§ 1. Les relations d'égalité et d'appartenance

1. La relation d'égalité

Les signes qui ont été introduits au § précédent sont de nature purement logique : ils servent essentiellement à « formaliser » des modes de raisonnement qui ne sont pas spécifiquement mathématiques. Nous allons par contre, dans ce §, introduire deux « signes fondamentaux » (le signe de l'égalité et le signe d'appartenance) qui servent à construire des relations et des objets ayant une signification à proprement parler mathématique.

Le **signe de l'égalité** se note

$$=$$

et est utilisé pour former des relations de la façon suivante : si a et b sont des *objets mathématiques* (ou **ensembles** — les deux terminologies sont synonymes), on obtient une *relation* en écrivant

$$a = b,$$

i.e. en faisant suivre l'assemblage de signes et de lettres que nous désignons par a du signe $=$, puis de l'assemblage que nous désignons par b. Intuitivement, la relation précédente signifie, lorsqu'elle est vraie, que les objets concrets qui sont censés être représentés par a et b sont « identiques » — notion dont nous ne chercherons pas à approfondir le sens; l'essentiel, pour le mathématicien, n'est pas d'avoir compris, ou cru comprendre, la « signification profonde » du signe $=$; il est de savoir l'utiliser et pour ce faire, il suffit de se référer à l'énoncé suivant, qui résume les « règles du jeu » qu'on doit observer en écrivant des égalités (*) :

(*) Nous n'utilisons plus à partir de maintenant le langage relativement « formalisé » du § 0; si on voulait l'utiliser il faudrait énoncer sous la forme suivante l'assertion a) du Théorème 1 : « soit x une lettre, alors la relation

$$(\forall x)\ (x = x)$$

est vraie » — et sous une forme analogue les autres assertions du Théorème. Rappelons qu'en Mathématiques on n'utilise pas (ce serait impossible) le langage formalisé; on s'arrange simplement pour ne pas s'en éloigner au point de ne plus pouvoir y revenir si l'on avait des raisons sérieuses de le faire.

Théorème 1. *On a les propriétés suivantes:*

a) La relation $x = x$ est vraie pour tout x.

b) Les relations $x = y$ et $y = x$ sont équivalentes quels que soient x et y.

c) Quels que soient x, y, z, les relations $x = y$ et $y = z$ impliquent la relation $x = z$.

d) Soient u et v des objets tels que $u = v$, et $\mathrm{R}\{x\}$ une relation contenant une lettre x; alors les relations $\mathrm{R}\{u\}$ et $\mathrm{R}\{v\}$, qui se déduisent de R en y remplaçant partout la lettre x par u et v respectivement, sont équivalentes.

Remarque 1. L'assertion *d*) du Théorème signifie que deux objets égaux ont les mêmes propriétés, i.e. que toute assertion valable pour *a* est aussi valable pour *b*, et réciproquement. Quant aux assertions *a*), *b*) et *c*) elles traduisent les propriétés les plus « évidentes » de l'égalité.

En ce qui concerne une démonstration du Théorème (sic) précédent, il serait à proprement parler *miraculeux* que nous puissions *démontrer* quoi que ce soit concernant le signe = après l'avoir simplement écrit sur une feuille de papier. En fait, l'assertion *d*) est l'un des *axiomes* de base des Mathématiques, et quant aux assertions « évidentes » *a*), *b*) et *c*) on peut soit les prendre elles-mêmes comme autant d'axiomes (ce que devra faire le débutant), soit les déduire d'un axiome beaucoup plus compliqué (mais unique, et que le lecteur débutant *ne devra pas* chercher à comprendre) — à savoir que si R et S sont deux relations équivalentes et x une lettre, alors la relation

$$\tau_x(\mathrm{R}) = \tau_x(\mathrm{S})$$

est vraie.

Pour le lecteur qui désire réfléchir aux fondements des Mathématiques, ce serait un excellent exercice que d'essayer de « démontrer » le Théorème 1, et de se convaincre de ce que toutes les démonstrations (sic) qu'il en trouvera sont insuffisantes.

