

I. Couples

Nous avons introduit, au § précédent, les signes = et \in , qui servent à construire des relations. Nous allons maintenant introduire une opération qui sert à construire des objets mathématiques.

Cette opération consiste à former, à l'aide de deux objets mathématiques x et y énoncés dans cet ordre, un troisième objet, que l'on note

$$(x, y)$$

et qu'on appelle le **couple** (x, y) ; et l'opération consistant à former des couples est soumise à une seule règle d'emploi, que voici : *pour que l'on ait*

$$(x, y) = (u, v)$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$x = u \quad \text{et} \quad y = v.$$

En particulier, on ne peut avoir $(x, y) = (y, x)$ que si $x = y$, ce qui montre que l'ordre dans lequel on écrit les deux objets figurant dans un couple est essentiel. On aura soin en particulier de ne pas confondre le couple (x, y) avec l'ensemble $\{x, y\}$ défini au § 1.

Remarque 1. On peut considérer la notion de couple comme un *signe fondamental* (§ 0, n° 1) qui, avec les signes

$$\text{ou, non, } \tau, \square, =, \in$$

et des lettres, permettrait d'écrire les Mathématiques en langage formalisé. Mais on peut aussi exprimer la notion de couple à l'aide des autres signes fondamentaux (ou d'abréviations qui s'y ramènent) : il suffit de prendre comme définition de (x, y) l'ensemble

$$\{ \{x\}, \{x, y\} \}$$

dont les *éléments* sont l'ensemble $\{x\}$ et l'ensemble $\{x, y\}$ — il est en effet visible qu'en définissant ainsi un couple on satisfait à l'axiome fondamental donnant la condition d'égalité de deux couples. Toutefois cette seconde méthode met l'accent sur un aspect de la notion de couple qui est parfaitement dénué d'intérêt. Il est donc bien préférable de s'en tenir à la méthode adoptée plus haut, la seule et unique question ayant une importance mathématique étant en effet de connaître les conditions pour que deux couples soient égaux.

On dit qu'un objet z est un *couple* s'il existe des objets x et y tels que $z = (x, y)$; en vertu de la règle énoncée plus haut, les objets x et y sont alors bien déterminés par la donnée de z ; on dit que x est la **première projection** et y la **seconde projection** de z , et on écrit alors

$$x = pr_1(z), \quad y = pr_2(z).$$

On dit qu'un ensemble G est un **graphe** si tout élément de G est un couple. Lorsqu'il en est ainsi, il existe deux ensembles X et Y caractérisés par les conditions suivantes : la relation $x \in X$ (resp. $y \in Y$) équivaut à l'existence d'un $z \in G$ tel que $x = pr_1(z)$ (resp. $y = pr_2(z)$). On écrit alors

$$X = pr_1(G), \quad Y = pr_2(G).$$

On peut étendre comme suit la notion de couple. Étant donnés trois objets x, y, z on pose

$$(x, y, z) = ((x, y), z);$$

on dit que (x, y, z) est un **triplet**; pour que l'on ait

$$(x', y', z') = (x'', y'', z'')$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$x' = x'', \quad y' = y'', \quad z' = z'';$$

en effet la relation considérée s'écrit $((x', y'), z') = ((x'', y''), z'')$, donc équivaut à $(x', y') = (x'', y'')$ et $z' = z''$, donc à $x' = x'', y' = y''$ et $z' = z''$.

De même, étant donnés quatre objets x, y, z, t on pose

$$(x, y, z, t) = ((x, y, z), t)$$

et on dit que (x, y, z, t) est un **quadruplet**, etc, etc...

II. Produit cartésien de deux ensembles

Soient X et Y deux ensembles; on peut démontrer (à l'aide des méthodes du § 0) qu'il existe un ensemble Z caractérisé par la propriété suivante : *pour que l'on ait* $z \in Z$, *il faut et il suffit qu'il existe* $x \in X$ et $y \in Y$ *tels que* $z = (x, y)$. On dit que Z est le **produit cartésien** de X et Y , et on écrit

$$Z = X \times Y.$$

L'ensemble produit $X \times Y$ est donc l'ensemble des couples (x, y) où $x \in X$ et $y \in Y$.

Le fait que l'opération précédente soit nommée en l'honneur de Descartes s'explique comme suit. Dans le « plan » de la Géométrie élémentaire, choisissons deux axes de coordonnées Ox , Oy et des unités de longueur sur ces axes; on peut alors définir l'abscisse et l'ordonnée de tout point P du plan; les désignant par x et y , il est naturel de ne pas faire de différence entre le point P et le couple (x, y) ; du reste, si P' est un autre point, de coordonnées x' et y' , la relation $P = P'$ équivaut évidemment à $x = x'$ et $y = y'$, i.e. à $(x, y) = (x', y')$. Désignant par \mathbf{R}

l'ensemble des nombres réels, on voit donc que le choix d'un système de coordonnées dans le plan permet d'assimiler le plan à l'ensemble

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$$

des couples de nombres réels — c'est ce qui justifie la référence à l'inventeur des systèmes de coordonnées.

Soient A, B, X, Y quatre ensembles; alors les relations

$$A \subset X \quad \text{et} \quad B \subset Y \quad \text{impliquent} \quad A \times B \subset X \times Y;$$

la réciproque de cette assertion évidente est exacte pourvu que A et B soient non vides; en effet, si $A \times B \subset X \times Y$ et si B contient au moins un élément b , alors pour tout $a \in A$ on a $(a, b) \in A \times B$ donc $(a, b) \in X \times Y$ donc $(a, b) = (x, y)$ pour un $x \in X$ et un $y \in Y$ donc $a = x$ pour un $x \in X$, donc $A \subset X$; et on montrerait de même que $B \subset Y$ pourvu que A soit non vide.

Si par contre l'un des ensembles A, B est vide, on a toujours $A \times B \subset X \times Y$, pour la raison triviale que

$$A \times B = \emptyset \quad \text{si} \quad A = \emptyset \quad \text{ou si} \quad B = \emptyset;$$

en effet, si la relation $A \times B = \emptyset$ est fautive, alors $A \times B$ contient un couple (x, y) au moins, on a donc $x \in A$ et $y \in B$, ce qui montre que A et B sont non vides.

La notion de produit cartésien s'étend au cas de plusieurs facteurs; si X, Y, Z, T, \dots sont des ensembles, on définit

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z; \quad X \times Y \times Z \times T = (X \times Y \times Z) \times T; \quad \dots$$

Les éléments de $X \times Y \times Z$ sont visiblement les triplets (x, y, z) définis au n° 1, avec $x \in X, y \in Y, z \in Z$; de même les éléments de $X \times Y \times Z \times T$ sont les quadruplets (x, y, z, t) avec $x \in X, y \in Y, z \in Z$ et $t \in T$.

