LEMME - *(Théorème de Krull) - Soit A noethérien. Alors tout élément non inversible de A est contenu dans au moins un idéal premier de hauteur* 1 (cf. D. G. Northcott, Ideal Theory, Cambridge University Press 1953; Chap. III, §3.5, Th. 6).

THÉORÈME 6 - *Soit A un anneau noethérien intègre. Pour que A soit factoriel il faut et il suffit que tout idéal premier de A de hauteur 1 soit principal.*

En effet, supposons que A soit factoriel et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A tel que $h(\mathfrak{p})=1$. Puisque $\mathfrak{p}\neq(0)$, alors il existe un $a\in\mathfrak{p}$ tel que $a\neq 0$ et comme A est factoriel on peut écrire $a=up_1\dots p_n$, où u est inversible dans A et les p_i sont extremaux. Comme $a\in\mathfrak{p}$ et $u\notin\mathfrak{p}$, alors $p_1\dots p_n\in\mathfrak{p}$ et donc, il existe un indice i tel que $p_i\in\mathfrak{p}$. On va montrer que $\mathfrak{p}=Ap_i$. En effet, comme A est factoriel, alors Ap_i est un idéal premier de A; d'autre part, on a $Ap_i\subset\mathfrak{p}$ et $h(\mathfrak{p})=1$ et ceci nous montre que $\mathfrak{p}=Ap_i$.

Réciproquement, il suffit de démontrer que tout élément extremal de A est premier. En effet soit $q\in A$ un élément extremal. Comme q n'est pas inversible par définition, il existe, d'après le lemme précedent, un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que $q\in\mathfrak{p}$ et $h(\mathfrak{p})=1$. Par hypothèse, $\mathfrak{p}$ est principal et donc, on peut écrire $\mathfrak{p}=Ap$ avec p premier. On peut alors écrire que $q=cp$ avec $c\in A$ et comme q est extremal, alors c est inversible dans A. Ceci nous montre que q et p sont associés et donc, q est premier.

Soient maintenant k un corps, V une k-variété affine, $I_k(V)$ l'idéal de V et $A=k[X_1,\dots,X_n]/I_k(V)=k[x_1,\dots,x_n]$ l'anneau de coordonnées affines de V sur k. On sait que A est noethérien intègre. Les idéaux premiers de A définissent les sous-k-variétés de V et aux idéaux premiers de hauteur 1 de A correspondent les sous-k-variétés de codimension 1. Le théorème 6 nous montre alors que si *A est factoriel, toute sous-k-variété de V de codimension 1 est une intersection complète, c'est à dire, qu'elle est définie par une seule équation.*

CHAPITRE IV

COMPLÉTÉS DE CERTAINS ANNEAUX

§1. IDÉAUX MAXIMAUX

Soient A un anneau commutatif à élément unité et $\mathfrak{m}$ un idéal de A. On dira que $\mathfrak{m}$ est un *idéal maximal de A*, s'il est maximal parmi les idéaux de A qui sont $\neq A$. On voit facilement que $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A si et seulement si $A/\mathfrak{m}$ est un corps et en particulier, tout idéal maximal est premier, car un corps est un anneau intègre. On va démontrer trois propriétés qui nous seront essentielles par la suite:

THÉORÈME 1 - *(Théorème de Krull-Zorn sur l'existence d'idéaux maximaux) - Dans un anneau commutatif à élément unité A, tout idéal de A qui est $\neq A$ est contenu dans un idéal maximal de A.*

En effet, soit $\mathfrak{a}\neq A$ un idéal de A (ceci équivaut à $1\notin\mathfrak{a}$) et considérons la famille $\mathcal{F}$ d'idéaux de A telle que si $\mathfrak{b}\in\mathcal{F}$, alors $\mathfrak{b}\neq A$ ($\Leftrightarrow 1\notin\mathfrak{b}$) et $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}$. La famille $\mathcal{F}$ est $\neq\emptyset$ et si l'on met sur $\mathcal{F}$ l'ordre partiel donné par l'inclusion, alors $\mathcal{F}$ est inductive. En effet, il suffit de voir que l'unité n'appartient à aucun élément de $\mathcal{F}$ et donc, la réunion de tout famille totalement ordonnée (sous-famille de $\mathcal{F}$) est encore un idéal de A. D'après le théorème de Zorn, la famille $\mathcal{F}$ admet un élément maximal.

COROLLAIRE - *Soit A un anneau commutatif à élément unité. Alors tout élément non inversible de A est contenu dans un idéal maximal de A.*

REMARQUES - 1) Si l'anneau A est noethérien, alors le théorème 1 est vrai automatiquement d'après la condition maximale.

2) Si A est noethérien, on peut donner (cf. Théorème de Krull, Chap. III) une forme plus précise du corollaire ci-dessus, à savoir, que tout élément non inversible de A est contenu dans au moins un idéal premier de hauteur 1.

On appele *radical* d'un anneau commutatif à élément unité A (et on note $Rad(A)$), l'intersection de tous les idéaux maximaux de A. Puisqu'il existe d'autres notions de radical distinctes de celle-ci, on va appeler $Rad(A)$ le *radical de Jacobson* de l'anneau A. Il est facile à vérifier que $Rad(A)$ est un idéal de A. Si A est un anneau local et $\mathfrak{m}$ est son idéal maximal, alors $Rad(A)=\mathfrak{m}$.

PROPOSITION 1 - *Soient A un anneau commutatif à élément unité et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Les assertions suivantes sont équivalentes:* 1) $\mathfrak{a}\subset Rad(A)$; 2) *tout élément de $1+\mathfrak{a}$ est inversible dans l'anneau A.*

En effet, supposons qu'il existe un élément $c\in\mathfrak{a}$ tel que $1+c$ ne soit pas inversible dans A. Alors, d'après le corollaire du théorème 1, il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que $1+c\in\mathfrak{m}$ et comme $c\in\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}\subset Rad(A)$ alors $c\in\mathfrak{m}$. Ceci nous montre que $1\in\mathfrak{m}$, ce qui est absurde. On a montré ainsi que $1)\Rightarrow 2)$. Si $\mathfrak{a}\not\subset Rad(A)$, alors il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que $\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{m}$ et donc, il existe un élément $c\in\mathfrak{a}$ tel que $c\notin\mathfrak{m}$. Ceci nous montre que $\mathfrak{m}+Ac=A$ et donc, $1+xc\in\mathfrak{m}$ pour tout $x\in A$. Puisque $1+xc\in 1+\mathfrak{a}$ pour tout $x\in A$, alors $1+xc$ est inversible dans A et donc, $1=(1+xc)^{-1}(1+xc)\in\mathfrak{m}$, ce qui est absurde. On a montré ainsi que $2)\Rightarrow 1)$.

THÉORÈME 2 - *(Lemme de Nakayama) - Soient A un anneau commutatif à élément unité, $\mathfrak{a}\subset Rad(A)$ un idéal de A et $M=(x_1,\dots,x_n)A$ un A-module unitaire de type fini. Si $M=\mathfrak{a}M$, alors $M=(0)$.*

On rappele tout d'abord que $\mathfrak{a}M$ est l'ensemble des sommes finies $\sum_{i=1}^{n} x_i c_i$ avec $c_i\in\mathfrak{a}$ pour tout i. Comme $x_i\in M=\mathfrak{a}M$, alors on peut écrire $x_i=\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_j$ avec $c_{i,j}\in\mathfrak{a}$ et donc, $\sum_{j=1}^{n}(\delta_{i,j}-c_{i,j})x_j=0$ pour $i=1,\dots,n$. Si $d=det(\delta_{i,j}-c_{i,j})$, il en resulte que $dx_j=0$ $(j=1,\dots,n)$ et d'autre part, si l'on développe le déterminant d, on voit $d\in 1+\mathfrak{a}$. Donc, d'après la proposition ci-dessus, d est inversible dans A et ceci nous montre que $x_j=0$ $(j=1,\dots,n)$. On a ainsi $M=(0)$.