Il va de soi, enfin, que dans la pratique on utilise *constamment* le Théorème 1 sans *jamais* s'y référer explicitement.

2. La relation d'appartenance

Le second signe fondamental en Mathématiques est le **signe d'appartenance**, qui se note

$$\in$$

et, comme le signe =, est utilisé pour construire des relations à partir d'objets mathématiques : si *a* et *b* sont des *objets mathématiques*, on obtient une *relation* en écrivant

$$a \in b\,;$$

cette relation se lit

a appartient à b

ou encore

a est un élément de b.

La négation de la relation $a \in b$ s'écrit

$$a \notin b.$$

Ici encore, la seule chose qui compte ce sont les axiomes gouvernant l'emploi du signe $\in$ — il n'y en a du reste qu'un seul, que voici :

Théorème 2. *Soient* A *et* B *deux ensembles; pour que l'on ait* A = B, *il faut et il suffit que les relations*

$$x \in \mathrm{A} \qquad \textit{et} \qquad x \in \mathrm{B}$$

soient équivalentes.

Remarque 2. Il est facile de donner du signe $\in$ une interprétation intuitive rendant le Théorème (sic) 2 « évident ». Pour cela, il faut imaginer chaque objet mathématique comme une collection d'autres objets (d'où le mot *ensemble*); la relation $x \in y$ signifie alors (lorsqu'elle est vraie) que x est l'un des objets qui composent l'ensemble y, et le Théorème 2 affirme que, pour que deux collections d'objets soient identiques, il faut et il suffit qu'elles contiennent les mêmes objets (i.e. que tout objet appartenant à la première appartienne à la seconde, et réciproquement).

Dans la pratique, on imagine souvent les objets mathématiques soit comme étant des collections d'autres objets comme on vient de le dire, soit comme étant des objets « individuels » (on verra au nº 6 qu'il n'y a aucune contradiction entre ces deux interprétations); l'interprétation « naturelle » dans chaque cas dépend du contexte, et le lecteur, après un peu d'entraînement, la détectera facilement. En général, quand on pense à un objet mathématique comme à un « ensemble » on le désigne par une lettre majuscule, et quand on le regarde au contraire comme un « élément » d'un ensemble on le désigne souvent par une lettre minuscule — c'est ce qu'on a fait dans l'énoncé du Théorème 2. Cette règle n'est qu'une simple coutume, et souffre de nombreuses exceptions.

Remarque 3. Le fait qu'on puisse interpréter *concrètement* les objets mathématiques comme des collections ou ensembles d'autres objets n'a bien entendu rien à voir avec le problème consistant à définir *mathématiquement* la notion d'ensemble (les machines à démontrer, elles, n'ont pas d'intuition sensible...); ce problème ne peut être résolu que par les méthodes du § 0, nº 9, ou des méthodes analogues.

On trouve, dans certains manuels de Mathématiques à l'usage des élèves des Lycées, la déclaration suivante : « on appelle collection tout ensemble d'objets de même nature ». La première objection à cette « définition » est qu'elle réduit le mot « collection » au mot « ensemble »; or les deux termes sont évidemment synonymes : on est donc en présence d'un simple calembour. La seconde objection est que les auteurs des manuels en question n'éprouvent aucune difficulté à former une « collection » en réunissant deux « collections » quelconques, par exemple une collection de pommes et une collection de poires : il s'ensuit donc que des pommes et des poires sont des objets « de même nature » !

Cet exemple montre bien à quelles absurdités on aboutit en essayant, pour des raisons « pédagogiques », de donner du mot ensemble (ou du mot collection), une définition élémentaire. Il serait assurément bien préférable de dire qu'on regarde la notion d'ensemble comme une notion primitive qu'on ne définit pas (et que tout le monde comprend intuitivement), et à l'aide de laquelle on peut construire des relations sur lesquelles on peut raisonner logiquement.