On observera que la relation

$$(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$$

est fautive; les éléments du premier membre sont en effet les objets de la forme $((x, y), z)$ avec $x \in X, y \in Y, z \in Z$, tandis que ceux du second sont les objets de la forme $(x, (y, z))$ — or la règle d'égalité de deux couples ne permet pas d'écrire que l'on a $((x, y), z) = (x, (y, z))$ quels que soient x, y, z . Néanmoins, dans la pratique, on convient de ne faire aucune différence entre $((x, y), z)$ et $(x, (y, z))$, et de considérer les ensembles $(X \times Y) \times Z$ et $X \times (Y \times Z)$ comme identiques; cette convention de langage est, à strictement parler, contradictoire — comme beaucoup d'autres conventions que nous introduirons par la suite; cependant, les contradictions auxquelles conduit son emploi sont « sans importance », et le lecteur, après avoir acquis une certaine habitude des raisonnements de la théorie des Ensembles, évitera sans peine de tomber dans ces difficultés.

Enfin, si X est un ensemble, on pose

$$X^2 = X \times X, \quad X^3 = X \times X \times X, \quad X^4 = X \times X \times X \times X,$$

et ainsi de suite. Par exemple, et \mathbf{R} désignant l'ensemble des nombres réels, \mathbf{R}^4 est l'ensemble des quadruplets (x, y, z, t) formés de quatre nombres réels; c'est ce que les physiciens appellent « l'espace à quatre dimensions » ou « l'espace-temps »; le lecteur débutant fera bien de ne pas se laisser impressionner par cette terminologie, l'expérience montrant qu'il n'est pas plus difficile de raisonner dans \mathbf{R}^4 que dans \mathbf{R}^3 ou $\mathbf{R}^{100} \dots$

Il va de soi que, comme dans le cas d'un produit de deux facteurs, un produit d'ensembles est vide dès qu'un des facteurs est vide.

3. Graphes et fonctions

Soient X et Y deux ensembles; on appelle fonction définie sur l'ensemble X et à valeurs dans l'ensemble Y toute opération consistant à faire correspondre, à chaque élément x de X , un élément y de Y , qui dépend de x suivant une loi bien déterminée; par exemple la fonction $y = \sin x$ lorsque $X = Y = \mathbf{R}$.

La définition (sic) précédente contient malheureusement de nombreux mots dont nous n'avons pas donné de définition mathématique — par exemple, que signifie l'expression « faire correspondre »? En prenant pour argent comptant la définition en question, on n'obtient une fois de plus qu'un mauvais calembour.

On a donc été obligé de modifier la définition précédente, et de la remplacer par la suivante (qui, dans le cas classique, reviendrait à définir une fonction en se donnant d'avance sa « courbe représentative » dans le plan, méthode que même un physicien considérerait comme fort raisonnable) : on appelle fonction un triplet

$$f = (G, X, Y)$$

où G, X, Y sont des ensembles assujettis à vérifier les conditions suivantes:

(F 1) : on a $G \subset X \times Y$;

(F 2) : pour tout $x \in X$ il existe un et un seul $y \in Y$ tel que $(x, y) \in G$.

La condition (F 1) signifie que G est un graphe (n° 1); on dit que G est le **graphe de la fonction** f ; d'après (F 2), pour tout $x \in X$ il existe un $z \in G$ tel que $x = pr_1(z)$; on a donc

$$pr_1(G) = X, \quad pr_2(G) \subset Y.$$

Soit x un élément de X ; l'unique élément y de Y tel que $(x, y) \in G$ s'appelle la **valeur de la fonction** f en x , et on utilise pour le désigner la notation

$$y = f(x);$$

il est alors clair que le graphe G de f est l'ensemble des couples de la forme $(x, f(x))$ où $x \in X$, ce qui est conforme à l'idée intuitive qu'on se fait d'une fonction.

Étant donnée une fonction $f = (G, X, Y)$, on dit que X est l'**ensemble de départ** et Y l'**ensemble d'arrivée** de f .

Étant donnés deux ensembles X et Y , on appelle **application de X dans Y** toute fonction ayant X pour ensemble de départ et Y pour ensemble d'arrivée; les mots « fonction » et « application » sont donc synonymes, mais dans la pratique il est souvent plus commode de dire « soit f une application de X dans Y » que de dire « soit f une fonction définie sur X et à valeurs dans Y ». Du reste, au lieu de dire

soit f une application de X dans Y ,

on dit souvent

soit une application $f: X \rightarrow Y$,

ou encore

soit une application $X \xrightarrow{f} Y$.

Il arrive aussi qu'au lieu de désigner une fonction par une lettre telle que f , g , etc... on la désigne par la « formule » qui permet de calculer $f(x)$ en fonction de x ; ainsi, dans le cas où $X = Y = \mathbf{R}$, quand on dit

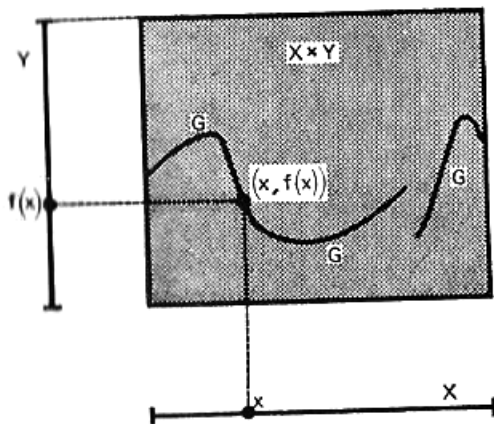
considérons l'application $x \mapsto x^3$ de \mathbf{R} dans \mathbf{R} ,

ou quand on dit

considérons sur \mathbf{R} la fonction x^3 ,

on doit traduire par

considérons l'application f de \mathbf{R} dans \mathbf{R} telle que $f(x) = x^3$ pour tout $x \in \mathbf{R}$;



on devrait même traduire comme suit :

considérons l'application $f = (G, \mathbf{R}, \mathbf{R})$ où G est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tels que

$$y = x^3.$$

Soient

$$f = (G, X, Y) \quad \text{et} \quad f' = (G', X', Y')$$

deux fonctions ou applications. Vu la condition d'égalité de deux triplets, la relation $f = f'$ signifie qu'on a

$$G = G', \quad X = X', \quad Y = Y';$$

comme $X = pr_1(G)$ et $X' = pr_1(G')$, la première condition implique du reste la seconde. D'autre part, si les conditions

$$X = X', \quad Y = Y'$$

sont déjà vérifiées, pour écrire que $G = G'$ (i.e. que $f = f'$) il suffit évidemment d'écrire que l'on a

$$f'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in X,$$

puisque G est formé des couples $(x, f(x))$ et G' des couples $(x, f'(x))$, avec $x \in X$.