§2. LE LEMME D'ARTIN-REES ET LE THÉORÈME DE KRULL

THÉORÈME 3 - *(Lemme d'Artin-Rees) - Soient A un anneau noethérien et $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{m}$ deux idéaux de A. Il existe un entier $q\geq 0$ tel que pour tout entier $n\geq q$ on ait*

$$\mathfrak{m}^n\cap\mathfrak{a}=\mathfrak{m}^{n-q}(\mathfrak{m}^q\cap\mathfrak{a}).$$

"Il s'agit ici d'un résultat fort élégant... et qui donne des résultats précis dans des questions où certains... n'osaient espérer mieux que des résultats de nature asymptotique" (cf. P. Samuel, Progrès récents de l'Algèbre Locale, Colloque d'Algèbre Supérieure, Bruxelles (1956), 231-243).

On rappele que $\mathfrak{m}^n$ est l'ensemble des sommes finies $\sum c_{i_1}\dots c_{i_n}$ telles que $c_{i_j}\in\mathfrak{m}$ et on voit que l'on a $\mathfrak{m}^{n+1}\subset\mathfrak{m}^n$ pour tout entier $n\geq 0$; on pose $\mathfrak{m}^0=A$. Si $a\in\mathfrak{m}^{n-q}(\mathfrak{m}^p\cap\mathfrak{a})$, alors on peut écrire $a=\sum_i c_ib_i$ (somme finie) avec $c_i\in\mathfrak{m}^{n-q}$ et $b_i\in\mathfrak{m}^q\cap\mathfrak{a}$ pour tout i. Ceci nous montre que $c_ib_i\in\mathfrak{m}^{n-q}\mathfrak{m}^q=\mathfrak{m}^n$ pour tout i et donc, $a=\sum_i c_i b_i \in \mathfrak{m}^n$. D'autre part, puisque $b_i \in \mathfrak{a}$ pour tout i, alors $c_i b_i \in \mathfrak{a}$ et donc, $a=\sum_i c_i b_i \in \mathfrak{a}$. On a ainsi montré que $a \in \mathfrak{m}^n \cap \mathfrak{a}$ et donc, que $\mathfrak{m}^n \cap \mathfrak{a} \supset \mathfrak{m}^{n-q}(\mathfrak{m}^q \cap \mathfrak{a})$.

Maintenant on va montrer l'inclusion opposée. Pour cela, on considère l'anneau de polynômes $A[T]$ et le sous-anneau A' de $A[T]$ formé des sommes finies $\sum_{i \geq 0} c_i T^i$ telles que $c_i \in \mathfrak{m}^i$ pour tout entier $i \geq 0$. Il est clair que A' est un sous-anneau de $A[T]$ qu'on appele *l'anneau de Rees* associé à l'idéal $\mathfrak{m}$. Puisque A est noethérien, alors $\mathfrak{m}$ est de type fini, $\mathfrak{m}=(a_1, \ldots, a_m)A$ et donc, $A'=A[a_1 T, \ldots, a_m T]$. En effet, il est clair que $a_i T \in A'$ pour tout i et donc, $A[a_1 T, \ldots a_m T] \subset A'$. Soit maintenant $cT^j \in A'$ un élément homogène de degré j. Puisque $c \in \mathfrak{m}^j$, alors on peut écrire que

$$c=(c_{1,1}a_1+\ldots+c_{1,m}a_m)\ldots(c_{j,1}a_1+\ldots+c_{j,m}a_m)$$

où les $c_{i,j}$ sont dans A et donc, c est une somme de termes de la forme $d a_1^{n(1)} \ldots a_m^{n(m)}$ avec $n(1)+\ldots+n(m)=j$ et $d \in A$. Il en resulte alors que cT^j est une somme de termes de la forme $d(a_1 T)^{n(1)} \ldots (a_m T)^{n(m)}$ avec $d \in A$ et $n(1)+\ldots+n(m)=j$ et ceci nous montre que $cT^j \in A[a_1 T, \ldots, a_m T]$. On a ainsi $A' \subset A[a_1 T, \ldots, a_m T]$ et donc, $A'=A[a_1 T, \ldots, a_m T]$. De ceci resulte que si A est noethérien, alors A' l'est aussi. Soit $\mathfrak{a}'$ l'ensemble des sommes finies $\sum_{i \geq 0} c_i T^i$ telles que $c_i \in \mathfrak{m}^i \cap \mathfrak{a}$ pour tout entier $i \geq 0$. Il est facile à voir que $\mathfrak{a}'$ est un idéal homogène de A' et comme A' est noethérien, alors $\mathfrak{a}'$ est de type fini. Soit alors $\mathfrak{a}'=(a'_1 T^{q(1)}, \ldots, a'_s T^{q(s)})A'$ avec $a'_i \in \mathfrak{m}^{q(i)} \cap \mathfrak{a}$ pour $i=1, \ldots, s$ et soit $q=max(q(1), \ldots, q(s))$. On prend $n \geq q$ et soit $c \in \mathfrak{m}^n \cap \mathfrak{a}$. On voit alors que cT^n est un élément homogène de $\mathfrak{a}'$ et donc, $cT^n=\sum_{i=1}^{s}(a'_i T^{q(i)})(c_i T^{n-q(i)})$ (somme finie) avec $c_i \in \mathfrak{m}^{n-q(i)}$, pour tout $i \geq 0$. Comme $a'_1 \in \mathfrak{m}^{q(i)} \cap \mathfrak{a}$ pour tout $i \geq 0$, alors $c=\sum_{i=1}^{s} a'_i c_i \in \sum_{i=1}^{s}(\mathfrak{m}^{q(i)} \cap \mathfrak{a})\mathfrak{m}^{n-q(i)}$ et comme $(\mathfrak{m}^{q(i)} \cap \mathfrak{a})\mathfrak{m}^{n-q(i)}=(\mathfrak{m}^{q(i)} \cap \mathfrak{a})=\mathfrak{m}^{n-q}\mathfrak{m}^{q-q(i)}$ et $(\mathfrak{m}^{q(i)} \cap \mathfrak{a})\mathfrak{m}^{q-q(i)} \subset \subset \mathfrak{m}^q \cap \mathfrak{a}$ (ceci par la première partie du théorème), il en resulte que $c=\sum_{i=1}^{s} a'_1 c_i \in \mathfrak{m}^{n-q}(\mathfrak{m}^q \cap \mathfrak{a})$.

REMARQUE - Il en existe sur le lemme de Artin-Rees des formes plus générales que celle que nous avons présentée ici. On peut voir, par exemple, O. Zàriski and P. Samuel, Commutative Algebra, Volume II, Chap. VIII, §2, Theorem 4' ou encore P. Samuel, Progrès récents d'Algèbre Locale, Colloque d'Algèbre Supérieure, Bruxelles (1956), 231-243.

THÉORÈME 4 - *(Théorème de Krull) - Soient A un anneau noethérien et $\mathfrak{m}$ un idéal de A. Les assertions suivantes sont équivalentes:* 1) $\mathfrak{m} \subset Rad(A)$; 2) *pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A on a* $\bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n)=\mathfrak{a}$.

