§ 3. Réunions et intersections

1. Réunion et intersection de deux ensembles

Soient X et Y deux ensembles; on appelle **intersection de** X **et** Y l'ensemble noté

$$X \cap Y$$

et défini comme suit : la relation $z \in X \cap Y$ est équivalente à la conjonction des relations

$$z \in X \qquad \text{et} \qquad z \in Y;$$

autrement dit, $X \cap Y$ est formé des objets appartenant à la fois à X et à Y. On appelle d'autre part **réunion de** X **et** Y l'ensemble noté

$$X \cup Y$$

et défini comme suit : la relation $z \in X \cup Y$ est équivalente à la relation

$$z \in X \qquad \text{ou} \qquad z \in Y;$$

autrement dit, $X \cup Y$ est formé des objets appartenant soit à X, soit à Y, soit à X et à Y.

¶ *Remarque* 1. L'existence d'ensembles $X \cap Y$ et $X \cup Y$ possédant les propriétés indiquées est évidente intuitivement, mais ne l'est pas du tout mathématiquement. L'existence de $X \cap Y$ s'obtient à l'aide du Théorème 4 du § 1 (qu'on applique à X et à la relation $x \in Y$). Celle de $X \cup Y$ s'obtiendrait de même si l'on savait d'avance qu'il existe un ensemble contenant à la fois X et Y (on appliquerait alors le Théorème 4 du § 1 à cet ensemble et à la relation $z \in X$ ou $z \in Y$); mais l'existence d'un ensemble contenant à la fois X et Y est un axiome (ou résulte d'un axiome plus général servant à former la réunion d'une famille d'ensembles, cf. n° 2), de sorte qu'il est inutile de chercher à la démontrer mathématiquement.

Il est clair qu'on a les relations

$$X \cap Y \subset X, \quad Y \subset X \cup Y;$$

en outre, soit Z un ensemble quelconque; pour que Z soit contenu dans X et dans Y, il faut et il suffit qu'on ait $z \in X$ et $z \in Y$ pour tout $z \in Z$, i.e. $z \in X \cap Y$, i.e. $Z \subset X \cap Y$; ainsi, $X \cap Y$ *est le plus grand ensemble contenu à la fois dans* X *et dans* Y. De même, pour que Z contienne X et Y, il faut et il suffit que Z contienne $X \cup Y$, de sorte que $X \cup Y$ *est le plus petit ensemble contenant à la fois* X *et* Y.

On dit que deux ensembles X et Y sont **disjoints** lorsque

$$X \cap Y = \varnothing,$$

i.e. lorsque X et Y n'ont aucun élément commun.

Les règles de calcul gouvernant l'emploi des signes $\cup$ et $\cap$ sont très simples, et nous les utiliserons souvent sans référence; le lecteur établira lui-même ces règles, dont voici les principales :

$$X \cap Y = Y \cap X, \qquad X \cup Y = Y \cup X,$$
$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z, \qquad X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z,$$
$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z),$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z),$$
$$(X - A) \cap (X - B) = X - (A \cup B) \quad \text{si} \quad A, B \subset X.$$

2. *Réunion d'une famille d'ensembles* (*)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles (§ 2, nº 3, *Remarque* 4); on appelle **réunion de cette famille** l'ensemble A défini comme suit : la relation $x \in A$ est équivalente à la relation

il existe un $i \in I$ tel que l'on ait $x \in A_i$.

Lorsque I se compose de deux éléments seulement, notés i et j par exemple, il est clair que la réunion n'est autre que l'ensemble $A_i \cup A_j$ défini au nº précédent. Dans le cas d'un ensemble d'indices I quelconque, l'*existence* de la réunion est un axiome des Mathématiques, et on doit donc se borner à l'admettre. L'*unicité* de la réunion (i.e. le fait qu'il existe *au plus un* ensemble A possédant la propriété indiquée) peut par contre se démontrer, à l'aide du § 1, Théorème 2.

Remarque 2. Quand on parle d'une famille d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$, on ne suppose pas que les A_i soient des parties d'un même ensemble indépendant de l'indice i; mais l'existence de la réunion montre qu'en fait il en est bien ainsi (il y a même plus : compte-tenu du Théorème 4 du § 1, l'existence d'un ensemble contenant tous les A_i est *équivalente* à l'existence de leur réunion).

Pour désigner la réunion d'une famille d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$, on emploie la notation

$$\bigcup_{i \in I} A_i;$$

(*) En première lecture, on pourra se dispenser d'étudier ce nº et le suivant, ou les considérer comme des exercices.

bien que la notation en question fasse intervenir une lettre i (qui désigne, intuitivement, un « élément variable » de I), le résultat ne dépend évidemment pas de i, et on peut, dans la notation précédente, utiliser au lieu de la lettre i toute autre lettre non encore employée par ailleurs.