Remarque 2. Vu le peu d'exemples qu'ils ont eu l'occasion d'étudier, les débutants pensent souvent que toute fonction est définie par une « formule » permettant de calculer $f(x)$ en fonction de x . On ne saurait avoir une idée plus fautive de la notion de fonction.

Tout d'abord le mot « formule » ne veut rien dire aussi longtemps qu'on n'en a pas donné une définition précise. Il est vraisemblable que, pour le débutant, une « formule » est une succession d'opérations algébriques plus ou moins compliquées effectuées sur la variable x . Malheureusement, de telles opérations n'ont aucun sens lorsque x est un élément d'un ensemble arbitraire. Si au contraire la variable x est un nombre réel, auquel cas on peut en effet effectuer des calculs algébriques sur x , les fonctions qu'on obtient de cette façon sont tellement particulières qu'on a abandonné depuis au moins 200 ans l'idée de définir ainsi la notion de fonction; en fait, les besoins de l'Analyse ont obligé les mathématiciens à inventer des catégories de plus en plus générales de fonctions, et l'étude de ces fonctions plus ou moins « arbitraires » a conduit à l'invention de la théorie des Ensembles, puis de la théorie moderne de l'Intégration, puis de celle des espaces topologiques, etc... — autrement dit, c'est en généralisant de plus en plus la notion de fonction qu'on a été amené à construire une bonne partie des Mathématiques contemporaines.

L'étude des fonctions qui peuvent se définir par des « formules algébriques » n'est pas pour autant dépourvue d'intérêt — c'est au contraire l'objet d'une branche des Mathématiques (la Géométrie Algébrique) qui n'a jamais été aussi active qu'à l'heure actuelle. Mais les méthodes qu'on emploie pour étudier ces fonctions, et les problèmes qu'on se pose à leur

sujet, n'ont rien de commun avec ceux auxquels on s'intéresse en Algèbre élémentaire et en Analyse.

Remarque 3. Soient X et Y deux ensembles; alors les applications de X dans Y sont les éléments d'un ensemble, qu'on note

$$Y^X$$

et qu'on appelle l'ensemble des applications de X dans Y ; comme une fonction est un triplet $f = (G, X, Y)$ avec $G \subset X \times Y$, on voit que l'ensemble des applications de X dans Y est contenu dans $\mathcal{P}(X \times Y) \times \{X\} \times \{Y\}$.

Dans la pratique, et X et Y étant donnés, on identifie généralement une application de X dans Y à son graphe $G \subset X \times Y$; avec cette convention, l'ensemble des applications de X dans Y apparaît comme une partie de l'ensemble $\mathcal{P}(X \times Y)$.

Remarque 4. On utilise fréquemment une notion voisine de celle de fonction, la notion de famille qu'on définit intuitivement comme suit : soit I un ensemble; alors, pour construire une famille ayant I pour ensemble d'indices (ou une famille indexée par I), on se donne, pour chaque $i \in I$, un objet dépendant de i (sans préciser d'avance dans quel ensemble on choisit les objets ainsi associés aux éléments de I); si l'on note x_i l'objet associé à $i \in I$, on désigne généralement la famille considérée par la notation

$$(x_i)_{i \in I}$$

Mathématiquement, une famille indexée par I est un graphe G possédant les deux propriétés suivantes : on a $pr_1(G) = I$, et pour tout $i \in I$ il existe un seul $z \in G$ tel que $pr_1(z) = i$; écrivant $z = (i, x_i)$ on retrouve la définition intuitive exposée ci-dessus.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille; on dit que c'est une famille d'éléments d'un ensemble X si l'on a $x_i \in X$ pour tout $i \in I$; il existe toujours un tel ensemble X , par exemple $pr_2(G)$ où G est le graphe de la famille considérée. On dit de même qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties d'un ensemble X si l'on a $A_i \subset X$ pour tout $i \in I$.

Lorsque l'ensemble d'indices I d'une famille est l'ensemble dont les éléments sont les entiers naturels $1, 2, 3, \dots$, on dit que cette famille est une suite; on désigne souvent une suite par une notation telle que

$$(x_n)_{n \geq 1}$$

se donner une suite d'éléments d'un ensemble X revient donc à choisir des éléments

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

de X , ou encore à se donner une application $n \rightarrow x_n$ de l'ensemble des entiers naturels dans X .

Il va de soi que nous admettons ici l'existence d'un ensemble (qu'on note généralement \mathbb{N}) dont les éléments sont les nombres $0, 1, \dots$. L'existence de cet ensemble est évidente aussi longtemps qu'on donne aux mots « ensemble » et « nombre entier » leur sens intuitif; quant à démontrer mathématiquement l'existence de l'ensemble \mathbb{N} , c'est une toute autre affaire, car non seulement

on doit tout d'abord construire une théorie mathématique correcte des nombres entiers, mais en outre admettre l'existence d'ensembles comportant une infinité d'éléments; or l'existence de pareils ensembles, intuitivement claire, ne peut pas se démontrer — c'est l'un des axiomes des Mathématiques...

4. Images directes et images réciproques

Soit f une application d'un ensemble X dans un ensemble Y ; étant donnée une partie A de X , on appelle image de A par f l'ensemble des $y \in Y$ possédant la propriété suivante :

$$\text{il existe } x \in A \text{ tel que } y = f(x).$$

Si A se réduit à un seul élément x , son image est évidemment réduite au seul élément $f(x)$. Dans le cas d'une partie A quelconque de X , on désigne l'image de A par la notation $f(A)$ — qui est incorrecte, puisque $f(A)$ n'a de sens que pour $A \in X$ à strictement parler.

On a évidemment

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

pour toute application f .

Soit toujours f une application de X dans Y , et considérons une partie B de Y ; on appelle image réciproque de B par f l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \in B$; cet ensemble se désigne par la notation

$$f^{-1}(B),$$

qu'on abrège souvent (mais à tort) en $f^{-1}(B)$.

On a évidemment les relations

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ pour toute partie } A \text{ de } X,$$

$$B \supset f(f^{-1}(B)) \text{ pour toute partie } B \text{ de } Y;$$

mais on n'a pas le droit, dans ces relations, de remplacer les inclusions par des égalités.

On dit qu'une application $f: X \rightarrow Y$ est constante sur une partie A de X si $f(A)$ se réduit à un seul élément, i.e. (§ 1, Théorème 6) si l'on a

$$f(x') = f(x'') \text{ quels que soient } x' \in A \text{ et } x'' \in A.$$

On dit que f est une application constante si f est constante sur X tout entier.