1) $\Rightarrow$ 2). En effet, on considère l'anneau $A'=A/\mathfrak{a}$ pour un idéal $\mathfrak{a}$ de A et soit $\mathfrak{m}'$ l'image de $\mathfrak{m}$ par l'homomorphisme canonique $A \to A'$, c'est à dire, $\mathfrak{m}'=(\mathfrak{m}+\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$; de plus, on voit que $\mathfrak{m}'^n=(\mathfrak{m}^n+\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$ pour tout entier $n \geq 0$ (où l'on pose $\mathfrak{m}'^0=A/\mathfrak{a}=A'$) et que $\mathfrak{m}' \subset Rad(A')$. Si l'on pose $\mathfrak{b}'=\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}'^n$, alors pour tout $n \geq 0$ on a $\mathfrak{b}'=\mathfrak{b}' \cap \mathfrak{m}'^n$ et par le lemme d'Artin-Rees, il existe un entier $q \geq 0$ tel que pour tout $n \geq q$ on a $\mathfrak{b}' \cap \mathfrak{m}'^n=\mathfrak{m}'^{n-q}(\mathfrak{m}'^q \cap \mathfrak{b}')=\mathfrak{m}'^{n-q}\mathfrak{b}'$. En particulier, pour $n= =q+1$ on a $\mathfrak{b}'=\mathfrak{m}'\mathfrak{b}'$ et d'après le lemme de Nakayama, il en resulte que $\mathfrak{b}'=(0)$. Ceci nous donne $\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}'^n=(0)$ et donc, $\bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathfrak{m}^n+\mathfrak{a})=\mathfrak{a}$.

2) $\Rightarrow$ 1). En effet, si $\mathfrak{m} \not\subset Rad(A)$, alors il existe un idéal maximal $\mathfrak{p}$ de A tel que $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{p}$ et ceci entraîne que $\mathfrak{m}+\mathfrak{p}=A$, car $\mathfrak{p}+\mathfrak{m} \supsetneq \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}$ est maximal. Par le lemme ci-dessous, $\mathfrak{p}+\mathfrak{m}^n=A$ pour tout entier $n \geq 0$ et donc, $A= =\bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathfrak{p}+\mathfrak{m}^n) \neq \mathfrak{p}$. On a ainsi montré que 2) $\Rightarrow$ 1). Pour terminer la démonstration, il suffit de démontrer le lemme suivant:

LEMME 1 - *Soient A un anneau commutatif à élément unité et $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de A. Si $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=A$, alors quels que soient les entiers $i>1$ et $j>1$ on a $\mathfrak{a}^i+\mathfrak{b}^j=A$.*

En effet, on peut écrire $1=a+b$ avec $a\in\mathfrak{a}$ et $b\in\mathfrak{b}$ et donc, par Newton, le terme général du dévellopement de $1=(a+b)^{i+j-1}$ est $\binom{i+j-1}{s}a^s b^{i+j-1-s}$. On voit facilement que pour $s\geq i$ ce terme est dans $\mathfrak{a}^i$ et pour $s<i$ (ceci équivaut à $i+j-1-s\geq j$) il est dans $\mathfrak{b}^j$. Le lemme est ainsi démontré.

COROLLAIRE (du théorème 4) - *Soient A un anneau noethérien et $\mathfrak{m}\subset Rad(A)$ un idéal de A. Alors* $\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^n=(0)$.

REMARQUE - Ce corollaire est encore vrai si aucun élément de $1+\mathfrak{m}$ n'est diviseur de zero dans A et si A est noethérien.

UN EXEMPLE très simple où la condition 2) du théorème 4 n'est pas valable est le suivant: on prend dans l'anneau Z, qui est noethérien, l'idéal $\mathfrak{a}=(2)$ et soit $\mathfrak{m}=(3)$. On a $\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n=Z$ pour tout entier $n\geq 0$ et donc, $Z=\bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n)\neq\mathfrak{a}$. Ceci tient au fait que $\mathfrak{m}\not\subset Rad(Z)$ car $Rad(Z)=(0)$.

§3. TOPOLOGIE $\mathfrak{m}$-ADIQUE

Soient A un anneau commutatif à élément unité et $\mathfrak{m}$ un idéal de A tel que $\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^n=(0)$. Pour tout $x\neq 0$ de A, on définira $v(x)$ comme étant le plus grand entier ≥ 0 tel que $x\in\mathfrak{m}^{v(x)}$ et $x\notin\mathfrak{m}^{v(x)+1}$. Si $x=0$, alors on pose $v(x)=v(0)=+\infty$. On va montrer que pour tout $(x,y)\in A\times A$ on a

$$v(x+y)\geq min(v(x),v(y)) \quad \text{et} \quad v(xy)\geq v(x)+v(y).$$

En effet, soit $q=min(v(x),v(y))$; on a

$$x\in\mathfrak{m}^{v(x)}\subset\mathfrak{m}^q \quad \text{et} \quad y\in\mathfrak{m}^{v(y)}\subset\mathfrak{m}^q \text{ et donc, } x+y\in\mathfrak{m}^q.$$

Ceci nous montre que $v(x+y)\geq q$. D'autre part, $x\in\mathfrak{m}^{v(x)}$ et $y\in\mathfrak{m}^{v(y)}$ et donc, $xy\in\mathfrak{m}^{v(x)}\mathfrak{m}^{v(y)}=\mathfrak{m}^{v(x)+v(y)}$ et ceci nous donne $v(xy)\geq v(x)+v(y)$. On peut montrer que si l'anneau gradué associé $G(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ (somme directe) est intègre, alors pour tout $(x,y)\in A\times A$ on a $v(xy)=v(x)+v(y)$ et comme $\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^n=(0)$, ceci entraîne que A est aussi intègre (cf. Pierre Samuel, Progrès récents d'Algèbre Locale, Notas de Matemática n. 19, Rio de Janeiro 1959; Chap. I, §6, Th. 1).

Soit $e>1$ un nombre réel et pour tout $(x,y)\in A\times A$, on pose $d(x,y)=e^{-v(x-y)}$. On va montrer que d est une *ultramétrique sur l'anneau A*. En effet, $0=d(x,y)=e^{-v(x-y)}\Leftrightarrow v(x-y)=+\infty\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$. On remarque que les relations $z\in\mathfrak{m}^{v(-z)}$ et $-z\in\mathfrak{m}^{v(z)}$ nous donnent $v(z)\geq v(-z)$ et $v(-z)\geq v(z)$ et donc, $v(-z)=v(z)$ pour tout $z\in A$. De là on en déduit que $d(x,y)=d(y,x)$ pour tout $(x,y)\in A\times A$. On va montrer finalement que pour tous x,y,z dans A on a

$$d(x,z)\leq max(d(x,y),d(y,z))\leq d(x,y)+d(y,z).$$

En effet, la deuxième inégalité est évidente et comme $v(z-x)=v(z-y+y-x)\geq min(v(z-y),v(y-x))$, alors $d(x,z)\leq$ $\leq max(d(x,y),d(y,z))$. L'ultramétrique qu'on vient de définir s'appele la *distance $\mathfrak{m}$-adique* et la topologie définie par cette distance s'appele la *topologie $\mathfrak{m}$-adique*.

THÉORÈME 5 - *Les applications $(x,y)\longrightarrow x+y$ et $(x,y)\longrightarrow xy$ sont des applications uniformement continues de $A\times A$ dans A, c'est à dire, A muni de la topologie $\mathfrak{m}$-adique est un anneau topologique.*

Il faut montrer que si x est proche de x' et y l'est de y', alors xy est proche de $x'y'$. En effet, $x'y'-xy=$ $=x'(y'-y)+(x'-x)y$ et donc,

$$v(x'y'-xy)\geq min(v(x'(y'-y)),v((x'-x)y)).$$

Comme $v(x')$ et $v(y)$ sont tous les deux ≥ 0, alors

$$v(x'y'-xy)\geq min(v(y'-y),v(x'-x)).$$

Ceci nous donne $d(x'y',xy)\leq max(d(x',x),d(y',y))$ et l'uniforme continuité de la multiplication est montrée. La même chose se fait pour l'addition.

