§ 0. — Le raisonnement logique.

1. *L'idée de perfection logique*

Il y a en Mathématiques trois processus fondamentaux : construire des *objets mathématiques*, former des *relations* entre ces objets et *démontrer* que certaines de ces relations sont *vraies*, ou, comme on dit, sont des *théorèmes*.

Les *objets mathématiques* sont les nombres, les fonctions, les figures géométriques, et d'innombrables autres choses dont s'occupent les mathématiciens : ces objets n'existent pas à proprement parler dans la Nature, mais ce sont des modèles abstraits d'objets physiques plus ou moins compliqués et visibles. Les *relations* sont les assertions (vraies ou non) qu'on peut énoncer concernant ces objets, et qui correspondent à des propriétés hypothétiques des objets naturels dont les objets mathématiques sont les modèles. Quant aux relations *vraies*, ce sont, pour les mathématiciens, celles qu'on peut déduire logiquement d'un petit nombre d'*axiomes* énoncés une fois pour toutes; ces axiomes traduisent en langage mathématique les propriétés les plus « évidentes » des objets concrets auxquels on pense; et la suite de syllogismes par laquelle on passe des axiomes (ou, plus pratiquement, de théorèmes déjà établis) à un théorème donné constitue une *démonstration* de celui-ci.

Les explications de ce genre, qui sembleront peut-être d'une admirable clarté à certains lecteurs débutants, ont depuis longtemps cessé de satisfaire les mathématiciens, non seulement parce que ceux-ci ont peu de goût pour les phrases vagues, mais aussi et surtout parce que les Mathématiques elles-mêmes les ont obligés à réfléchir aux fondements de leur science, et à substituer aux généralités des *formules* dont le sens ne puisse prêter à aucune confusion, et dont il soit possible de décider d'une façon quasi mécanique si elles sont vraies ou non, si elles ont un sens ou non.

Historiquement, la nécessité d'établir sur des bases aussi solides que possible les Mathématiques s'est manifestée à l'occasion du développement de la « théorie des ensembles », et de l'introduction en Mathématiques de nouvelles notions « abstraites » telles que celles d'anneau, de corps, de groupe.

En ce qui concerne la théorie des ensembles, créée par Cantor vers 1870, on s'est assez rapidement aperçu que, dans celle-ci, le recours à « l'intuition géométrique » était inutile dans les bons cas, et franchement nuisible dans les mauvais; au bout d'une vingtaine d'années, on s'est trouvé en présence de résultats en apparence contraires au bon sens mais solidement démontrés (par exemple l'existence, prouvée par Peano, d'une courbe continue qui passe par *tous* les points d'un carré), et en même temps de véritables contradictions internes dues à l'emploi intempestif de raisonnements ingénieux dont les mathématiciens avaient la conviction, sans pouvoir vraiment le démontrer, que c'étaient de purs sophismes. Or, en Mathématiques, la contradiction interne est l'horreur suprême, car les Grecs savaient déjà que, si l'on dispose d'*une* relation contradictoire (i.e. à la fois vraie et fausse), alors on peut immédiatement démontrer que *toutes* les autres relations le sont également (voir la *Remarque* 5 plus loin).

Quant au développement des premières théories dites « abstraites » ou « axiomatiques », qui date de la même époque à peu près (1890-1910), il avait pour but soit d'englober dans une même théorie générale des théories particulières déjà connues afin de pouvoir appliquer aux unes les méthodes déjà utilisées pour étudier les autres, soit d'établir sur des bases solides des théories laissant à désirer au point de vue logique (l'exemple le plus célèbre de ce dernier cas est l'étude, par Hilbert, des fondements de la Géométrie élémentaire; deux mille ans après les Grecs, on eut enfin, *pour la première fois*, un exposé rigoureux et purement déductif de la Géométrie, dans lequel *tous* les axiomes, sans exception aucune, étaient explicitement énoncés, et où l'on voyait clairement, pour chaque théorème, quels étaient les axiomes strictement nécessaires à sa validité; l'exposé de Hilbert, par la rigueur de son langage et de ses raisonnements, et par son refus de toute concession, est le modèle de l'exposé mathématique moderne, et le restera sans aucun doute pendant de nombreux siècles).