Soit f une application d'un ensemble X dans lui-même; on dit qu'une partie A de X est stable par f si l'on a $f(A) \subset A$, autrement dit si la relation $x \in A$ implique la relation $f(x) \in A$. Lorsque A se réduit à un seul élément x , cela signifie évidemment que

$$f(x) = x;$$

on dit alors que x est un point fixe de f .

La notion d'image d'un ensemble par une application apparaît en Géométrie élémentaire lorsqu'on parle par exemple de « la transformée d'une droite par une rotation » : une droite est un ensemble (de points), une rotation est une certaine application (de l'ensemble des points de l'espace dans lui-même), et la transformée en question n'est autre que l'image de l'ensemble considéré par cette application.

5. Restrictions et prolongements de fonctions

Soit $f = (G, X, Y)$ une fonction, et considérons un ensemble $X' \subset X$. Soit G' l'ensemble des $z \in G$ tels que $pr_1(z) \in X'$; alors le triplet $f' = (G', X', Y)$ est une fonction — il est clair en effet que $G' \subset X' \times Y$, et que tout pour $x \in X'$ il existe un et un seul $z \in G'$ tel que $pr_1(z) = x$, à savoir $z = (x, f(x))$. La fonction f' , application de X' dans Y telle que

$$f'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in X',$$

s'appelle la **restriction de f à X'** .

Remarque 5. La restriction de f à X' se désigne souvent par la notation

$$f' = f|X' \quad \text{ou} \quad f_{X'}.$$

D'autre part, étant données deux applications f et g dont les ensembles de départ contiennent un même ensemble X , on dit que f et g **coïncident sur X** si l'on a

$$f(x) = g(x) \quad \text{pour tout } x \in X;$$

c'est par exemple le cas si $f|X = g|X$, mais la réciproque n'est pas tout à fait exacte, malgré les apparences...

Soient $f = (G, X, Y)$ et $f' = (G', X', Y')$ deux applications; on dit que f' **est un prolongement de f** si l'on a les relations

$$X' \subset X, \quad Y' \subset Y, \quad \text{et} \quad f(x) = f'(x) \quad \text{pour tout } x \in X'.$$

C'est par exemple le cas si l'on prend pour f' la restriction de f à une partie de X . Notons le résultat suivant : *soient X', X, Y trois ensembles, avec $X' \subset X$, et f une application de X' dans Y ; si Y est non vide il existe une application de X dans Y qui prolonge f .* Pour construire une application $g : X \rightarrow Y$ prolongeant f , on choisit une fois pour toutes un élément c de Y , et on pose

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X', \\ c & \text{si } x \notin X'. \end{cases}$$

Il existe bien entendu d'autres façons de prolonger f , celle qui précède n'est que la plus simple de toutes.

6. Applications composées

Soient X, Y, Z trois ensembles, et

$$f = (G, X, Y), \quad g = (H, Y, Z)$$

deux applications de X dans Y et de Y dans Z respectivement. On va en déduire une troisième application

$$h = (K, X, Z)$$

de X dans Z , en posant

$$h(x) = g(f(x)) \quad \text{pour tout } x \in X;$$

le graphe K de h est évidemment l'ensemble des couples (x, z) possédant la propriété suivante : il existe un $y \in Y$ tel que l'on ait $(x, y) \in G$ et $(y, z) \in H$.

L'application h se désigne par la notation

$$h = g \circ f;$$

on l'appelle la **composée des applications f et g** ; l'application composée $g \circ f$ n'est définie que si l'ensemble d'arrivée de f est identique à l'ensemble de départ de g .

Remarque 6. La notion d'application composée remplace aujourd'hui celles de « fonction de fonction » et de « produit de deux transformations » qu'on utilisait autrefois dans certains cas particuliers. Prenons par exemple $X = Y = Z = \mathbf{R}$, ensemble des nombres réels, et $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$; alors $g \circ f$ est la fonction

$$x \mapsto \sin(x^2),$$

et $f \circ g$ la fonction

$$x \mapsto \sin^2 x,$$

ce qui montre en passant que $f \circ g \neq g \circ f$ en général (quand les deux membres sont définis). Si l'on prend $X = Y = Z =$ l'espace (au sens de la « géométrie dans l'espace » — nous ne chercherons pas à en donner ici une définition correcte), on peut prendre pour f et g des « transformations » au sens géométrique du terme — rotations, translations, homothéties, etc...; l'application composée $f \circ g$ est alors le « produit » des transformations f et g , défini en Géométrie élémentaire.

Nous allons maintenant démontrer un théorème qui jouera par la suite un assez grand rôle :

THÉORÈME 1. *Soient X, Y, Z trois ensembles, et considérons deux applications*

$$f : X \rightarrow Y, \quad h : X \rightarrow Z;$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

a) il existe une application

$$g : Y \rightarrow Z$$

telle que l'on ait $h = g \circ f$;

b) quels que soient $x', x'' \in X$, la relation

$$f(x') = f(x'')$$

implique la relation

$$h(x') = h(x'').$$

La condition a) implique la condition b), car si a) est satisfaite on a

$$h(x') = g(f(x')) = g(f(x'')) = h(x'').$$

Nous allons maintenant établir que b) implique a).

Examinons tout d'abord le cas particulier où $f(X) = Y$. Pour construire g , on va construire son graphe $G \subset Y \times Z$, comme suit : G est l'ensemble des couples (y, z) tels qu'il existe au moins un $x \in X$ vérifiant

$$y = f(x), \quad z = h(x).$$

[Cette construction de G est naturelle, car si l'on suppose le problème résolu G est l'ensemble des couples $(y, g(y))$; or, comme $f(X) = Y$, on peut écrire $y = f(x)$, et alors $g(y) = g(f(x)) = h(x)$, de sorte que G se compose bien des couples de la forme $(f(x), h(x))$ où x décrit X]. Montrons que l'ensemble G ainsi obtenu est effectivement le graphe d'une application $g : Y \rightarrow Z$ telle que $h = g \circ f$. Pour montrer que G est le graphe d'une fonction, on doit prouver que pour tout $y \in Y$, il existe un et un seul $z \in Z$ tel que $(y, z) \in G$; l'existence d'au moins un tel z est claire : il suffit de choisir un x tel que $y = f(x)$, et de prendre $z = h(x)$; d'autre part, supposons que G contienne (y, z') et (y, z'') ; il existe alors dans X des éléments x' et x'' tels que

$$\begin{aligned} y = f(x'), & \quad z' = h(x'), \\ y = f(x''), & \quad z'' = h(x''); \end{aligned}$$

on a alors $f(x') = f(x'')$, donc, d'après l'hypothèse b), $h(x') = h(x'')$, i.e. $z' = z''$, et ceci montre bien que G est le graphe d'une application g de Y dans Z . Pour prouver que $h = g \circ f$, considérons un $x \in X$; alors, par construction, G contient le couple $(f(x), h(x))$; par suite on a $h(x) = g(f(x))$, ce qui établit la relation cherchée.