REMARQUE - Si l'on fixe un élément $a\in A$, l'application

$$x\rightarrow a+x$$

est un homeomorphisme de A sur lui même et ceci est valable, en général, dans les groupes additifs topologiques.

PROPOSITION 2 - *Tout sous-groupe additif ouvert de A est fermé et, en particulier, tout idéal ouvert de A est fermé.*

Soit donc H un sous-groupe additif de A et supposons que H soit ouvert (dans la topologie $\mathfrak{m}$-adique). D'après la remarque précédente les classes $x+H$, pour x parcourant A, sont encore des ouverts et il en est de même pour la réunion $\bigcup_{x\notin H}(x+H)$. Puisque $H=A-\bigcup_{x\notin H}(x+H)$, il s'en suit que H est fermé.

EXEMPLE - Dans la topologie $\mathfrak{m}$-adique, $\mathfrak{m}^n$ est un idéal ouvert pour tout entier $n\geq 1$ et donc, d'après la proposition 2, fermé. En effet, si $a\in\mathfrak{m}^n$, alors $a+\mathfrak{m}^n$ est un voisinage de a et $a+\mathfrak{m}^n\subset\mathfrak{m}^n$ et ceci nous montre que $\mathfrak{m}^n$ est un voisinage de chacun des ses points, c'est à dire, $\mathfrak{m}^n$ est ouvert.

PROPOSITION 3 - *Pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de l'anneau* A, *l'adhérence de* $\mathfrak{a}$ *dans la topologie* $\mathfrak{m}$*-adique est*

$$adh(\mathfrak{a})=\bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n).$$

En effet, soit $x\in adh(\mathfrak{a})$ et soit $n\geq 0$ un entier quelconque. Puisque $x+\mathfrak{m}^n$ est un voisinage de x, alors il coupe l'idéal $\mathfrak{a}$, c'est à dire, $(x+\mathfrak{m}^n)\cap\mathfrak{a}\neq\emptyset$ et ceci nous montre qu'il existe un élément $a\in\mathfrak{a}$ tel que $a\in x+\mathfrak{m}^n$. On a ainsi montré que $x\in a+\mathfrak{m}^n\subset\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n$ et ceci étant vrai pour n'importe quel entier $n\geq 0$, il s'en suit que $x\in\bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n)$. D'autre part, il est facile à voir que tout élément de $\bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n)$ est adhérent à l'idéal $\mathfrak{a}$, d'où la proposition.

COROLLAIRE - *Soient* A *noethérien et* $\mathfrak{m}\subset Rad(A)$ *un idéal de* A. *Alors tout idéal de* A *est fermé dans la topologie* $\mathfrak{m}$*-adique.*

En effet, ceci resulte de la proposition 3 et du théorème 4 (théorème de Krull).

On dira qu'un anneau topologique A est un *anneau de Zariski* s'il est noethérien et s'il existe un idéal $\mathfrak{m}\subset Rad(A)$ tel que la topologie donnée sur A soit la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

On remarque que l'idéal $\mathfrak{m}$ n'est pas determiné de façon unique par la topologie dans un anneau de Zariski. De plus, d'après le corollaire ci-dessus, tout idéal d'un anneau de Zariski est fermé.

§.4 ANNEAUX COMPLÉTS

Soient A un anneau commutatif à élément unité, $\mathfrak{m}$ un idéal de A tel que $\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^n=(0)$ et sur A la topologie $\mathfrak{m}$-adique. De plus, soit d la distance $\mathfrak{m}$-adique sur l'anneau A. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A est une *suite de Cauchy* si quel que soit le nombre réel $\varepsilon>0$, il existe un entier n_0 tel que pour tous entiers $m\geq n_0$ et $n\geq n_0$ on ait $d(x_m,x_n)\leq\varepsilon$.

PROPOSITION 4 - *Une suite* $(x_n)_{n\geq 0}$ *d'éléments de* A *est une suite de Cauchy si et seulement si* $x_{n+1}-x_n\to 0$ *pour* $n\to\infty$, *ou encore, si et seulement si* $d(x_{n+1},x_n)\to 0$ *pour* $n\to\infty$.

Il est évident que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, alors on a $d(x_{n+1},x_n)\to 0$ pour $n\to\infty$. Supposons que cette condition soit satisfaite. Alors

$$d(x_m,x_n)\leq max(d(x_m,x_{m+1}),d(x_{m+1},x_{m+2}),\dots,d(x_{n-1},x_n))$$

nous montre que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.

Supposons maintenant que l'anneau A soit *complét*, c'est à dire, que toute suite de Cauchy a une limite dans A. Il resulte immediatement de la proposition précédente qu'un *suite* $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A est *convergente* si et seulement si $d(x_{n+1},x_n)\to 0$ pour $n\to\infty$ et ceci entraîne que, pour qu'une *série* $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ soit *convergente* il faut et il suffit que $y_n\to 0$ pour $n\to\infty$.

THÉORÈME 6 - *(Théorème de finitude) - Soient* A *un anneau commutatif à élément unité,* $\mathfrak{m}=(x_1,\dots,x_q)A$ *un idéal de* A *de type fini et supposons que* A *soit séparé dans la topologie* $\mathfrak{m}$*-adique (ceci équivaut à* $\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^n=(0)$*). Si, de plus,* A

est complét dans la topologie $\mathfrak{m}$*-adique, alors* $A/\mathfrak{m}$ *noethérien entraîne* A *noethérien.*

Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de A et $A'=\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^nT^n=A[x_1T,\dots,x_qT]$ l'anneau de Rees associé à l'idéal $\mathfrak{m}$. On sait que A' contient A en degré 0 ($A\subset A'$) et on considère l'idéal homogène $\mathfrak{m}A'$ de A' et l'anneau quotient $G(A)=A'/\mathfrak{m}A'=\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ (somme directe). On voit que $G(A)$ a une structure d'anneau, en tant que quotient et une structure de module, en tant que somme directe. On dit que $G(A)$ est *l'anneau gradué* associé à l'anneau A. On considère maintenant l'homomorphisme canonique $\varphi: A'\to A'/\mathfrak{m}A'=G(A)$; en degré 0, on a $\varphi(A)=A/\mathfrak{m}$. Ceci nous montre que $G(A)=\varphi(A')=\varphi(A[x_1T,\dots,x_qT])=(A/\mathfrak{m})[\varphi(x_1T),\dots,\varphi(x_qT)]$ et comme $A/\mathfrak{m}$ est un anneau noethérien, d'après le théorème de Hilbert, il en resulte que $G(A)$ est aussi noethérien. On considère maintenant l'idéal homogène de A', $\mathfrak{b}'=\sum_{n=0}^{\infty}(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{m}^n)T^n$ et on voit que $\varphi(\mathfrak{b}')$ est un idéal homogène de $G(A)$. Comme $G(A)$ est noethérien, alors $\varphi(\mathfrak{b}')$ est engendré par un nombre fini d'éléments homogènes, $\varphi(\mathfrak{b}')=(\varphi(b_1T^{n(1)}),\dots,\varphi(b_rT^{n(r)}))G(A)$. On va montrer que les b_i engendrent l'idéal $\mathfrak{b}$. En effet, comme $b_i\in\mathfrak{b}\cap\mathfrak{m}^{n(i)}\subset\mathfrak{b}$, alors il en resulte que $(b_1,\dots,b_r)A\subset\mathfrak{b}$. D'autre part, si $c\in\mathfrak{b}$, alors $cT^{v(c)}\in\mathfrak{b}'$ et ceci nous montre que