Les efforts accomplis par les mathématiciens dans ces deux voies, du reste étroitement liées l'une à l'autre, les ont habitués à renforcer de beaucoup leurs exigences en matière de rigueur logique, et à raisonner sur des objets de plus en plus éloignés, en apparence, de la « réalité » concrète. On en est ainsi arrivé à la conviction que ce qui compte en Mathématiques, ce sont uniquement les symboles qui, assemblés en observant certaines « règles du jeu » explicitement énoncées, servent à former des objets mathématiques et des relations.

On admet même, aujourd'hui, qu'on pourrait théoriquement écrire toutes les Mathématiques en utilisant exclusivement un petit nombre de *signes fondamentaux* (par exemple les signes représentant les opérations logiques élémentaires, et deux ou trois signes proprement mathématiques — le signe de l'égalité, le signe de l'appartenance qui sera introduit au § suivant, et éventuellement le signe servant à former des « couples » d'objets, et qui sera introduit au § 2) et des *lettres* en quantité non limitée. Dans cette conception des Mathématiques, les objets mathématiques et les relations sont des assemblages (en général d'une complication telle qu'il est hors de question de les écrire effectivement) de signes fondamentaux et de lettres, formés en observant certains critères énoncés une fois pour toutes (le lecteur curieux en trouvera la liste, ou plus exactement une liste possible, au nº 9 de ce §); dans ces assemblages, le rôle des signes fondamentaux est de symboliser certaines opérations élémentaires, logiques ou mathématiques, dont la répétition à l'intérieur d'un même

assemblage conduit à des opérations beaucoup plus complexes; et les lettres, qui sont censées représenter des objets mathématiques totalement indéterminés, servent à introduire des « degrés de liberté » dans les assemblages considérés, i.e. à former des relations et des objets dépendant de « variables arbitraires ».

Une fois établies la liste des signes fondamentaux, et celle des *critères de formation* des objets mathématiques et des relations, il reste à énoncer les axiomes (les uns purement logiques, d'autres de nature mathématique à proprement parler).

A l'heure actuelle, les critères de formation et les axiomes ont été isolés et énoncés avec une précision telle que l'idée d'une machine qui démontrerait des théorèmes et rédigerait des Mathématiques a cessé d'être entièrement utopique. Les Mathématiques telles que les écrirait une telle machine (appliquant *strictement* et *exclusivement* les règles énoncées une fois pour toutes, n'omettant *aucun* intermédiaire de raisonnement si « évident » soit-il, et ne faisant usage que des lettres et des signes fondamentaux *à l'exclusion de toutes les abréviations usuelles*) sont dites *formalisées*; elles n'existent bien entendu que dans l'imagination des mathématiciens. Un texte mathématique écrit en langage formalisé ressemblerait, en infiniment plus compliqué, au compte-rendu d'une partie d'échecs, et donnerait au lecteur, s'il pouvait le comprendre, le sentiment de la *perfection logique*.

2. Le langage réel des Mathématiques

On a calculé que, si l'on cherchait à écrire en langage formalisé un objet mathématique aussi simple (en apparence...) que le nombre 1, on trouverait un assemblage comportant plusieurs dizaines de milliers de signes (les signes fondamentaux sont en très petit nombre, mais chacun d'eux peut naturellement être répété un grand nombre de fois dans un même assemblage). Le mathématicien qui essaierait de manipuler de pareils assemblages ressemblerait à l'alpiniste qui, pour choisir ses points d'appui sur une paroi rocheuse, examinerait celle-ci au microscope électronique.

On utilise donc, dans la pratique, une multitude d'*abréviations* (par exemple la lettre grecque π, le signe $+$, des mots du langage ordinaire, tels que « nombre », « point », « droite », « fonction », et ainsi de suite); celles-ci sont destinées à représenter par de nouveaux signes simples des assemblages compliqués de lettres et de signes fondamentaux, ou même des assemblages faisant intervenir en outre des signes abréviateurs déjà introduits. Quand il a introduit suffisamment d'abréviations d'assemblages de signes fondamentaux, puis d'abréviations d'assemblages d'abréviations, puis d'abréviations d'assemblages d'abréviations d'assemblages d'abréviations, et ainsi de suite, le mathématicien cesse de penser (*) à la définition complète et détaillée des objets qu'il a ainsi construits; il ne garde présent à l'esprit que la façon de passer d'un échelon de complication à l'échelon *immédiatement* précédent (ce qui constitue la *définition*, au sens usuel du terme, de l'abréviation considérée), et ne cherche pas à redescendre de proche en proche jusqu'au langage formalisé;

(*) On devrait même dire : ne peut plus penser.