Il reste à montrer que b) implique a) dans le cas général. Posons $Y' = f(X)$ et considérons l'application f' de X dans Y' donnée par $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$; remplaçant X, Y, Z, f, h par X, Y', Z, f', h il est clair qu'on est maintenant dans l'hypothèse b) avec $f'(X) = Y'$; d'après ce qu'on vient déjà d'établir, il existe donc une application g' de Y' dans Z telle que $h = g' \circ f'$; prolongeons alors g' en une application g de Y dans Z (ce qui est possible comme on l'a vu au n° 5); pour tout $x \in X$, on aura

$$h(x) = g'(f'(x)) = g(f(x)),$$

d'où $h = g \circ f$, ce qui achève la démonstration.

L'explication « intuitive » du Théorème 1 est la suivante : comme la relation $f(x') = f(x'')$ implique $h(x') = h(x'')$, il suffit, pour savoir calculer $h(x)$, de connaître $f(x)$, de sorte que $h(x)$ doit être une fonction de $f(x)$. Mais bien entendu ce genre d'explication ne dispense pas de donner une démonstration correcte.

La propriété la plus importante de l'opération consistant à composer des applications est « l'associativité » de cette opération, exprimée par le résultat suivant :

THÉORÈME 2. Quelles que soient les applications

$$f : X \rightarrow Y, \quad g : Y \rightarrow Z, \quad h : Z \rightarrow T,$$

on a la relation

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Posons $g \circ f = u$ et $h \circ g = v$; en $x \in X$, la valeur du premier membre de la relation à établir est $h(u(x)) = h(g(f(x)))$, et celle du second membre est $v(f(x)) = h(g(f(x)))$, d'où évidemment le Théorème.

Le Théorème 2 permet de définir sans ambiguïté $h \circ g \circ f$, et plus généralement des expressions telles que

$$f_1 \circ f_2 \cdots \circ f_n,$$

pourvu naturellement qu'elles aient un sens, i.e. que l'ensemble de départ de chaque facteur soit égal à l'ensemble d'arrivée du facteur suivant. En particulier, pour toute application $u : X \rightarrow X$ et tout entier $q \geq 1$, on peut définir

$$u^q = u \circ u \cdots \circ u \quad (q \text{ facteurs}).$$

7. Applications injectives

On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est **injective** lorsque, quels que soient $x', x'' \in X$, la relation

$$f(x') = f(x'') \text{ implique } x' = x'',$$

ou encore si

$$x' \neq x'' \text{ implique } f(x') \neq f(x'').$$

Une application injective s'appelle aussi une **injection**. Au lieu du mot « injectif » on utilisait autrefois (i.e. jusqu'en 1955 environ...) l'adjectif **biunivoque**, qu'on trouve encore dans de nombreux ouvrages, et qui présente l'inconvénient de ne pas correspondre à un substantif.

Exemple 1. Prenons $X = Y = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^3$; alors f est injective car, si x et y sont des nombres réels, la relation $x^3 = y^3$ implique $x = y$. Par contre la fonction $f(x) = x^2$ ne l'est pas, car on a par exemple $f(-1) = f(1)$.

Exemple 2. Pour tout ensemble X , on définit l'**application identique de X dans X**

comme étant celle qui, à chaque $x \in X$, fait correspondre x lui-même; on la note souvent

$$j_x,$$

de sorte qu'on a, par définition,

$$j_x(x) = x \text{ pour tout } x \in X;$$

on utilise aussi couramment la notation *id* au lieu de j_x . Cela dit, l'application identique de X dans X est évidemment injective.

On notera que le graphe de j_x est, dans $X \times X$, l'ensemble des couples (x, x) avec $x \in X$; cet ensemble s'appelle la **diagonale du produit** $X \times X$.

Lorsque $X = \mathbf{R}$, l'application identique se réduit à la « fonction x » des Lycées et Collèges. Lorsque X est l'ensemble des points du plan, ou de l'espace, l'application identique n'est autre que la « transformation unité » de la Géométrie élémentaire.

Exemple 3. Soient X et Y deux ensembles tels que $X \subset Y$; l'application $j : X \rightarrow Y$ donnée par $j(x) = x$ pour tout $x \in X$ est évidemment injective; on l'appelle l'**injection canonique de X dans Y** (il y a en général beaucoup d'autres injections de X dans Y ; l'adjectif « canonique » utilisé ici signifie que cette injection particulière est obtenue par un procédé « naturel » ne comportant aucun élément d'arbitraire, et ne faisant intervenir que les données intrinsèques de la situation envisagée — à savoir un ensemble Y et une partie X de Y).

THÉORÈME 3. Soient X et Y des ensembles non vides et f une application de X dans Y . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- f est injective;
- il existe une application $g : Y \rightarrow X$ telle que $g \circ f$ soit l'application identique de X dans X .

Considérons en effet les deux applications

$$f : X \rightarrow Y, \quad j_x : X \rightarrow X;$$

on cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application $g : Y \rightarrow X$ telle que $j_x = g \circ f$; cette condition est donnée par le Théorème 1 du n° 6 : c'est que la relation

$$f(x') = f(x'') \text{ implique } j_x(x') = j_x(x''), \text{ i.e. } x' = x'',$$

ce qui signifie précisément que f est injective; d'où le Théorème.

Exemple 4. Prenons $X = \mathbf{R}_+$, ensemble des nombres réels $x \geq 0$, et $Y = \mathbf{R}$, ensemble de tous les nombres réels (de signe quelconque); enfin prenons $f(x) = x^2$; cette application est évidemment injective (on notera qu'elle cesserait de l'être si l'on remplaçait \mathbf{R}_+ par \mathbf{R}); donc il existe une application $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ telle que $g \circ f$ soit l'identité, i.e. telle que l'on ait $g(x^2) = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$. Cette condition exprime évidemment que

$$g(y) = \sqrt{y} \text{ si } y \geq 0.$$

Autrement dit, on peut prendre pour g toute fonction à valeurs positives qui, pour $y \geq 0$, coïncide avec la fonction \sqrt{y} .

Notons à ce sujet qu'on pourrait évidemment démontrer directement le Théorème 3 sans passer par l'intermédiaire du Théorème 1. L'application cherchée g doit vérifier la relation $g(f(x)) = x$; comme c'est la seule condition que doit vérifier g , on peut déjà choisir arbitrairement $g(y)$ lorsque y n'appartient pas à $f(X)$; si au contraire $y \in f(X)$, il existe un $x \in X$, et un seul puisque f est injective, tel que $y = f(x)$, et on doit alors choisir $g(y) = x$.