$$\varphi(cT^{v(c)})=\sum_{i=1}^{r}\varphi(b_iT^{n(i)})\varphi(y_{i,1}T^{v(c)-n(i)})$$

avec les $y_{i,1}$ dans A. On voit que l'élément

$$c_1=c-\sum_{i=1}^{r}b_iy_{i,1}\in\mathfrak{m}^{v(c)+1}$$

et si l'on applique le même raisonnement à c_1, il existe des éléments $y_{i,2}$ dans A tels que l'élément $c_2=c_1-\sum_{i=1}^{r}b_iy_{i,2}\in\mathfrak{m}^{v(c)+2}$. En général, il existe des éléments $y_{i,n}$ dans A tels que l'on ait $c_n=c_{n-1}-\sum_{i=1}^{r}b_iy_{i,n}\in\mathfrak{m}^{v(c)+n}$. Mais, on constate aussi que $y_{i,n}$ est dans $\mathfrak{m}^{v(c)+n-1-n(i)}$ et donc, $v(y_{i,n})\geq v(c)+n-1-n(i)$ pour $i=1,\dots,r$ et pour tout entier $n>0$. La relation $v(y_{i,n})\geq v(c)+n-1-n(i)$ nous montre que $y_{i,n}\to 0$ pour $n\to\infty$ et donc, la série $\sum_{n=1}^{\infty}y_{i,n}$ converge (car A est complét) et soit $y_i=\sum_{n=1}^{\infty}y_{i,n}$ sa somme. Puisqu'on a $c_n=c-\sum_{i=1}^{r}b_i\sum_{j=1}^{n}y_{i,j}$ alors $\lim c_n=c-\sum_{i=1}^{r}b_iy_i$ et comme $\lim c_n=0$, d'après l'unicité de la limite (car l'anneau A est séparé) il en resulte que $c=\sum_{i=1}^{r}b_iy_i$ avec les y_i dans A. Ceci nous montre que $\mathfrak{b}=(b_1,\dots,b_r)A$ et donc, que A est noethérien.

COROLLAIRE - *Si* B *est un anneau noethérien, alors l'anneau de séries formelles* $B[[X_1,\dots,X_q]]$ *est aussi noethérien.*

Soient $A=B[[X_1,\dots,X_q]]$ et $\mathfrak{m}=(X_1,\dots,X_q)A$. Puisque $A/\mathfrak{m}=B$ est noethérien, $\mathfrak{m}$ est de type fini et enfin, A est complét et séparé dans la topologie $\mathfrak{m}$-adique, il en resulte, d'après le théorème 6, que A est aussi noethérien.

§5. COMPLÉTION

Soient A un anneau commutatif à élément unité, $\mathfrak{m}$ un idéal de A tel que $\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^n=(0)$ et soit v la *fonction d'ordre* définie sur l'anneau A. Pour tout $x\in A$, $v(x)$ est le plus grand entier tel que $x\in\mathfrak{m}^{v(x)}$ et $v(0)=+\infty$. Étant donnés deux entiers n et q avec $q\leq n$, alors $\mathfrak{m}^n\subset\mathfrak{m}^q$ et donc, par passage au quotient, on a un homomorphisme

$$\varphi_{q,n}:\ A/\mathfrak{m}^n\to A/\mathfrak{m}^q.$$

Il est facile de vérifier que, étant donnés trois entiers r, q et n avec $r\leq q\leq n$, alors $\varphi_{r,q}\circ\varphi_{q,n}=\varphi_{r,n}$; de plus, $\varphi_{n,n}$ est l'identité dans $A/\mathfrak{m}^n$. On considère alors la limite projective de la famille $(A/\mathfrak{m}^q)_{q>0}$ pour la famille d'applications $\varphi_{q,n}$ (cf. N. Bourbaki, Théorie des Ensembles - Fascicule des Résultats, Paris 1958; §6, n. 14) et on la note $\hat{A}=\varprojlim(A/\mathfrak{m}^q,\varphi_{q,n})$.

On sait que $\hat{A}$ est une partie du produit $\prod_{n=1}^{\infty}(A/\mathfrak{m}^n)$ et ceci est un anneau en tant que produit d'anneaux. On va en faire du produit $\prod_{n=1}^{\infty}(A/\mathfrak{m}^n)$ un anneau topologique en le munissant de la topologie produit des topologies discrètes des $A/\mathfrak{m}^n$. Cette topologie sur $\prod_{n=1}^{\infty}(A/\mathfrak{m}^n)$ n'est pas la topologie discrète. On va étudier la topologie induite sur $\hat{A}$ par la topologie de $\prod_{n=1}^{\infty}(A/\mathfrak{m}^n)$. Pour cela, on va définir une fonction d'ordre $\hat{v}$ sur $\hat{A}$, comme suit. On sait que $\hat{A}$ est l'ensemble des suites (dites cohérentes) $(a_1, \dots, a_n, \dots)$ telles que $a_n \in A/\mathfrak{m}^n$ pour tout entier $n \geq 1$ et si $q \leq n$, alors $a_q = \varphi_{q,n}(a_n)$. On va alors poser, pour toute suite $(a_1, \dots, a_n, \dots)$ de $\hat{A}$, $\hat{v}((a_1, \dots, a_n, \dots))=$ le plus grand entier n tel que $a_n = 0$ (ceci a bien un sens, car il y a des zeros au commencement de la suite et après les a_n sont tous $\neq 0$; en effet, si $a_q \neq 0$ et si $q \leq r$, alors $a_r \neq 0$, car $a_q = \varphi_{q,r}(a_r)$). De plus, on posera $\hat{v}((0, \dots, 0, \dots)) = +\infty$. On voit alors assez facilement que les ensembles $\{\hat{a} \in \hat{A} \mid \hat{v}(\hat{a}) \geq n\}$ forment un système fondamental de voisinages de l'origine pour la topologie induite sur $\hat{A}$ par la topologie produit de $\prod_{n=1}^{\infty}(A/\mathfrak{m}^n)$. Montrons que A s'injecte dans $\hat{A}$. En effet, on considère l'application $a \in A \longrightarrow$ (classe de a modulo $\mathfrak{m}, \dots$, classe de a modulo $\mathfrak{m}^n, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty}(A/\mathfrak{m}^n)$ et on voit que cette dernière suite est cohérente, c'est à dire, elle appartient à $\hat{A}$. Si l'on désigne par $\varphi : A \to \hat{A}$ l'application qu'on vient de définir, on voit facilement que φ est un homomorphisme d'anneaux et comme $\varphi(a)=0$ entraîne que classe de a modulo $\mathfrak{m}^n = 0$ pour tout entier $n > 0$, alors $a \in \mathfrak{m}^n$ pour tout entier $n > 0$. Donc, $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = (0)$ et ceci nous montre que $a = 0$. On a ainsi montré que φ est une injection et l'on peut, au moyen de φ, plonger A dans $\hat{A}$. De plus, on a $v = \hat{v} \circ \varphi$, et il en resulte que la topologie de A est induite par celle de $\hat{A}$. Chaque $A/\mathfrak{m}^n$ muni de la topologie discrète est complét et donc, $\prod_{n=1}^{\infty}(A/\mathfrak{m}^n)$ est complét comme produit de complets. Comme $\hat{A}$ est fermé dans le produit $\prod_{n=1}^{\infty}(A/\mathfrak{m}^n)$, car $\hat{A}$ est une intersection de fermés, il en resulte que $\hat{A}$

est complét. Montrons maintenant que A est dense dans $\hat{A}$. En effet, soit $\hat{a} = (a_1, \dots, a_n, \dots)$ avec a_i dans $A/\mathfrak{m}^i$ pour tout $i \geq 1$. Il existe un élément $a \in A$ tel que a_n est la classe de a modulo $\mathfrak{m}^n$ et comme pour $q \leq n$, $a_q = \varphi_{q,n}(a_n)$, alors a_q est la classe de a modulo $\mathfrak{m}^q$. Ceci nous montre que les n premières composantes de $\hat{a}$ et de $\varphi(a)$ coincident et donc, $\hat{a}$ et $\varphi(a)$ sont "proches", c'est à dire, $\hat{a}$ est une limite d'éléments $\varphi(a)$. Ceci nous montre que A est dense dans $\hat{A}$. L'anneau $\hat{A}$ s'appele *l'anneau topologique complété de* A. Étant donné un idéal $\mathfrak{a}$ de l'anneau A, on va noter $\hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\hat{A}$ l'idéal de $\hat{A}$ engendré par $\mathfrak{a}$. Là dessus, on remarque que $\mathfrak{a}$ est contenu dans $\hat{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a} \subset \hat{\mathfrak{a}})$.