3. Parties d'un ensemble

A partir du signe d'appartenance, nous allons introduire une abréviation qui se note

$$\subset$$

et s'appelle le **signe d'inclusion;** étant donnés deux ensembles A et B, on représentera par

$$A \subset B$$

la relation suivante :

pour tout x, la relation $x \in A$ implique la relation $x \in B$.

Autrement dit, $A \subset B$ est une relation signifiant que tout élément de A est aussi dans B.

La relation $A \subset B$ se lit A **est contenu dans** B ou B **contient** A ou A **est une partie de** B, et on l'écrit aussi

$$B \supset A.$$

Théorème 3. *La relation d'inclusion possède les propriétés suivantes:*

a) les relations $A \subset B$ *et* $B \subset C$ *impliquent la relation* $A \subset C$;

b) pour que l'on ait $A = B$ *il faut et il suffit que l'on ait* $A \subset B$ *et* $B \subset A$.

L'assertion (*a*) signifie que si la relation $x \in A$ implique la relation $x \in B$, et si celle-ci implique la relation $x \in C$, alors la première de ces trois relations implique la dernière — ce qui, logiquement, n'est autre que le « principe du syllogisme » ou la règle (TL 1) du § 0. L'assertion (*b*) se réduit évidemment au Théorème 2.

Théorème 4. *Soit* $R\{x\}$ *une relation dans laquelle figure une variable* x*; pour tout ensemble* X, *il existe une partie* A *de* X *et une seule qui possède la propriété suivante: pour que l'on ait* $x \in A$, *il faut et il suffit que les relations* $x \in X$ *et* $R\{x\}$ *soient vraies.*

On dit que A est **l'ensemble des** $x \in X$ **tels que l'on ait la relation** $R\{x\}$.

Exemple 1. Prenons pour X l'ensemble des nombres entiers et pour $R\{x\}$ la relation « x est divisible par 2 »; alors A est l'ensemble des entiers pairs.

Remarque 4. Intuitivement, A est la collection formée par ceux des objets $x \in X$ qui possèdent la propriété exprimée par la relation $R\{x\}$, de sorte que l'existence de A est intuitivement évidente. Mathématiquement, on ne peut établir le Théorème 4 sans utiliser des axiomes qui sont beaucoup moins évidents que lui. Le lecteur débutant devra donc se borner à admettre l'énoncé.

¶ *Remarque* 5. Malgré ce qu'indique le bon sens, *il n'est pas vrai* que, pour toute relation $R\{x\}$, il existe un *ensemble* (au sens précis du § 0) dont les éléments sont *tous* les objets x tels que la relation $R\{x\}$ soit vraie (le Théorème affirme seulement qu'on peut le faire en se bornant à considérer des objets x appartenant à une ensemble X *donné d'avance*), et c'est pour avoir omis de prendre cette précaution que les mathématiciens ont été conduits, à la fin du siècle dernier, à découvrir les célèbres « paradoxes de la théorie des ensembles ».

Prenons par exemple la relation $x \notin x$; supposons qu'il existe un ensemble A tel que les relations $x \in A$ et $x \notin x$ soient équivalentes; substituant A à x on en déduirait, en utilisant la règle (TL 7) du § 0, que la relation $A \in A$ est équivalente à sa négation $A \notin A$, autrement dit que les Mathématiques sont contradictoires ! (A vrai dire, nul n'est certain du contraire à l'heure actuelle, mais toutes les fois qu'on découvre une contradiction on est en tous cas autorisé à en conclure que l'hypothèse d'où on l'a tirée est fausse).

La notion d'**ensemble de tous les ensembles** — il s'agirait d'un ensemble X tel que l'on ait $x \in X$ pour tout x — est non moins contradictoire; car, moyennant le Théorème 4, elle permettrait de parler de l'ensemble de tous les x tels que $x \notin x$, ce qui est impossible comme on vient de le voir.