8. Applications surjectives et bijectives

On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est **surjective** si $f(X) = Y$, autrement dit si pour tout $y \in Y$ il existe au moins un $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Dire que f est injective signifie, par contre, que pour tout $y \in Y$ il existe au plus un $x \in X$ tel que $y = f(x)$.

On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective, autrement dit si, pour tout $y \in Y$, il existe un et un seul $x \in X$ tel que $y = f(x)$.

Il est clair par exemple que, pour tout ensemble X , l'application identique j_x est bijective.

Une application surjective s'appelle encore une **surjection**, une application bijective, une **bijection**. Une bijection d'un ensemble X dans lui-même s'appelle une **permutation** de X . L'ensemble des permutations de X se désigne par la notation $\mathfrak{S}(X)$.

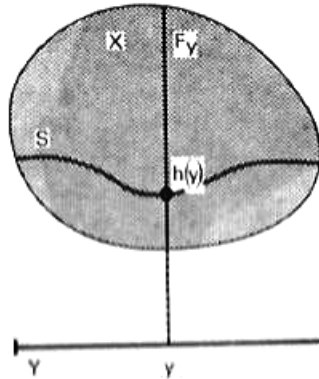
Si $X = \{1, 2, \dots, n\}$ on écrit \mathfrak{S}_n au lieu de $\mathfrak{S}(X)$.

Remarque 6. Dans l'ancienne terminologie, on disait « soit f une application de X sur Y » au lieu de dire « soit f une application surjective de X dans Y »; et pour exprimer que f était bijective, on disait fréquemment « biunivoque sur ».

THÉORÈME 4. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- f est surjective;
- il existe une application $h : Y \rightarrow X$ telle que $f \circ h$ soit l'application identique de Y sur Y .

Si b) est remplie, on a $f(h(y)) = y$ pour tout $y \in Y$, donc tout $y \in Y$ est de la forme $f(x)$, et f est donc bien surjective.



Inversement supposons f surjective, et pour chaque $y \in Y$ désignons par F_y l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) = y$; c'est une partie *non vide* de X ; pour construire l'application cherchée h , il suffit alors de choisir au hasard un élément dans chaque ensemble F_y ; notant $h(y)$ cet élément, on définit bien ainsi une application h de Y dans X telle que $f(h(y)) = y$ pour tout $y \in Y$, ce qui achève la démonstration.

¶ Remarque 7. La seconde partie de la démonstration ci-dessus semblera sans doute correcte, et même évidente, au débutant; mais elle est fort loin d'être mathématiquement complète (on imagine difficilement une machine à démontrer « choisissant au hasard » un élément dans chaque F_y ...). La démonstration correcte s'obtiendrait à l'aide de l'opération de Hilbert du § 0, n° 9 : à défaut de mieux, on obtient une fonction h en posant

$$h(y) = \tau_x(f(x) = y).$$

Notons que le problème revient aussi à construire une partie S de X telle que, pour tout $y \in Y$, l'intersection $S \cap F_y$ soit un ensemble à un élément exactement (on peut alors prendre pour $h(y)$ cet élément). La possibilité de construire un tel ensemble (évidente si l'on utilise l'opération de Hilbert) est connue sous le nom d'**axiome du choix**. Certains mathématiciens, jusqu'à une date récente, mettaient cet axiome en doute, mais on a pu démontrer d'abord qu'il est logiquement compatible avec les autres axiomes (K. Gödel, 1939) puis qu'il en est logiquement indépendant (P. Cohen, 1963). Ces « démonstrations » n'ont naturellement de sens que par rapport à un système métamathématique convenable.

Remarque 8. L'application h dont le Théorème 4 assure l'existence n'est généralement pas unique. Prenons par exemple $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}_+$ et $f(x) = x^2$, de sorte que f est bien surjective (tout nombre réel positif admet une racine carrée). On a alors, entre autres possibilités, les fonctions h suivantes :

$$\begin{aligned} h_1(y) &= \sqrt{y} && \text{pour tout } y \geq 0; \\ h_2(y) &= -\sqrt{y} && \text{pour tout } y \geq 0; \\ h_3(y) &= \begin{cases} +\sqrt{y} & \text{si } y \geq 0 \text{ est rationnel;} \\ -\sqrt{y} & \text{si } y \geq 0 \text{ est irrationnel.} \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction h_3 (qu'il est pratiquement impossible de représenter graphiquement — son graphe n'est pas une « courbe » au sens naïf du terme) pourra sembler étrange au débutant; elle n'est cependant pas moins bonne, du point de vue de la pure théorie des Ensembles, que les deux premières.

THÉORÈME 5. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- f est bijective;
- il existe des applications $g, h: Y \rightarrow X$ telles que l'on ait

$$g \circ f = j_X, \quad f \circ h = j_Y.$$

De plus, si ces conditions sont vérifiées, les applications g et h sont uniques et coïncident.

L'équivalence des propriétés a) et b) résulte immédiatement des Théorèmes 3 et

4, puisque « bijective » signifie « injective et surjective ». Pour montrer qu'il existe une seule fonction g , une seule fonction h , et que $g = h$, il suffit de montrer que toute fonction g est égale à toute fonction h . Or on a

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$$

d'après le Théorème 2, ce qui s'écrit encore $j_X \circ h = g \circ j_Y$; mais il est clair que

$$j_X \circ h = h, \quad g \circ j_Y = g,$$

ce qui achève la démonstration.

Soit

$$f: X \rightarrow Y$$

une bijection; il existe une et une seule application $g: Y \rightarrow X$ telle que l'on ait

$$g \circ f = j_X, \quad f \circ g = j_Y;$$

autrement dit,

$$g(f(x)) = x, \quad f(g(y)) = y.$$

On dit que g est l'**application réciproque** de f , et on la désigne habituellement par la notation

$$f^{-1},$$

qu'on écrit souvent (mais à tort) f^{-1} . Il est clair que pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$ les relations

$$y = f(x), \quad x = f^{-1}(y)$$

sont équivalentes, et que si $G \subset X \times Y$ est le graphe de f , alors le graphe de f^{-1} est l'ensemble des couples (y, x) tels que $(x, y) \in G$ (dans le cas classique où $X = Y = \mathbf{R}$, cela signifie que le second graphe se déduit du premier par une *symétrie par rapport à la première bissectrice*).

Remarque 9. Au lieu d'application réciproque on dit souvent « application inverse ». Cette terminologie peut entraîner de graves confusions; par exemple (pour $X = Y = \mathbf{R}$), tout le monde pensera que la fonction « inverse » de la fonction x est la fonction $1/x$, alors que la fonction « réciproque » de x est x elle-même (d'une manière générale, une application identique est égale à son application réciproque).