THÉORÈME 7 - *Soient* A *un anneau commutatif à élément unité et* $\mathfrak{m}$ *un idéal de* A *de type fini tel que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = (0)$. *Alors, la topologie de* $\hat{A}$ *est la topologie* $\mathfrak{m}\hat{A}$*-adique.*

Pour cela, il suffit de démontrer que les $\hat{\mathfrak{m}}^n$ forment un système fondamental de voisinages de zero dans $\hat{A}$ et pour cela, on n'a qu'à démontrer le lemme suivant:

LEMME 2 - *Soient* A *un anneau commutatif à élément unité et* $\mathfrak{m}$ *un idéal de* A *de type fini tel que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = (0)$. *Alors,* $\hat{\mathfrak{m}}^n = \{\hat{a} \in \hat{A} \mid \hat{v}(\hat{a}) \geq n\}$.

On remarque, tout d'abord, que $\hat{\mathfrak{m}}^n = \mathfrak{m}^n \hat{A}$ et donc, si $\hat{a} \in \hat{\mathfrak{m}}^n$ on peut écrire $\hat{a} = \sum_i m_i \hat{a}_i$ avec les m_i dans $\mathfrak{m}^n$ et les $\hat{a}_i$ dans $\hat{A}$, pour tout indice i (ces indices sont en nombre fini). Puisque m_i est dans $\mathfrak{m}^n$, alors on a $\hat{v}(\varphi(m_i)) = v(m_i) \geq n$ et comme φ est injectif, alors $\hat{v}(m_i) \geq n$ pour tout i. Ceci nous montre que $\hat{v}(m_i \hat{a}_i) \geq n$ pour tout i et donc, $\hat{v}(\hat{a}) \geq n$. On remarque tout simplement que, puisque m_i est dans $\mathfrak{m}^n$, on a $\varphi(m_i) = (0, \dots, 0$, classe de m_i modulo $\mathfrak{m}^{n+1}, \dots)$, c'est à dire, dans $\varphi(m_i)$ on a n zeros au commencement de la suite.

Soit maintenant $\hat{a} \in \hat{A}$ tel que $\hat{v}(\hat{a}) \geq n$. On peut écrire que $\hat{a}=(0,\dots,0,\bar{a}_{n+1},\dots)$ avec les $\bar{a}_i$ dans $A/\mathfrak{m}^i$ pour tout $i\geq n+1$ et où il y a n zeros au commencement de la suite. Étant donné que $\bar{a}_q=\varphi_{q,q+1}(\bar{a}_{q+1})$, où

$$\varphi_{q,q+1}\colon\ A/\mathfrak{m}^{q+1}\longrightarrow A/\mathfrak{m}^{q},$$

alors a_q et a_{q+1} ont la même classe modulo $\mathfrak{m}^q$, c'est à dire, $a_{q+1}-a_q\in\mathfrak{m}^q$. Maintenant on emploie le fait que l'idéal $\mathfrak{m}$ soit de type fini et soit alors $\mathfrak{m}=(x_1,\dots,x_s)A$. On va désigner par $m_j(x)$ les monômes de degré n en les x_i; il y a $\binom{n+s-1}{s-1}$ de ces monômes et comme $a_{q+1}-a_q\in\mathfrak{m}^q$, alors on peut écrire $a_{q+1}-a_q=\sum_{j=1}^{\binom{n+s-1}{s-1}} c_{q,j}m_j(x)$, où les $c_{q,j}$ sont dans $\mathfrak{m}^{q-n}$ pour tout $q\geq n$. On va poser $b_{q-n,j}=c_{n+1,j}+\dots+c_{q,j}$ et soit $\bar{b}_{q-n,j}$ la classe de $b_{q-n,j}$ modulo l'idéal $\mathfrak{m}^{q-n}$ pour tout $q\geq n+1$. Comme $b_{q+1-n,j}-b_{q-n,j}=c_{q+1,j}\in\mathfrak{m}^{q+1-n}$, il en resulte que $\bar{b}_{q-n,j}=\varphi_{q-n,q+1-n}(\bar{b}_{q+1-n,j})$, où $\varphi_{q-n,q+1-n}\colon A/\mathfrak{m}^{q+1-n}\to A/\mathfrak{m}^{q-n}$. Ceci nous montre que la suite $(\bar{b}_{1,j},\bar{b}_{2,j},\dots,\bar{b}_{q-n,j},\dots)$ est cohérente et soit $\hat{a}_j=(\bar{b}_{1,j}\bar{b}_{2,j},\dots,\bar{b}_{q-n,j},\dots)\in\hat{A}$. Si l'on montre que $\hat{a}=\sum_{j=1}^{\binom{n+s-1}{s-1}} m_j(x)\hat{a}_j\in\mathfrak{m}^n\hat{A}=\hat{\mathfrak{m}}^n$, on aura démontré le lemme. Pour cela, il suffit de montrer que la composante de degré q de $\hat{a}$ est égale à la composante de degré q de $\sum_{j=1}^{\binom{n+s-1}{s-1}} m_j(x)\hat{a}_j$. Comme $a_{n+1}-a_n=\sum_{j=1}^{\binom{n+s-1}{s-1}} c_{n,j}m_j(x)$ et $c_{n,j}\in\mathfrak{m}^{n-n}=\mathfrak{m}^0=A$ pour tout j, alors $a_{n+1}\in\mathfrak{m}^n$, car $a_n=0$ et $m_j(x)\in\mathfrak{m}^n$ pour tout j. Ceci nous montre que la classe de a_{n+1} modulo $\mathfrak{m}^n$ est égale à zero et si l'on applique $\varphi_{q,n}\colon A/\mathfrak{m}^n\to A/\mathfrak{m}^q$ à ceci, pour $q>n$, alors la classe de a_{n+1} modulo $\mathfrak{m}^q$ est aussi égale à zero. Maintenant on remarque que $a_q-a_{n+1}=\sum_{j=1}^{\binom{n+s-1}{s-1}} b_{q-n-1,j}m_j(x)$ et donc, $\bar{a}_q$ est égal à la classe de $\sum_{j=1}^{\binom{n+s-1}{s-1}} b_{q-n-1,j}m_j(x)$ modulo $\mathfrak{m}^q$. D'autre part, la composante de degré q de $\sum_{j=1}^{\binom{n+s-1}{s-1}} m_j(x)\hat{a}_j$ est égale à $\sum_{j=1}^{\binom{n+s-1}{s-1}}$ (classe de $m_j(x)$ modu-