Ces exemples montrent que l'usage du mot « ensemble » est soumis en Mathématiques à des limitations que l'intuition n'enseigne pas.

Comme illustration du Théorème 4, prenons une ensemble X, une partie M de X, et pour $R\{x\}$ la relation $x \notin M$; la partie A de X ainsi obtenue s'appelle le **complémentaire de** M **dans** X, et se note

$$X - M \qquad \text{ou} \qquad \complement_X M$$

(nous utiliserons uniquement la notation $X - M$); c'est donc l'ensemble des éléments de X qui n'appartiennent pas à M.

Théorème 5. *Soient* M *et* N *des parties d'un ensemble* X*; alors les relations*

$$M \subset N \qquad \text{et} \qquad X - N \subset X - M$$

sont équivalentes. Pour toute partie M *de* X, *on a*

$$X - (X - M) = M.$$

L'ensemble $X - (X - M)$ se compose des $x \in X$ pour lesquels la relation $x \in X - M$ est fausse; or celle-ci, pour $x \in X$, équivaut à la négation de $x \in M$; donc, $X - (X - M)$ se compose des $x \in X$ pour lesquels la négation de $x \in M$ est fausse, i.e. pour lesquels la relation $x \in M$ est vraie, d'où la formule

$$X - (X - M) = M.$$

Supposons $M \subset N \subset X$; comme la relation $x \in M$ implique la relation $x \in N$, la négation de la seconde implique la négation de la première; donc la relation $x \in X - N$ implique la relation $x \in X - M$, et par suite on a $X - N \subset X - M$. Inversement, cette relation implique, par le même raisonnement,

$$X - (X - M) \subset X - (X - N),$$

i.e. $M \subset N$, ce qui termine la démonstration.

¶ *Remarque* 6. La « démonstration » précédente est fort insuffisante logiquement car elle fait usage de la signification intuitive du mot « ensemble ». Pour démontrer correctement la relation $X - (X - M) = M$ par exemple, on devrait introduire les relations

$$R : x \in M, \qquad S : x \in X;$$

l'hypothèse que M est une partie de X signifie que R implique S; et la relation $X - (X - M) = M$ signifie donc que R et la relation

$$S \text{ et } [\text{non } (S \text{ et } (\text{non } R))]$$

sont équivalentes si R implique S. On devrait naturellement, pour établir l'équivalence des deux relations précédentes, utiliser les règles de démonstration du § 0.

Ceci montre que des assertions en apparence évidentes cessent d'être simples lorsqu'on veut effectivement les *démontrer*; c'est ce que les Grecs avaient déjà remarqué.

4. *Ensemble vide*

Soit X un ensemble; parmi les parties de X figure X lui-même, ce qui permet de considérer l'ensemble

$$\varnothing = X - X,$$

qu'on appelle la **partie vide de** X; la relation $x \in \varnothing$ est donc équivalente à la conjonction des relations

$$x \in X \qquad \text{et} \qquad x \notin X,$$

de sorte qu'il n'existe évidemment aucun objet x tel que $x \in \varnothing$.

L'ensemble $\varnothing = X - X$ ne dépend pas de l'ensemble X — autrement dit, on a

$$X - X = Y - Y$$

quels que soient les ensembles X et Y; en effet, $X - X$ et $Y - Y$ n'ont pas de mal à posséder exactement les mêmes éléments, puisqu'ils n'en possèdent aucun...

¶ *Remarque* 7. La démonstration précédente n'en est cependant pas une; d'après le Théorème 2 on doit prouver que la relation $x \in X - X$ et la relation $x \in Y - Y$ sont équivalentes; désignant par R la relation $x \in X$ et par S la relation $x \in Y$, tout revient à prouver que la relation

$$R \text{ et } (\text{non } R)$$

est équivalente à la relation

$$S \text{ et } (\text{non } S),$$

ce qui provient du fait plus général que, quelles que soient les relations R et T, la relation

$$(R \text{ et } (\text{non } R)) \Longrightarrow T$$

est vraie (§ 0, *Exercice* 2).