Nous ne saurions trop mettre en garde le débutant contre la tentation de croire que le langage est un détail sans importance; connaître avec précision les définitions de tous les termes techniques, et employer ceux-ci dans leur sens propre, toujours le même, est strictement indispensable à la compréhension des Mathématiques — c'est même parfois suffisant...

THÉORÈME 6. Soient $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ deux applications; si f et g sont injectives (resp. surjectives) il en est de même de $g \circ f$; si f et g sont bijectives, il en est de même de $g \circ f$, et l'on a la relation

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Enfin, si f est bijective, il en est de même de f^{-1} et on a la relation

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Si f et g sont injectives, la relation $g(f(x')) = g(f(x''))$ implique $f(x') = f(x'')$ puisque g est injective, donc implique $x' = x''$ puisque f est injective; ceci montre que $g \circ f$ est injective. Si f et g sont surjectives, pour tout $z \in Z$ il existe un $y \in Y$ tel que $z = g(y)$, puis un $x \in X$ tel que $y = f(x)$, d'où $z = g(f(x))$, ce qui montre que $g \circ f$ est surjective.

Si f et g sont bijectives, il en est donc de même de $g \circ f$; de plus, on a

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ j_Y \circ f = f^{-1} \circ f = j_X,$$

ce qui montre que l'application réciproque de $g \circ f$ est bien donnée par la formule de l'énoncé.

Enfin, si f est bijective, les formules

$$f^{-1} \circ f = j_X, \quad f \circ f^{-1} = j_Y$$

montrent que f^{-1} est à la fois surjective et injective (Théorèmes 4 et 5 appliqués à f^{-1}), et admet f pour application réciproque; ceci achève la démonstration.

Remarque 10. Non seulement la formule « évidente »

$$(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

est fautive, mais le second membre n'a de sens que si l'on suppose $Y = Z$ (auquel cas la formule est toujours aussi fautive...).

9. Fonctions de plusieurs variables

On appelle **fonction de deux variables** toute fonction dont l'ensemble de départ est un produit de deux ensembles, ou contenu dans un tel produit. Si f est une fonction de deux variables, définie sur une partie A d'un produit $X \times Y$, la valeur de f en un point (x, y) de A , que l'on devrait noter $f((x, y))$, se désigne pratiquement par la notation

$$f(x, y).$$

On définirait de façon analogue les fonctions de trois, quatre, ... variables, pour lesquelles on emploie les notations $f(x, y, z)$, $f(x, y, z, t)$, etc...

Mathématiquement parlant, il n'existe aucune différence, sinon dans les notations utilisées, entre fonctions d'une variable et fonctions de plusieurs variables — comme en effet nous n'avons fait, au n° 3, aucune espèce d'hypothèse sur les ensembles de départ des fonctions, tout ce qu'on a dit dans ce § s'applique sans aucun changement aux fonctions de « plusieurs » variables. La distinction entre « une » et « plusieurs » variables provient du fait que, jusqu'à une date récente, le mot « variable » désignait ce qu'on appelle aujourd'hui « variable réelle », les

« fonctions d'une variable » étant celles qui sont définies sur une partie de \mathbf{R} , ensemble des nombres réels, tandis que les « fonctions de trois variables », par exemple, étaient celles dont l'ensemble de départ est une partie de \mathbf{R}^3 . C'est entre autres pour éviter d'avoir à tenir compte de ces distinctions qu'on a été amené à donner la définition générale du n° 3, laquelle englobe toutes les notions de fonction actuellement connues, sans aucune exception.

Dans la pratique, il est souvent utile de considérer des fonctions dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des produits. Considérons par exemple une application

$$f: X \times Y \rightarrow U \times V \times W,$$

où X, Y, U, V, W sont des ensembles quelconques. Considérons les projections

$$\begin{aligned} pr_1: U \times V \times W &\rightarrow U, \\ pr_2: U \times V \times W &\rightarrow V, \\ pr_3: U \times V \times W &\rightarrow W; \end{aligned}$$

il est clair qu'on a

$$z = (pr_1(z), pr_2(z), pr_3(z)) \quad \text{pour tout } z \in U \times V \times W,$$

par définition même des projections. Considérant les applications

$$\begin{aligned} f_1 &= pr_1 \circ f: X \times Y \rightarrow U, \\ f_2 &= pr_2 \circ f: X \times Y \rightarrow V, \\ f_3 &= pr_3 \circ f: X \times Y \rightarrow W, \end{aligned}$$

on aura donc

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$$

quels que soient $x \in X$ et $y \in Y$. Ainsi, pour construire f , il est nécessaire et suffisant de connaître les trois fonctions f_1, f_2, f_3 à valeurs dans U, V, W respectivement, et définies sur $X \times Y$. Dans la pratique on écrit

$$f = (f_1, f_2, f_3)$$

(cette notation est en contradiction avec celle qui désigne un triplet, mais cette contradiction est, ici encore, « sans importance »).

Exemple 5. Soient X et Y deux ensembles, et considérons l'application

$$f: X \times Y \rightarrow Y \times X$$

donnée par

$$f(x, y) = (y, x);$$

c'est évidemment une bijection, et l'application réciproque n'est autre que $(y, x) \mapsto (x, y)$. On dit que f est la **bijection canonique** de $X \times Y$ sur $Y \times X$. Lorsque $X = Y = \mathbf{R}$, f est la « symétrie par rapport à la première diagonale ».

Exemple 6. Soient X, Y, Z trois ensembles; l'application

$$f: X \times (Y \times Z) \rightarrow (X \times Y) \times Z$$

donnée par

$$f[(x, (y, z))] = ((x, y), z)$$

est bijective. On dit, ici encore, que c'est la **bijection canonique de $X \times (Y \times Z)$ sur $(X \times Y) \times Z$** . Comme on l'a dit au n° 2, on ne fait pas de différence, dans la pratique, entre $(x, (y, z))$ et $((x, y), z)$.

Il est parfaitement utopique d'espérer apprendre des Mathématiques, si élémentaires ou si supérieures soient-elles, sans résoudre des Exercices.

Les Exercices qu'on trouvera dans ce livre sont de trois sortes. Certains sont des illustrations pratiques ou même numériques des théories exposées dans le texte; le lecteur débutant ne pourra pas acquérir la technique du calcul sans résoudre une partie appréciable des Exercices de ce genre. D'autres apportent au texte des compléments théoriques élémentaires; en les étudiant, le lecteur s'habitue à manipuler le langage et les modes de raisonnements utilisés dans le texte; ceux de ces Exercices qui ne sont pas *très* faciles sont précédés d'un signe ¶. Enfin, la dernière catégorie est constituée par des Exercices qui apportent au texte des compléments importants et difficiles; ils sont destinés uniquement aux étudiants déjà avancés qui s'intéressent vraiment aux Mathématiques; ces Exercices sont précédés de deux ou même trois signes ¶.