lo $\mathfrak{m}^q$).$\bar{b}_{q,j}$ (on va noter $m_j(x)$ la classe de $m_j(x)$ modulo $\mathfrak{m}^q$). Étant donné que $b_{q,j}=c_{n+1,j}+\dots+c_{q+n,j}$ et $b_{q-n-1,j}=c_{n+1,j}+\dots+c_{q-1,j}$, alors $b_{q,j}-b_{q-n-1,j}=c_{q,j}+\dots+c_{q+n,j}$ et comme $c_{q+i,j}\in\mathfrak{m}^{q+i-n}\subset\mathfrak{m}^{q-n}$ pour $i=0,1,\dots,n$ et pour tout j, alors $b_{q,j}-b_{q-n-1,j}\in\mathfrak{m}^{q-n}$ pour tout j. Mais, $m_j(x)\in\mathfrak{m}^n$ et donc, $(b_{q,j}-b_{q-n-1,j}).m_j(x)\in\mathfrak{m}^{q-n}\mathfrak{m}^n=\mathfrak{m}^q$, c'est à dire, la classe de $(b_{q,j}-b_{q-n-1,j})m_j(x)$ modulo $\mathfrak{m}^q$ est égale à zero. Ceci nous montre que la composante de degré q de $\sum_{j=1}^{\binom{n+s-1}{s-1}} m_j(x)\hat{a}_j$ est la classe de $\sum_{j=1}^{\binom{n+s-1}{s-1}} b_{q-n-1,j}m_j(x)$ modulo $\mathfrak{m}^q$. On a ainsi montré que $\hat{a}=\sum_{j=1}^{\binom{n+s-1}{s-1}} m_j(x)\hat{a}_j$ et le lemme est démontré.

THÉORÈME 8 - *Soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{m}$ un idéal de A tel que $\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^n=(0)$ et $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Alors $\hat{A}$ est noethérien, $\hat{A}$ est un anneau de Zariski et tout idéal de $\hat{A}$ est fermé* (dans la topologie $\mathfrak{m}\hat{A}$-adique).

En effet, comme $\mathfrak{m}$ est de type fini, d'après le théorème 7, la topologie de $\hat{A}$ est la topologie $\mathfrak{m}\hat{A}$-adique. De plus, $\hat{A}$ est complét et séparé dans la topologie $\mathfrak{m}\hat{A}$-adique et $\mathfrak{m}\hat{A}$ est de type fini. Étant donné que l'on a $\hat{A}/\mathfrak{m}\hat{A}=A/\mathfrak{m}$ et que A est noethérien, alors $\hat{A}/\mathfrak{m}\hat{A}$ est aussi noethérien. D'après le théorème 6, $\hat{A}$ est noethérien. Pour montrer que $\hat{A}$ est un anneau de Zariski, il suffit de montrer que $\mathfrak{m}\hat{A}\subset Rad(\hat{A})$. D'après la prop. 1, il suffit alors de démontrer que tout élément de $1+\mathfrak{m}\hat{A}$ est inversible dans l'anneau $\hat{A}$. En effet, si $x\in\mathfrak{m}\hat{A}$, alors $1+x$ est inversible dans $\hat{A}$, car son inverse est $1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^nx^n+\dots$ et cet élément est dans $\hat{A}$, car son terme général tend vers zero. Il s'agit donc d'une série convergente. Ceci nous montre que $\hat{A}$ est un anneau de Zariski. D'après le corollaire de la prop. 3, tout idéal de $\hat{A}$ est fermé dans la topologie $\mathfrak{m}\hat{A}$-adique.

COROLLAIRE 1 - *Soient A un anneau noethérien et $\mathfrak{b}$ un ideal de A. Alors, l'adhérence de $\mathfrak{b}$ dans A est $\mathfrak{b}\hat{A}\cap A$.*

Tout d'abord, $\mathfrak{b}\hat{A}\cap A$ est fermé dans A, car d'après le théorème 8, $\mathfrak{b}\hat{A}$ est fermé dans $\hat{A}$. Si l'on montre que $\mathfrak{b}$ est dense dans $\mathfrak{b}\hat{A}\cap A$, alors il en resulte que $adh(\mathfrak{b})=\mathfrak{b}\hat{A}\cap A$. En effet, soit $c\in\mathfrak{b}\hat{A}\cap A$. On peut écrire que $c\in\mathfrak{b}\hat{A}$ et $c\in A$ et donc, $c=\sum_i c_i\hat{a}_i$ avec les c_i dans $\mathfrak{b}$ et les $\hat{a}_i$ dans $\hat{A}$ (avec un nombre fini d'indices i). Comme A est dense dans $\hat{A}$, alors pour chaque i, il existe un a_i dans A tel que a_i soit proche de $\hat{a}_i$ et ceci nous montre que c est proche de $\sum_i c_i a_i$ (somme finie). Donc, $c\in A$ est aussi proche que l'on veut de l'élément $\sum_i c_i a_i\in\mathfrak{b}$ et ceci nous montre que $c\in adh(\mathfrak{b})$.

COROLLAIRE 2 - (conséquence du corollaire 1). *Si A est un anneau de Zariski, alors pour tout ideal $\mathfrak{b}$ de A on a $\mathfrak{b}\hat{A}\cap A=\mathfrak{b}$.*

PROPOSITION 5 - *Soient A un anneau de Zariski, a un élément de A et $\mathfrak{b}$ un idéal de A. Alors $a\hat{A}\cap\mathfrak{b}\hat{A}=(aA\cap\mathfrak{b})\hat{A}$.*

Puisque $a\hat{A}\cap\mathfrak{b}\hat{A}\supset aA\cap\mathfrak{b}$, alors $a\hat{A}\cap\mathfrak{b}\hat{A}\supset(aA\cap\mathfrak{b})\hat{A}$. Pour montrer l'inclusion opposée, soit $\hat{c}\in a\hat{A}\cap\mathfrak{b}\hat{A}$. Comme $\hat{c}\in a\hat{A}$, alors on peut écrire $\hat{c}=a\hat{b}$ avec $\hat{b}\in\hat{A}$ et donc, il existe $b_n\in A$ et $c_n\in(\mathfrak{m}\hat{A})^n$ tels que $\hat{b}=b_n+c_n$. Ceci nous montre que $b_n a=\hat{c}-c_n a\in\mathfrak{b}\hat{A}+(\mathfrak{m}\hat{A})^n a=(\mathfrak{b}+\mathfrak{m}^n a)\hat{A}$ et comme $b_n a\in A$, alors $b_n a\in(\mathfrak{b}+\mathfrak{m}^n a)\hat{A}\cap A=\mathfrak{b}+\mathfrak{m}^n a$. Il existe $m_n\in\mathfrak{m}^n$ tel que $(b_n-m_n)a\in\mathfrak{b}$ et si l'on fait $n\to+\infty$, $b_n\to\hat{b}$ et $m_n\to 0$. Donc, $\hat{c}=\hat{b}a\in(\mathfrak{b}\cap aA)\hat{A}$, car $(b_n-m_n)a\in\mathfrak{b}\cap aA$. On a ainsi montré ce qu'il faut.

REMARQUE - La prop. 5 est encore vraie si l'on prend tout simplement A noethérien et deux idéaux quelconques $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ de A, c'est à dire, on a $\mathfrak{a}\hat{A}\cap\mathfrak{b}\hat{A}=(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\hat{A}$. Plus généralement, ceci est vrai pour des modules de type fini sur un anneau noethérien. Précisement, si A est un anneau noethérien et si E et F sont deux sous modules d'un module de type fini sur A (donc, ces modules sont noethériens), alors $(E\cap F)^{\wedge}=\hat{E}\cap\hat{F}$. Ici A est un anneau topologique muni d'une topologie $\mathfrak{m}$-adique et on munit E et F de la topologie $\mathfrak{m}$-adique (cf. N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Chap. III, § 3, n. 4, Corollaire 1 du Théorème 3).