THÉORÈME 1. *Soit* A *la réunion d'une famille d'ensembles* $(A_i)_{i \in I}$. *Pour qu'un ensemble* X *contienne* A_i *quel que soit* $i \in I$, *il faut et il suffit que* X *contienne* A.

Supposons que X contienne tous les A_i; si $x \in A$, il existe un i tel que $x \in A_i$, et comme $A_i \subset X$ on a $x \in X$; donc $A \subset X$. Inversement, si X contient A, pour montrer que X contient tous les A_i il suffit d'établir que $A \supset A_i$ pour tout i, ce qui est clair.

THÉORÈME 2 (associativité de la réunion). *Soient* $(A_i)_{i \in I}$ *et* $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *deux familles d'ensembles, et supposons que*

$$I = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda ;$$

on a alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Big(\bigcup_{i \in I_\lambda} A_i \Big).$$

Posons en effet

$$B_\lambda = \bigcup_{i \in I_\lambda} A_i ;$$

pour qu'un x appartienne à la réunion de la famille $(A_i)_{i \in I}$ il faut et il suffit qu'il existe un $i \in I$ tel que $x \in A_i$; comme I est réunion des I_λ, cela signifie qu'il existe un $\lambda \in \Lambda$ et un $i \in I_\lambda$ tels que $x \in A_i$, donc qu'il existe un $\lambda \in \Lambda$ tel que $x \in B_\lambda$; par suite, la réunion de la famille $(A_i)_{i \in I}$ est identique à celle de la famille $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 3. Le Théorème 2 exprime que, pour calculer une réunion, on peut en partager les termes en groupes et remplacer chaque groupe par sa réunion.

THÉORÈME 3. *Soient* $f : X \to Y$ *une application, et* $(A_i)_{i \in I}$ *une famille de parties de* X. *On a alors*

$$f\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f(A_i).$$

Pour $y \in Y$, la relation

$$y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

équivaut à l'existence d'un $i \in I$ tel que $y \in f(A_i)$, i.e. à l'existence d'un $i \in I$ et d'un $x \in A$ tels que $y = f(x)$, i.e. à l'existence d'un x vérifiant

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad x \in \bigcup_{i \in I} A_i,$$

ce qui achève la démonstration.

3. *Intersection d'une famille d'ensembles*

On appelle **intersection d'une famille** non vide (*) **d'ensembles** $(A_i)_{i \in I}$ l'ensemble A défini comme suit : la relation $x \in A$ est équivalente à la relation

$$x \in A_i \quad \text{pour tout} \quad i \in I.$$

Cette intersection se désigne par la notation

$$\bigcap_{i \in I} A_i.$$

THÉORÈME 4. *Soit A l'intersection d'une famille non vide d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$. Pour qu'un ensemble X soit contenu dans A, il faut et il suffit qu'il soit contenu dans A_i pour tout $i \in I$.*

La démonstration est analogue à celle du Théorème 1, et peut être laissée au lecteur à titre d'exercice.

THÉORÈME 5 (associativité de l'intersection). *Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ deux familles d'ensembles; on suppose I, Λ et les I_λ non vides, et que*

$$I = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda;$$

on a alors la relation

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \Big(\bigcap_{i \in I_\lambda} A_i \Big).$$

La démonstration est analogue à celle du Théorème 2.

THÉORÈME 6. *Soient $f : X \to Y$ une application et $(A_i)_{i \in I}$ une famille non vide de parties de X. On a alors*

$$f\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i);$$

si f est injective, on a

$$f\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

(*) Cette condition signifie que I est non vide. Si I est vide, la relation « on a $x \in A_i$ pour tout $i \in I$ » est vérifiée quel que soit x, et par suite ne définit pas un ensemble (sinon l'ensemble de tous les ensembles...).

Si $x \in A_i$ pour tout i, on a $f(x) \in f(A_i)$ pour tout i, ce qui prouve la première assertion du Théorème. Supposons maintenant f injective, et considérons un élément y de l'intersection des $f(A_i)$; pour tout i il existe donc un élément de A_i, soit x_i, tel que $y = f(x_i)$; mais comme f est injective, il existe un seul x tel que $y = f(x)$, et on a donc nécessairement $x = x_i$ pour tout i; ainsi, $x \in A_i$ pour tout i, et y appartient à l'image par f de l'intersection des A_i; on a donc

$$\bigcap f(A_i) \subset f\Big(\bigcap A_i\Big),$$

ce qui établit la seconde assertion du Théorème puisqu'on a de toute façon l'inclusion opposée.