à la limite, on en arrive souvent à raisonner sur les abréviations introduites comme si elles constituaient des signes primitifs au même titre que les signes fondamentaux du langage formalisé (c'est ainsi que Hilbert, dans son étude des fondements de la Géométrie, introduisait *a priori* trois notions primitives — celles de point, droite et plan — sans chercher aucunement à les définir, et en se bornant à en dresser le mode d'emploi).

C'est naturellement dans le choix des assemblages qu'il décide de représenter par des abréviations, et auxquels il décide donc de s'intéresser particulièrement, que le mathématicien montre que son activité diffère grandement de celle d'une machine. Une machine mathématique raisonnerait peut-être à la vitesse de la lumière, mais elle se bornerait probablement à accumuler les théorèmes au hasard suivant un processus analogue au mouvement brownien. Le but des mathématiciens est au contraire de démontrer des théorèmes « intéressants », de *résoudre les problèmes* qui sont posés depuis des dizaines d'années et parfois même depuis plusieurs siècles (*), et non pas d'inventer de nouvelles branches des Mathématiques, sans rapport avec les problèmes qui se posent, et purement gratuites. Et en fait c'est justement l'étude de ces problèmes qui oblige les mathématiciens à inventer de nouvelles notions (i.e. à introduire de nouvelles abréviations) et de nouvelles techniques qui, aux yeux du débutant ou de l'utilisateur, semblent parfois les entraîner fort loin du problème initial. Par exemple, en essayant de démontrer le « grand théorème de Fermat », et de résoudre d'autres problèmes arithmétiques, Kummer a été conduit à introduire vers le milieu du siècle dernier une certaine notion de « nombres idéaux »; celle-ci a conduit Dedekind à inventer, vers 1870, les « anneaux d'entiers algébriques » et les « idéaux » de ces anneaux; de là sont sorties les notions « modernes » et « abstraites » d'anneau et d'idéal, qui sont à leur tour en train de fusionner avec la Géométrie Algébrique; or le « grand théorème de Fermat » dit que, pour $n \geqslant 3$, la « courbe plane » dont l'équation est

$$x^n + y^n = 1$$

(*) Le problème de la « quadrature du cercle », et celui de caractériser les constructions géométriques que l'on peut « effectuer à l'aide de la règle et du compas », posés par les Grecs, n'ont été résolus qu'au XIXe siècle. L'hypothèse de Goldbach (à savoir que tout nombre entier pair peut s'écrire comme somme de deux nombres *premiers* impairs), énoncée au XVIIIe siècle, n'est pas encore démontrée bien qu'on ait fait des progrès très importants dans cette voie depuis trente ans. Le problème de Waring (montrer que, pour tout entier n, il existe un entier p tel que tout nombre entier puisse s'écrire comme somme de p termes qui sont des puissances n^e de nombres entiers — le cas le plus simple est $n = 2$, et on montre alors que tout entier est somme de *quatre* carrés) énoncé lui aussi au XVIIIe siècle, a été résolu au début du XXe par Hilbert. Le « grand théorème de Fermat » (montrer que, si n est un entier au moins égal à trois, l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

n'admet aucune solution formée d'entiers x, y, z tous strictement positifs), énoncé au début du XVIIe siècle, est encore fort loin de sa solution, qui exigera sans doute la mise en œuvre de tout l'arsenal inventé par les algébristes depuis un siècle, et d'autres techniques plus puissantes. Nous ne citons ici bien entendu que des problèmes dont les énoncés sont suffisamment simples pour pouvoir être compris des débutants.

ne contient aucun autre point du plan à coordonnées *rationnelles* que ses intersections avec les axes de coordonnées, et c'est précisément de ce genre de problèmes que s'occupe la Géométrie Algébrique ! Cet exemple, et beaucoup d'autres dont il n'est pas possible de parler ici, montrent que, malgré ce que peuvent croire les amateurs, les mathématiciens professionnels cherchent à s'engager dans les voies les plus *naturelles* possibles, celles dans lesquelles leur intuition géométrique ou analytique ou arithmétique — car il existe une intuition arithmétique — peut s'exercer.