THÉORÈME 9 - (*Théorème de Mori*). *Soit A un anneau de Zariski tel que $\hat{A}$ soit factoriel. Alors A est factoriel.*

Il s'agit de démontrer que étant donnés $a,a'\in A$, alors l'idéal $\mathfrak{b}=aA\cap a'A$ est principal, c'est à dire, deux éléments quelconques de A ont un *ppcm*. Or, on voit que $\mathfrak{b}\hat{A}=(aA\cap a'A)\hat{A}=a\hat{A}\cap a'\hat{A}$ et comme $\hat{A}$ est factoriel, alors l'idéal $a\hat{A}\cap a'\hat{A}$ est principal, c'est à dire, il existe un élément $c\in\hat{A}$ tel que $a\hat{A}\cap a'\hat{A}=c\hat{A}$. Soient maintenant $\hat{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}\hat{A}$ et $\hat{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}\hat{A}$. Par le lemme d'Artin-Rees, il existe un entier $q\geq 0$ tel que pour tout $n\geq q$ on ait $\hat{\mathfrak{m}}^n\cap\hat{\mathfrak{b}}=\hat{\mathfrak{m}}^{n-q}(\hat{\mathfrak{m}}^q\cap\hat{\mathfrak{b}})\subset\hat{\mathfrak{m}}\hat{\mathfrak{b}}=c\hat{\mathfrak{m}}$ et comme $c\in\hat{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}\hat{A}=adh(\mathfrak{b})$, alors il existe un $b\in\mathfrak{b}$ tel que $c-b\in\hat{\mathfrak{m}}^n$. Ceci nous montre que $c-b\in\hat{\mathfrak{m}}^n\cap\hat{\mathfrak{b}}\subset c\hat{\mathfrak{m}}$ et donc, il existe un $m\in\hat{\mathfrak{m}}$ tel que $c-b=cm$, c'est à dire, $c(1-m)=b$. Comme A est un anneau de Zariski, il en est de même de $\hat{A}$ et donc, $1-m$ est inversible dans $\hat{A}$ (l'inverse de $1-m$ est $1+m+m^2+\dots$). On a ainsi montré que c et b sont associés dans $\hat{A}$ et il en resulte que $c\hat{A}=b\hat{A}$. Par le corollaire 2 du théorème 8, on a $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\hat{A}\cap A=b\hat{A}\cap A=bA$ et le théorème est demontré.

REMARQUES

1 - Il se peut fort bien que l'anneau A soit factoriel sans que $\hat{A}$ le soit c'est à dire, la réciproque du théorème de Mori n'est pas vraie. On verra un exemple au chapitre suivant.

2. Étant donné un anneau A quelconque (pas nécessairement de Zariski) tel que $\hat{A}$ soit factoriel, en général on ne peut pas conclûre que A est factoriel. Mais, au moyen d'un processus de "zariskification" de l'anneau A, on peut en déduire, dans certains cas, que l'anneau A est factoriel. En effet, soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{m}$ un idéal de A tel que $\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^n=(0)$ et $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. On sait déjà (cf. théorème 8) que $\hat{A}$ est noethérien, que $\hat{A}$ est un anneau de Zariski et que la topologie de $\hat{A}$ est la topologie $\mathfrak{m}\hat{A}$-adique, Maintenant on considère l'anneau de fractions de A par rapport à la partie multiplicative $1+\mathfrak{m}$ qu'on va noter $A'=(1+\mathfrak{m})^{-1}A$. On voit immediatement que $A'=\{s^{-1}a\in\hat{A}\,|\,a\in A,\ s\in 1+\mathfrak{m}\}$ et donc, $A\subset A'\subset\hat{A}$. On considère sur

A' la topologie $\mathfrak{m}A'$-adique et on va montrer que celle-ci est la topologie induite sur A' par la topologie $\mathfrak{m}\hat{A}$-adique de $\hat{A}$. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout entier $n \geqq 0$ on a $(\mathfrak{m}\hat{A})^n \cap A' = (\mathfrak{m}A')^n$. Il est clair que $(\mathfrak{m}\hat{A})^n \cap A' \supset (\mathfrak{m}A')^n$ et on va montrer l'inclusion opposée. Soit alors $s^{-1}a \in (\mathfrak{m}\hat{A})^n \cap A'$. On a que $a \in A$ et $s \in 1+\mathfrak{m}$ et comme $s^{-1}a \in (\mathfrak{m}\hat{A})^n$ et $\hat{A}$ est de Zariski, alors $a \in (\mathfrak{m}\hat{A})^n$. Donc, $a \in (\mathfrak{m}\hat{A})^n \cap A = \mathfrak{m}^n$ (car, l'idéal $\mathfrak{m}$ étant ouvert, il est fermé). On voit alors que $a/s = (1/s)a \in A'\mathfrak{m}^n = (\mathfrak{m}A')^n$ et on a ce qu'il faut. On en déduit encore que $\hat{A}$ est le complété de A' pour la topologie $\mathfrak{m}A'$-adique. On va montrer maintenant que A' muni de la topologie $\mathfrak{m}A'$-adique est un anneau de Zariski. En effet, il s'agit de montrer que tout élément de $1+\mathfrak{m}A'$ est inversible dans A'. Si $x \in 1+\mathfrak{m}A'$, alors on peut écrire que $x = 1 + (m/(1+m'))$ avec $m, m' \in \mathfrak{m}$ et donc, x est inversible, son inverse étant $1/x = (1+m')/(1+m+m')$. On voit ainsi que le passage de A à $\hat{A}$ peut se décomposer en un passage de A à A' et d'un passage de A' à $\hat{A}$ L'anneau A' s'appele la *zariskification de l'anneau A*. On remarque que le passage de A' à $\hat{A}$ est la complétion d'un anneau de Zariski. Ainsi, si $\hat{A}$ est factoriel, par le théorème de Mori on en déduit que A' est aussi factoriel et dans certains cas, on sait que si A' est factoriel, alors A l'est aussi, par le théorème de Nagata. On peut donner le result suivant:

THÉORÈME 10 - (*Théorème de Nagata-Mori*). *Soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{m}$ un idéal de A tel que $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n = (0)$ et $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Si $\hat{A}$ est factoriel et si $1+\mathfrak{m}$ est engendré par des éléments premiers, alors A est aussi factoriel.*

CHAPITRE V

SÉRIES FORMELLES

§1. PRÉLIMINAIRES

Soient A un anneau (intègre) commutatif à élément unité, $R = A[[X]]$ et S une partie multiplicative de A. On peut former $S^{-1}R$ et $(S^{-1}A)[[X]]$, mais en général on a $S^{-1}R \subsetneqq (S^{-1}A)[[X]]$. En effet, il suffit de voir que

$$1 + (1/s)X + (1/s^2)X^2 + \ldots + (1/s^n)X^n + \ldots$$

est un élément de l'anneau $(S^{-1}A)[[X]]$ qui n'est pas en général dans $S^{-1}R$, où $s \in S$. Par exemple, si l'on prend

$$A = Z \quad \text{et} \quad S = \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots\}$$

alors l'élément $1 + (1/2)X + (1/2^2)X^2 + \ldots + (1/2^n)X^n + \ldots$ est dans $(S^{-1}Z)[[X]]$ mais il n'est pas dans $S^{-1}(Z[[X]])$, d'où, $S^{-1}Z[[X]]) \subsetneqq (S^{-1}Z)[[X]]$. On va démontrer la proposition suivante:

PROPOSITION 1 - L'anneau $(S^{-1}A)[[X]]$ *est le complété de $S^{-1}R$ pour la topologie (X)-adique. De plus, la zariskification de $S^{-1}R$ est l'anneau $T^{-1}R$, où T est l'ensemble des séries formelles dont le terme constant est un élément de S.*

En effet, soit