L'ensemble $\varnothing = X - X$, qui est donc toujours le même, s'appelle aussi pour cette raison **ensemble vide**; il ne possède aucun élément, plus exactement la relation $x \in \varnothing$ est fausse quel que soit x.

Il est clair qu'on a

$$\varnothing \subset X$$

pour tout ensemble X, et cette propriété caractérise l'ensemble vide; car si deux ensembles A et B vérifient $A \subset X$ et $B \subset X$ pour *tout* ensemble X, on voit en particulier que $A \subset B$ et $B \subset A$, d'où $A = B$.

5. *Ensembles à un, deux éléments*

Soit x un objet mathématique; il existe alors un ensemble et un seul, noté $\{x\}$, possédant la propriété suivante : la relation

$$y \in \{x\} \qquad \text{équivaut à} \qquad y = x$$

Un ensemble de ce type s'appelle un **ensemble à un élément**. Il est clair que les relations

$$\{x\} = \{y\}, \qquad x = y$$

sont équivalentes quels que soient x et y.

On utilisera très souvent (et sans y référer explicitement) le résultat suivant :

Théorème 6. *Pour qu'un ensemble* X *soit un ensemble à un élément, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux conditions suivantes:*

a) *X est non vide;*

b) *on a $x = y$ pour tout $x \in X$ et tout $y \in X$.*

Les conditions sont évidemment nécessaires. Supposons-les inversement réalisées et choisissons un élément x de X (c'est possible puisque X est non vide); la relation $y = x$ implique trivialement $y \in X$, et inversement la relation $y \in X$ implique $y = x$ d'après l'hypothèse *b*) de l'énoncé; les conditions $y \in X$ et $y \in \{x\}$ sont donc équivalentes, ce qui prouve que $X = \{x\}$ et achève la démonstration.

Soient maintenant x et y deux objets mathématiques; il existe alors un et un seul ensemble, noté $\{x, y\}$, dont les seuls éléments soient x et y — autrement dit tel que la relation

$$z \in \{x, y\}$$

soit équivalente à la relation

$$z = x \quad \text{ou} \quad z = y.$$

Un ensemble de ce type s'appelle un **ensemble à deux éléments** si $x \neq y$; si $x = y$, il est clair que

$$\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$$

est un ensemble à un élément.

On définirait de même les ensembles à trois, quatre,... éléments. Les ensembles qu'on obtient ainsi sont appelés les **ensembles finis,** les autres étant appelés les **ensembles infinis;** ces deux notions seront à nouveau étudiées en détail au § 5.

¶ *Remarque* 8. L'existence d'ensembles à un, deux, trois,... éléments, intuitivement évidente, ne peut pas se démontrer — plus exactement, l'assertion « quels que soient x et y il existe un ensemble dont les seuls éléments soient x et y » est un *axiome* d'où l'on peut déduire facilement l'existence des autres catégories d'ensembles finis.

Ajoutons que l'existence d'ensembles infinis est aussi l'un des axiomes des Mathématiques (l'ensemble des nombres entiers est infini — mais nous n'avons pas donné de définition *mathématique* des nombres entiers, ni démontré *mathématiquement* qu'ils appartiennent à un même ensemble...). Voir § 5.

6. *Ensemble des parties d'un ensemble donné*

Soit X un ensemble; il existe — c'est, ici encore, l'un des axiomes des Mathématiques — un et un seul ensemble, noté

$$\mathfrak{P}(X),$$

qui possède la propriété suivante : *les éléments de* $\mathfrak{P}(X)$ *sont les parties de* X, autrement dit les relations

$$Y \in \mathfrak{P}(X) \quad \text{et} \quad Y \subset X$$

sont équivalentes. On dit que $\mathfrak{P}(X)$ est **l'ensemble des parties de** X.