L'activité des mathématiciens en chair et en os diffère de celle des machines sur un autre point encore : les premiers ne sont pas en mesure de se conformer *strictement* à la rigueur logique absolue dont feraient preuve les secondes si elles existaient. Dans la pratique, les textes mathématiques les mieux écrits comportent une multitude de « trous » en l'absence desquels la lecture de ces textes serait un exercice intolérable. Ces lacunes logiques sont sans importance, parce que chacun est parfaitement convaincu du fait qu'on pourrait les combler si on le désirait — en fait, il est même probable que le lecteur débutant ne les apercevra pas. On estime aujourd'hui qu'un texte mathématique est « parfaitement » correct lorsqu'il a acquis le degré de clarté et de rigueur qu'on a toujours trouvé dans les exposés d'Arithmétique élémentaire (et c'est pourquoi il est fort regrettable que cette branche des Mathématiques n'occupe pas plus de place dans l'enseignement secondaire français); l'immense majorité des théories mathématiques peuvent maintenant s'exposer dans ce style, et cette possibilité a pour corollaire le fait qu'on n'admet plus, aujourd'hui, le genre d'exposé décoratif qui permettait encore, il n'y a pas si longtemps, à certains mathématiciens, de briguer à la fois l'Académie des Sciences et l'Académie Française.

Nous allons maintenant essayer de donner au lecteur des informations plus précises sur la façon dont on construit des relations et sur les raisonnements logiques les plus importants. On espère que le lecteur débutant voudra bien ne pas croire que les considérations qui suivent intéressent uniquement les philosophes ou les spécialistes de Logique mathématique; il s'agit en fait des règles de raisonnement que les mathématiciens utilisent *à chaque seconde*, et à propos desquelles les débutants — l'expérience le montre — commettent fréquemment de grossières erreurs.

3. *Opérations logiques élémentaires*

Comme on l'a dit au n° 1, les relations et les objets mathématiques sont, théoriquement, des assemblages de lettres et de signes fondamentaux, formés en observant certains critères, avec lesquels le lecteur entrera en contact progressivement. On va s'intéresser tout d'abord aux deux signes les plus simples servant à former des *relations*, et aux abréviations qui s'expriment uniquement à l'aide de ces deux signes.

Les logiciens représentent ces signes par $\vee$ et $\neg$, mais nous les désignerons par les mots

ou, non

qu'on emploie toujours en Mathématiques. Si R et S sont des *relations*, alors l'assemblage

$$\text{R ou S}$$

obtenu en écrivant l'assemblage R, puis le signe ou, puis l'assemblage S, est encore une *relation* qu'on appelle la **disjonction logique** des relations R et S [on verra plus loin, quand on aura défini les relations « vraies », que pour que la relation (R ou S) soit vraie il suffit que *l'une au moins* des deux relations R, S données le soit]. De même, si R est une relation, l'assemblage

$$\text{non R}$$

obtenu en faisant précéder l'assemblage R du signe non est encore une *relation*, qu'on appelle la **négation** de la relation R [plus loin, une relation sera dite fausse lorsque sa négation est vraie]. Les règles d'emploi de ces deux signes (autrement dit, les axiomes qui les font intervenir) seront énoncées plus tard; pour le moment, il est inutile de se poser ce genre de question.

A partir de ces deux signes, on peut introduire des abréviations d'usage constant, et tout d'abord le mot

$$\text{et};$$

étant données des relations R, S, on désigne par

$$\text{R et S}$$

la relation

$$\text{non [(non R) ou (non S)]},$$

qu'on appelle la **conjonction logique** de R et S [on verra plus loin que, pour que la relation (R et S) soit vraie, il faut et il suffit que les deux relations R, S données le soient]. On note d'autre part

$$R \Longrightarrow S$$

la relation

$$\text{S ou (non R)};$$

on l'appelle une **implication logique** et on la lit (*)

$$\text{R implique S};$$

[comme on le verra plus loin, dire que celle-ci est vraie signifie que S est conséquence

(*) Dans la pratique, on ne dit « R implique S » que dans le cas où cette relation est vraie au sens qui sera précisé plus loin. Dans ce § par contre, nous écrivons des relations sans nous préoccuper, pour le moment du moins, de savoir si elles sont vraies ou non.