Remarque 4. La seconde assertion du Théorème ci-dessus peut être en défaut si f n'est pas injective. Prenons par exemple pour Y un ensemble contenant au moins deux éléments a et b, pour X le produit $Y \times Y$, et pour f l'application pr_2; soient A l'ensemble des couples (a, y), $y \in Y$, et B l'ensemble des couples (b, y), $y \in Y$; on a évidemment $A \cap B = \varnothing$, donc $f(A \cap B) = \varnothing$; par contre, $f(A) = f(B) = Y$, de sorte que $f(A) \cap f(B)$ est non vide.

THÉORÈME 7. *Soient $f : X \to Y$ une application et $(A_i)_{i \in I}$ une famille non vide de parties de Y. On a alors*

$$\overset{-1}{f}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I} \overset{-1}{f}(A_i).$$

En effet, pour qu'un $x \in X$ appartienne au premier membre, il faut et il suffit que $f(x)$ appartienne à l'intersection des A_i, i.e. que $f(x) \in A_i$ pour tout i, autrement dit que $x \in f^{-1}(A_i)$ pour tout i, ou enfin que x appartienne au second membre, d'où le Théorème.

On démontrerait de même la formule

$$\overset{-1}{f}\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f}(A_i).$$

THÉORÈME 8. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille non vide de parties d'un ensemble X. On a les relations*

$$X - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X - A_i); \qquad X - \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X - A_i)$$

Soit en effet $x \in X$; la relation

$$x \in X - \bigcap_{i \in I} A_i$$

équivaut à la négation de la relation

$$\text{pour tout} \quad i \in I \quad \text{on a} \quad x \in A_i,$$

donc à la relation

$$\text{il existe un } i \in I \text{ tel que } x \notin A_i,$$

donc à

$$\text{il existe un } i \in I \text{ tel que } x \in X - A_i,$$

donc à

$$x \in \bigcup_{i \in I} (X - A_i),$$

ce qui établit la première formule. La seconde s'en déduit en tenant compte de la relation $X - (X - A) = A$, valable pour toute partie A de X.

EXERCICES

Il est parfaitement utopique d'espérer apprendre des Mathématiques, si élémentaires ou si supérieures soient-elles, sans résoudre des Exercices.

Les Exercices qu'on trouvera dans ce livre sont de trois sortes. Certains sont des illustrations pratiques ou même numériques des théories exposées dans le texte; le lecteur débutant ne pourra pas acquérir la technique du calcul sans résoudre une partie appréciable des Exercices de ce genre. D'autres apportent au texte des compléments théoriques élémentaires; en les étudiant, le lecteur s'habituera à manipuler le langage et les modes de raisonnements utilisés dans le texte; ceux de ces Exercices qui ne sont pas *très* faciles sont précédés d'un signe ¶. Enfin, la dernière catégorie est constituée par des Exercices qui apportent au texte des compléments importants et difficiles; ils sont destinés uniquement aux étudiants déjà avancés qui s'intéressent vraiment aux Mathématiques; ces Exercices sont précédés de deux ou même trois signes ¶.

Nous ne saurions trop insister enfin sur le fait que résoudre un Exercice ne consiste pas seulement à se convaincre, à l'aide d'un « brouillon » fait à la hâte, du fait qu'on en a à peu près compris la solution; si cette méthode est admissible pour les Exercices de calcul numérique, il faut par contre s'efforcer de *rédiger intégralement* les Exercices plus théoriques, où l'on doit construire de véritables démonstrations. De cette façon, et uniquement de cette façon, l'étudiant parviendra à acquérir un langage clair et correct, et à utiliser les termes techniques dans leur sens propre, ce qui, en Mathématiques, est le signe le plus certain de la compréhension d'un sujet.

§ 3

1. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble X, et $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties d'un ensemble Y. A l'aide des intersections et des réunions de ces familles, calculer l'intersection et la réunion de la famille $(A_i \times B_j)_{i\in I,\, j\in J}$ de parties de $X \times Y$.

2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble X; on a donc $\mathfrak{P}(A_i) \subset \mathfrak{P}(X)$ pour tout $i \in I$. Les relations

$$\mathfrak{P}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{P}(A_i)$$
$$\mathfrak{P}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i} \mathfrak{P}(A_i)$$

sont-elles vraies?