Remarque 9. L'opération consistant à passer d'un ensemble X à l'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ permet de construire des ensembles de plus en plus compliqués. On verra plus loin (§ 5) que si un ensemble X est fini et comporte n éléments, alors $\mathfrak{P}(X)$ est fini et en comporte 2^n. Ainsi, les ensembles

$$\varnothing, \quad \mathfrak{P}(\varnothing), \quad \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\varnothing)), \quad \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\varnothing))), \quad \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\varnothing)))), \ \ldots$$

comportent respectivement (voir § 5, *Remarque* 6)

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^4 = 16, \quad 2^{16} = 65.536, \quad 2^{65.536}, \ \ldots$$

éléments, ce qui, à partir de l'ensemble vide, permet de former des ensembles si compliqués qu'il devient rapidement impossible d'en énumérer pratiquement les éléments.

On notera d'autre part qu'on a

$$X \in \mathfrak{P}(X)$$

pour tout ensemble X; ceci montre, comme on l'avait annoncé dans la *Remarque* 2, que tout « ensemble » d'objets est lui-même un « élément » d'un autre « ensemble » — la façon la plus simple de le voir serait du reste d'écrire la relation

$$X \in \{X\}.$$

EXERCICES

Il est parfaitement utopique d'espérer apprendre des Mathématiques, si élémentaires ou si supérieures soient-elles, sans résoudre des Exercices.

Les Exercices qu'on trouvera dans ce livre sont de trois sortes. Certains sont des illustrations pratiques ou même numériques des théories exposées dans le texte; le lecteur débutant ne pourra pas acquérir la technique du calcul sans résoudre une partie appréciable des Exercices de ce genre. D'autres apportent au texte des compléments théoriques élémentaires; en les étudiant, le lecteur s'habituera à manipuler le langage et les modes de raisonnements utilisés dans le texte; ceux de ces Exercices qui ne sont pas *très* faciles sont précédés d'un signe ¶. Enfin, la dernière catégorie est constituée par des Exercices qui apportent au texte des compléments importants et difficiles; ils sont destinés uniquement aux étudiants déjà avancés qui s'intéressent vraiment aux Mathématiques; ces Exercices sont précédés de deux ou même trois signes ¶.

Nous ne saurions trop insister enfin sur le fait que résoudre un Exercice ne consiste pas seulement à se convaincre, à l'aide d'un « brouillon » fait à la hâte, du fait qu'on en a à peu près compris la solution; si cette méthode est admissible pour les Exercices de calcul numérique, il faut par contre s'efforcer de *rédiger intégralement* les Exercices plus théoriques, où l'on doit construire de véritables démonstrations. De cette façon, et uniquement de cette façon, l'étudiant parviendra à acquérir un langage clair et correct, et à utiliser les termes techniques dans leur sens propre, ce qui, en Mathématiques, est le signe le plus certain de la compréhension d'un sujet.

¶¶ **1.** La définition mathématique complète de l'ensemble vide, utilisant l'opération de Hilbert, est que $\varnothing$ désigne l'objet mathématique

$$\tau_x[(\forall x)\ (x \notin X)];$$

en déduire la définition de $\varnothing$ en langage formalisé (i.e. écrire $\varnothing$ sous la forme d'un assemblage ne comportant que des signes fondamentaux, à l'exclusion de toute abréviation).

¶¶ **2.** Construire une démonstration logiquement complète du Théorème 5 (cf. *Remarque* 6).

3. Écrire tous les éléments de l'ensemble

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\varnothing)))).$$

4. Soient X et Y deux ensembles. Montrer que les relations $X \subset Y$ et $\mathfrak{P}(X) \subset \mathfrak{P}(Y)$ sont équivalentes.

¶ **5.** Montrer qu'il n'existe aucun ensemble X pour lequel la relation

$$\mathfrak{P}(X) \subset X$$

soit vraie.

6. Soient X l'ensemble des nombres x tels que $0 \leqslant x < 1/100\,000\,000$, et Y l'ensemble des nombres y tels que $0 < y \leqslant 100\,000\,000$; démontrer que $X \subset Y$.