Notons d'autre part que beaucoup de gens ont maintenant tendance à utiliser le signe $\Longrightarrow$ comme abréviation du mot « implique »; la plupart des mathématiciens professionnels rejettent cette façon de ne pas écrire français (ou chinois s'ils sont chinois). Il est du reste fort difficile, dans la pratique, d'utiliser *correctement* le signe $\Longrightarrow$.

logique de R (donc est vraie si R l'est); mais la relation $(R \Longrightarrow S)$ peut fort bien être vraie alors que ni R ni S ne le sont — par exemple, la relation

$$(1 = 2) \Longrightarrow (2 = 3)$$

est évidemment vraie, [de même (en logique nazie) que la relation

les communistes ont incendié le Reichstag donc il faut exterminer les communistes;

la déduction, en logique nazie, était impeccable, mais la prémisse était fausse].

Enfin, on désigne par

$$R \Longleftrightarrow S$$

la relation

$$[(R \Longrightarrow S) \text{ et } (S \Longrightarrow R)];$$

on l'appelle une **équivalence logique** et on la lit

$$\text{R est équivalente à S.}$$

On verra plus loin d'autres critères pour former des relations.

4. *Axiomes et théorèmes*

Les signes introduits au nº précédent nous permettent déjà de définir les relations **vraies** ou **théorèmes**; ce sont celles qu'on peut obtenir par application répétée des deux règles suivantes :

(RV 1) : *Toute relation obtenue par application d'un axiome est vraie.*

(RV 2) : *Étant données des relations* R *et* S, *si la relation* $(R \Longrightarrow S)$ *est vraie, et si la relation* R *est vraie, alors la relation* S *est vraie.*

Quant aux **axiomes**, ce sont des relations énoncées explicitement et une fois pour toutes, ou bien des règles dans lesquelles interviennent des relations « **arbitraires** » et qui, appliquées à des relations spécifiques, conduisent à d'autres relations spécifiques (et vraies, d'après la définition même de ce mot); les axiomes qu'on énoncera au nº suivant sont du second type.

Une relation est dite **fausse** lorsque sa négation est vraie.

Remarque 1. On voit donc que ce qui caractérise les relations vraies c'est qu'*on peut les démontrer* et non pas, par exemple, que les lois naturelles qu'elles sont censées schématiser peuvent être vérifiées expérimentalement; on a ici la différence fondamentale entre les vérités mathématiques et les vérités expérimentales. Dans la pratique quotidienne, le débutant aura le plus grand intérêt à garder ce fait présent à l'esprit, tout au moins s'il s'intéresse effectivement aux Mathématiques.

Remarque 2. Il va de soi qu'en Mathématiques la question de savoir si une relation donnée est vraie ou non dépend du système d'axiomes adopté au départ : une relation vraie dans une axiomatique donnée peut cesser de l'être dans un autre système, en apparence aussi « naturel » que le premier. On a par exemple construit des axiomatiques de la théorie des ensembles dans lesquelles l'assertion « il existe des ensembles infinis » n'est pas vraie (i.e. ne peut pas être démontrée — ce qui explique pourquoi cette assertion est l'un des *axiomes* de base de la théorie des ensembles telle qu'elle est utilisée par les mathématiciens).

Noter par ailleurs qu'une relation non vraie (i.e. qui ne peut pas être démontrée) n'est pas forcément fausse : si R est une relation, il se peut fort bien, en théorie, que les axiomes adoptés au départ ne permettent de démontrer ni R ni non R; de telles relations sont dites *indécidables* (dans la théorie axiomatique considérée). On a pu montrer récemment (voir p. 95) qu'il existe de telles relations dans les mathématiques usuelles, fondées sur les axiomes des §§ 0, 1 et 2. Si R est une telle relation, on a le droit, si on le désire, de « compléter » les mathématiques en ajoutant à la liste des axiomes de base soit R, soit non R.

Remarque 3. Outre les relations vraies, les relations fausses et les relations indécidables, on doit encore en principe considérer les relations *contradictoires*, i.e. à la fois vraies et fausses. Tout le monde espère bien entendu que les axiomes de base des mathématiques sont compatibles entre eux, i.e. interdisent l'existence de relations contradictoires — mais on n'a pas pu encore le démontrer. Si des relations contradictoires se manifestaient, il faudrait abandonner ou affaiblir certains des axiomes de base.

5. *Axiomes logiques et tautologies*

Jusqu'à présent nous n'avons énoncé aucun axiome; nous allons, dans ce n°, énoncer les plus simples d'entre eux, ceux qui servent à justifier les raisonnements logiques les plus élémentaires (syllogismes, doubles négations, etc...); ces axiomes sont au nombre de quatre, mais le lecteur aurait tort de croire que la présentation adoptée ici soit la seule possible : il existe de nombreuses autres possibilités de déduire les raisonnements logiques élémentaires d'un petit nombre d'axiomes simples.

