R est factoriel et y est premier, alors le terme constant de chaque u_i est une puissance de y. Comme y et z sont premiers entre eux, alors chaque u_i reste irreductible dans l'anneau de fractions $S'^{-1}R$, lequel est factoriel en tant que anneau de fractions d'un anneau factoriel (on remarque que un élément irreductible, quand on passe d'un anneau à un anneau de fractions, ou bien il reste irreductible ou bien dévient inversible). Maintenant on voit que $v' \in \hat{B}$ et donc, $u = v'v \in \hat{B}v$ et comme $u \in R \subset B'$, alors on peut écrire que $u \in \hat{B}v \cap B' = B'v$ (car, B' est un anneau de Zariski et $\hat{B}$ est la complétion (X)-adique de B'). Ceci nous permet d'écrire $u = v''v$ avec $v'' \in B'$ et donc, $(v''-v')v = 0$. Comme $\hat{B}$ est un anneau intègre, alors $v' = v'' \in B'$ et comme v est irreductible dans B' (car, son terme constant étant irreductible dans $S^{-1}A$, v est irreductible dans $\hat{B}$), alors on a la décomposition $vv' = u_1 \ldots u_s$ dans B' en facteurs irreductibles. D'après la factorialité de B', v est associé à un certain u_i dans B' et ceci contrédit (1).

THÉORÈME - *Il existe un anneau noethérien et factoriel A tel que l'anneau $A[[T]]$ ne soit pas factoriel.*

En effet, soient k un corps, a, b et c des indéterminées sur k et $K = k(a,b,c)$ le corps de fractions de l'anneau intègre $k[a,b,c]$. On considère trois entiers m,n et q tels que

$m>0$, $n>0$ et $q>0$ et tels que $mnq-mn-nq-qm \geq 0$. Maintenant on prend l'anneau quotient

$$A=K[X,Y,Z]/(aX^m+bY^q+cZ^n)=K[x,y,z]$$

où x, y et z sont les classes de X, Y et Z respectivement modulo l'idéal $(aX^m+bY^q+cZ^n)$. On vérifie que

$$A/Ay=K[X,Z]/(aX^m+cZ^n)$$

et comme aX^m+cZ^n est irreductible sur le corps K il en resulte que A/Ay est intègre et donc, y est premier. Pour voir que aX^m+cZ^n est irreductible sur K il suffit d'appliquer le théorème de van der Waerden (cf. Chap. II, th. 3). On voit encore que $z \notin Ay$, car sinon il existerait un polynôme de degré 1 par rapport à Z qui serait multiple de $aX^m+bY^q+cZ^n$. De plus, $x^{m-1} \notin Ay+Az$ car sinon on aurait un polynôme de degré $m-1$ en X qui serait multiple de $aX^m+bY^q+cZ^n$. Comme $ax^m+by^q+cz^n=0$ et $1/a \in K \subset A$, alors on a

$$x^m=-((b/a)y^q+(c/a)z^n) \in Ay^q+Az^n$$

et donc, par la prop. 2, $A[[T]]$ n'est pas factoriel. D'autre part, on a déjà vu (cf. Chap. III, §3, Exemple 2) que l'anneau A est factoriel.

COMPLÉMENTS - Il y a d'autres exemples d'anneaux qui vérifient les conditions du théorème ci-dessus. En effet, on prend K un corps parfait de caractéristique $p \geq 3$ et on considère l'anneau $A=K[x,y,z]$ tel que $z^p=x^{p+1}+y^{2p+1}$. La non-factorialité de $A[[T]]$ vient du fait que l'inégalité sur les exposants est vérifiée pour $p \geq 3$, d'après la prop. 2. Pour démontrer que A est factoriel, on se rapporte à P. Samuel, Sur les anneaux factoriels, Bull. Soc. Math. France 89 (1961), 155-173. On y trouve un autre exemple d'anneau vérifiant les conditions du théorème ci-dessus. On prend K un corps parfait de caractéristique 2 et $A=K[x,y,z]$ avec $z^2=x^3+y^q$, où q est un entier impair et non multiple de 3. On montre que l'anneau A est factoriel, mais si $q \geq 7$, l'anneau des séries formelles $A[[T]]$ n'est pas factoriel. En effet, l'inégalite portant sur les exposants est la suivante: $6q-6-2q-3q=q-6 \geq 0$. On voit que pour $q=5$ ça ne marche pas, car alors $q-6=-1<0$. On doit remarquer ici que sur le corps $\mathbf{C}$ des complexes, l'anneau complét $\mathbf{C}[[x,y,z]]$ avec $z^2=x^3+y^5$ est factoriel (exemple dû à M. Mumford).

Le problème d'examen, donné à la fin de ces notes, fournit des exemples très simples d'anneaux verifiant les conditions du théorème ci-dessus.