3. Soient X et Y deux ensembles et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X, ayant pour réunion l'ensemble X tout entier. On suppose donnée, pour chaque $i \in I$, une application f_i de X_i dans Y. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes : *a*) quels que soient $i, j \in I$, on a $f_i(x) = f_j(x)$ pour tout $x \in X_i \cap X_j$; *b*) il existe une application f de X dans Y qui, pour tout $i \in I$, coïncide avec f_i dans X_i. L'application f est alors unique (on dit qu'elle s'obtient par **recollement** des f_i).

4. On appelle **recouvrement** d'un ensemble X toute famille $(U_i)_{i\in I}$ de parties de X ayant pour réunion l'ensemble X tout entier. Étant donnés deux recouvrements $(U_i)_{i\in I}$ et $(V_j)_{j\in J}$ de X, on dit que le second est **plus fin** que le premier si, pour tout indice $j \in J$, il existe un indice $i \in I$ tel que l'on ait $V_j \subset U_i$.
Montrer qu'étant donnés deux recouvrements quelconques de X, il en existe un troisième plus fin que les deux premiers.

¶ 5. On appelle **schéma simplicial** tout objet formé d'un ensemble K et d'un ensemble de parties *finies et non vides* de K (appelées les **simplexes** du schéma simplicial considéré) vérifiant la condition suivante : toute partie non vide d'un simplexe de K est encore un simplexe de K. [Un schéma simplicial n'est donc pas seulement un ensemble K, c'est un couple formé de K et d'un ensemble de parties de K; néanmoins, on désigne toujours un schéma simplicial par la même lettre que l'ensemble correspondant. Dans un schéma simplicial K, on appelle **simplexe de dimension** n tout simplexe comportant $n + 1$ éléments; les simplexes de dimension 0 s'appellent les **sommets** de K, ceux de dimension 1 les **arêtes** de K, ceux de dimension 2 les **faces** de K, etc...]. La notion de schéma simplicial a été introduite en particulier pour étudier les propriétés « topologiques » des polyèdres de dimension quelconque, et apparaît déjà chez Euler, qui a démontré le résultat suivant : étant donnée dans l'espace usuel une surface polyédrale, comportant a sommets, b arêtes et c faces, le nombre $a - b + c$ ne dépend pas de la façon dont on a décomposé cette surface en triangles. A partir d'une surface polyédrale décomposée en triangles, on construit un schéma simplicial comme suit : l'ensemble K est l'ensemble des sommets du polyèdre considéré P; toute partie à un élément de K est un simplexe de K; une partie $\{a, b\}$ à deux éléments de K est une arête si le segment de droite joignant le point a au point b est une arête de P; enfin une partie $\{a, b, c\}$ à trois éléments de K est une face si le triangle de sommets a, b, c est une face du polyèdre P. La généralisation à un nombre quelconque de dimensions est facile.]

a) Soient X un ensemble quelconque et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X. On convient de dire qu'une partie S de l'ensemble d'indices I est un simplexe si elle est finie, non vide, et si l'intersection

$$\bigcap_{i \in S} U_i$$

est non vide. Montrer que le couple formé par l'ensemble I et les simplexes qu'on vient de définir est un schéma simplicial (appelé le **nerf** du recouvrement donné).

b) Soit K un schéma simplicial. On désigne par P(K) l'ensemble des fonctions f définie sur l'ensemble K, à valeurs réelles, et possédant les trois propriétés suivantes : l'ensemble des $x \in K$ tels que $f(x) \neq 0$ est un simplexe de K; on a $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in K$; enfin, la somme

$$\sum_{x \in K} f(x)$$

des valeurs de f aux divers points de K (somme qui ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls) est égale à 1. Enfin, pour tout $x \in K$, on note U_x l'ensemble des $f \in P(K)$ telles que $f(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(U_x)_{x \in K}$ est un recouvrement de l'ensemble P(K), et que le nerf de ce recouvrement est précisément le schéma simplicial donné K.

[Si le schéma simplicial K est fini et comporte n éléments $x_1, \ldots, x_n$, on peut représenter chaque $f \in P(K)$ par le point de $\mathbf{R}^n$ dont les coordonnées sont les n nombres $f(x_1), \ldots, f(x_n)$; on obtient alors une bijection de P(K) sur un polyèdre de l'espace $\mathbf{R}^n$, polyèdre dont la « forme» dépend précisément des relations combinatoires existant entre les divers simplexes du schéma simplicial donné. C'est l'opération fondamentale qui permet de transformer un problème en apparence purement « qualitatif », l'étude de la « forme » des polyèdres, en un problème purement algébrique, l'étude des schémas simpliciaux finis.