(AL 1) : *Si* R *est une relation, la relation*

$$(R \text{ ou } R) \Longrightarrow R$$

est vraie.

Si donc la relation (R ou R) est vraie, il en sera de même de R d'après la règle (RV 2) du n° précédent.

(AL 2) : *Si* R *et* S *sont deux relations, la relation*

$$R \Longrightarrow (R \text{ ou } S)$$

est vraie.

Si donc R est vraie, il en est de même de (R ou S), conformément au sens intuitif du mot « ou ».

(AL 3) : *Si* R *et* S *sont des relations, la relation*

$$(R \text{ ou } S) \Longrightarrow (S \text{ ou } R)$$

est vraie.

En combinant les deux axiomes précédents, on voit que si R est vraie il en est de même de (S ou R), ou, ce qui revient au même, que si S est vraie il en est de même de (R ou S); comme on avait déjà établi que (R ou S) est vrai si R est vraie, on voit que (R ou S) est vraie dès que l'une au moins des deux relations R, S est vraie.

(AL 4) : *Si* R, S *et* T *sont des relations, la relation*

$$(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow ((R \text{ ou } T) \Longrightarrow (S \text{ ou } T))$$

est vraie.

Si donc R implique S i.e. si la relation $(R \Longrightarrow S)$ est vraie alors la relation (R ou T) implique la relation (S ou T). Ce genre d'énoncé pourra sembler trivial au lecteur débutant — mais il n'en est que plus remarquable qu'on puisse en tirer des conséquences substantielles. En fait, il faut considérer les quatre axiomes précédents comme les règles d'emploi mécanique des signes « ou » et « non », et non pas comme des découvertes métaphysiques profondes.

Les théorèmes que l'on peut démontrer en utilisant uniquement les axiomes précédents s'appellent des **tautologies**; ce sont ceux que les mathématiciens utilisent, la plupart du temps sans s'y référer explicitement, dans leurs raisonnements logiques. En voici quelques-uns; nous ne les démontrerons pas tous :

(TL 1) : *Si* R, S *et* T *sont des relations, si* $(R \Longrightarrow S)$ *et si* $(S \Longrightarrow T)$ *sont vraies, alors* $(R \Longrightarrow T)$ *est vraie.*

Voici la démonstration, à titre d'exemple. Appliquons (AL 4) en y remplaçant R, S et T par S, T et (non R) respectivement; on voit que la relation

$$(S \Longrightarrow T) \Longrightarrow [(S \text{ ou } (\text{non } R)) \Longrightarrow (T \text{ ou } (\text{non } R))]$$

est vraie; vu la définition du signe $\Longrightarrow$, cela signifie que la relation

$$(S \Longrightarrow T) \Longrightarrow [(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow (R \Longrightarrow T)]$$

est vraie; par hypothèse la relation $(S \Longrightarrow T)$ est vraie; la règle (RV 2) montre donc que la relation

$$(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow (R \Longrightarrow T)$$

est vraie; comme la relation $(R \Longrightarrow S)$ est vraie par hypothèse, on voit en appliquant à nouveau (RV 2) que $(R \Longrightarrow T)$ est vraie, ce qui achève la démonstration.

(TL 2) : *Si* R *est une relation, la relation* $(R \Longrightarrow R)$ *est vraie.*

En effet, les relations

$$R \Longrightarrow (R \text{ ou } R), \qquad (R \text{ ou } R) \Longrightarrow R$$

sont vraies d'après (AL 1) et (AL 2); il reste donc à appliquer (TL 1).

Remarque 4. Vu la définition du signe $\Longrightarrow$, l'énoncé précédent signifie que, quelle que soit la relation R, la relation

$$R \text{ ou } (\text{non } R)$$

est vraie. *Il ne s'ensuit pas* que l'une au moins des deux relations R, (non R) soit vraie — c'est justement la question de savoir s'il existe des relations indécidables ! En fait, quand on a établi qu'une relation (R ou S) est vraie, on ne peut pas en déduire directement que l'une des relations R, S soit vraie.

(TL 3) : *Si* R *est une relation, la relation*

$$R \Longleftrightarrow \text{non } (\text{non } R)$$

est vraie.

Dire que R est vraie revient donc à dire que la négation de (non R) est vraie, autrement dit que (non R) est fausse.