Nous ne saurions trop insister enfin sur le fait que résoudre un Exercice ne consiste pas seulement à se convaincre, à l'aide d'un « brouillon » fait à la hâte, du fait qu'on en a à peu près compris la solution; si cette méthode est admissible pour les Exercices de calcul numérique, il faut par contre s'efforcer de *rédigier intégralement* les Exercices plus théoriques, où l'on doit construire de véritables démonstrations. De cette façon, et uniquement de cette façon, l'étudiant parviendra à acquérir un langage clair et correct, et à utiliser les termes techniques dans leur sens propre, ce qui, en Mathématiques, est le signe le plus certain de la compréhension d'un sujet.

Soient I l'ensemble des nombres réels θ tels que $0 \leq \theta \leq 2\pi$, et G l'ensemble des rotations autour d'un point donné O dans le plan. On considère l'application f de I dans G qui, à chaque nombre $\theta \in I$, associe la rotation d'angle θ autour du point O . L'application f est-elle surjective? injective? bijective? Que se passe-t-il lorsqu'on prend pour I l'ensemble des nombres réels θ tels que $0 < \theta < 2\pi$?

Soient X et Y des ensembles; pour qu'une partie G de $X \times Y$ soit le graphe d'une application de X dans Y , il faut et il suffit que l'application pr_1 de G dans X soit bijective.

Soient $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ deux applications, et $h = g \circ f$ l'application composée. a) si h est injective, f est injective; si de plus f est surjective, alors g est injective. b) si h est surjective, g est surjective; si en outre g est injective, alors f est surjective.

On considère des ensembles X, Y, Z et des applications

$$f: X \rightarrow Y, \quad g: Y \rightarrow Z, \quad h: Z \rightarrow X;$$

forme les applications composées

$$h \circ g \circ f, \quad g \circ f \circ h, \quad f \circ h \circ g$$

on suppose soit que deux d'entre elles sont injectives et la troisième surjective, soit que deux d'entre elles sont surjectives et la troisième injective. Montrer qu'alors f, g et h sont bijectives.

Soient X, Y, Z trois ensembles, E l'ensemble de toutes les applications de $X \times Y$ dans Z , F l'ensemble de toutes les applications de X dans l'ensemble

$$Z^Y$$

toutes les applications de Y dans Z . Construire une bijection de E sur F .

On appelle **correspondance** entre deux ensembles X et Y tout triplet

$$f = (G, X, Y) \quad \text{avec} \quad G \subset X \times Y;$$

cette notion généralise donc celle d'application de X dans Y [une correspondance entre X et Y ou, comme on dit aussi, de X à Y , est aussi appelée fréquemment une « fonction multi-

forme non partout définie » pour des raisons qui apparaîtront plus bas; cette terminologie, utilisée jusqu'à une date très récente, présente l'inconvénient majeur de laisser supposer que la notion de correspondance est un cas particulier de celle de fonction, alors que c'est l'opposé qui est vrai.] L'ensemble G s'appelle le **graphe** de f . On dit que f est **définie** en un élément x de X si $x \in \text{pr}_1(G)$; il existe alors au moins un $y \in Y$ tel que $(x, y) \in G$, et on dit que x et y **se correspondent** par f (il peut naturellement arriver que f ne soit pas définie pour tous les $x \in X$, et que, si f est définie en x , il existe plusieurs $y \in Y$ qui correspondent à x par f ; ce sont ces deux circonstances qui expliquent la terminologie « fonction multiforme non partout définie »).

a) Étudier (pour $X = Y = \mathbf{R}$, ensemble des nombres réels) les correspondances dont les graphes sont les ensembles définis par les équations suivantes :

$$xy = 1; \quad axy + bx + cy + d = 0; \quad x^2 + y^2 = 1; \quad x = \sin y$$

(dans le second exemple, a, b, c, d sont des constantes réelles données). Dans chaque cas on déterminera les valeurs de x pour lesquelles la correspondance est définie, et les y qui correspondent à un tel x .

b) Soient Γ et Γ' deux cercles distincts dans un plan; on prend pour X et Y l'ensemble des points de Γ , et pour G l'ensemble des couples $(x, y) \in X \times X$ qui sont situés sur une même tangente à Γ' . Quels sont les points de Γ où f est définie? Combien de points correspondent-ils à un point où f est définie?

¶ 7. Soit $f = (G, X, Y)$ une correspondance entre deux ensembles X et Y (cf. Exercice 6); pour toute partie A de X , on note $f(A)$ l'ensemble des $y \in Y$ qui correspondent par f à au moins un $x \in A$, et pour toute partie B de Y on note

$$\bar{f}^{-1}(B)$$

l'ensemble des $x \in X$ tels qu'il corresponde à x au moins un $y \in B$. Démontrer les relations

$$A \subset \bar{f}^{-1}(f(A)), \quad B \supset f(\bar{f}^{-1}(B)).$$

¶ 8. Soient $f = (G, X, Y)$ et $g = (H, Y, Z)$ deux correspondances; on appelle **composée** de g et f la correspondance

$$g \circ f = (K, X, Z) = h$$

définie comme suit : on a $(x, z) \in K$ si et seulement s'il existe un $y \in Y$ tel que l'on ait $(x, y) \in G$ et $(y, z) \in H$. Montrer que cette définition généralise celle de composée de deux applications; étendre le Théorème 2 du § 2 aux correspondances. Étant donnée une partie A de X , a-t-on nécessairement la relation $h(A) = g(f(A))$?

Si $f = (G, X, Y)$ est une correspondance, on appelle correspondance **réciproque** de f la correspondance

$$\bar{f}^{-1} = (G', Y, X)$$

où $G' \subset Y \times X$ est l'ensemble des couples (y, x) tels que $(x, y) \in G$. La correspondance composée $\bar{f}^{-1} \circ f$ est-elle l'application identique de X dans X ? Montrer que, si f est une application de X dans Y , pour que la correspondance réciproque soit elle-même une application de Y dans X il faut et il suffit que f soit bijective; la correspondance \bar{f}^{-1} est alors identique à l'application réciproque de f .

Soient $f = (G, X, Y)$ et $g = (H, Y, Z)$ deux correspondances. La formule

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

est-elle correcte?

Soit f une application d'un ensemble X dans un ensemble Y . On suppose que la relation

$$f(x') \neq f(x'') \text{ implique } x' \neq x'';$$

montrer que f est injective.