(TL 4) : *Si* R *et* S *sont des relations, la relation*

$$(R \Longrightarrow S) \Longleftrightarrow [(\text{non } S) \Longrightarrow (\text{non } R)]$$

est vraie.

Pour établir que R implique S, il est donc suffisant (et nécessaire) de prouver que la négation de S implique celle de R. Par contre, l'énoncé

$$(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow [(\text{non } R) \Longrightarrow (\text{non } S)]$$

est faux, et est la source de nombreuses erreurs de raisonnements (étant donné que tout homme est mortel, cet énoncé pourrait servir à prouver que tout chien est immortel). On l'utilise cependant très souvent dans la vie courante, le plus souvent à tort bien entendu, et parfois avec raison sur le plan psychologique : « les gens de droite soutiennent l'Algérie Française, donc les gens de gauche soutiennent l'Algérie Indépendante ».

(TL 5) : *Si* R, S *sont des relations, les relations*

$$(R \text{ et } S) \Longrightarrow R, \qquad (R \text{ et } S) \Longrightarrow S$$

sont vraies; si de plus R *et* S *sont vraies, alors* (R et S) *est vraie.*

On déduit de là que, pour que (R et S) soit vraie, *il faut et il suffit* que les relations R et S considérées le soient, conformément au sens intuitif du mot « et ».

Remarque 5. Il est facile de montrer que s'il existait une relation contradictoire R, alors toute autre relation S le serait aussi, comme on l'a dit plus haut.

En effet, (AL 2) et (AL 3) montrent que

$$(\text{non } R) \Longrightarrow (S \text{ ou } (\text{non } R))$$

est vraie; comme (non R) est vraie par hypothèse, la relation

$$S \text{ ou } (\text{non } R), \qquad \text{i.e. } (R \Longrightarrow S),$$

est donc vraie; et comme R est vraie par hypothèse, on en déduit que S est vraie — et donc aussi (non S)...

La *Remarque* précédente est à la base du **raisonnement par l'absurde;** celui-ci consiste, pour démontrer qu'une relation R est vraie, à adjoindre temporairement (non R) aux axiomes des Mathématiques, et à établir que les « nouvelles » Mathématiques ainsi obtenues sont contradictoires; d'après la *Remarque* 5, toute relation est alors vraie dans le nouveau système, et en particulier la relation R elle-même. Par suite, R est conséquence logique des axiomes des Mathématiques (usuelles) et de la relation (non R), ce qui signifie, comme on le voit facilement, que *la relation*

$$(\text{non } R) \Longrightarrow R$$

est vraie (dans les Mathématiques usuelles, auxquelles on est maintenant revenu); il reste à en déduire que R elle-même est vraie; or l'axiome (AL 4), où l'on remplace R, S et T par (non R), R et R respectivement, montre que la relation

$$((\text{non } R) \Longrightarrow R) \Longrightarrow [((\text{non } R) \text{ ou } R) \Longrightarrow (R \text{ ou } R)]$$

est vraie; comme ((non R) $\Longrightarrow$ R) est vraie par hypothèse il en est donc de même de

$$((\text{non } R) \text{ ou } R) \Longrightarrow (R \text{ ou } R);$$

mais ((non R) ou R) est vraie d'après (AL 3) et la *Remarque* 4; par conséquent, (R ou R) est vraie, et (AL 1) montre finalement que R est vraie.

Dans la pratique, le raisonnement par l'absurde s'utilise comme suit : on « suppose la relation R fausse », ce qui revient justement à adjoindre (non R) aux axiomes des Mathématiques; on raisonne à partir de là jusqu'à ce qu'on ait trouvé une relation à la fois vraie et fausse; on termine alors en disant « or ceci est absurde, donc R est vraie ».

Une autre méthode de démonstration fréquemment utilisée dans la pratique est celle de la **disjonction des cas;** elle repose sur l'énoncé suivant :

(TL 6) : *Soient* R, S *et* T *trois relations; si les trois relations*

$$R \text{ ou } S, \qquad R \Longrightarrow T, \qquad S \Longrightarrow T$$

sont vraies, alors T *est vraie.*

Comme S implique T, l'axiome (AL 4) montre que (S ou R) implique (T ou R); comme R implique T, on voit de même que (R ou T) implique (T ou T); comme (T ou R) implique (R ou T) d'après (AL 3), on voit donc que (S ou R) implique

(T ou T); or (R ou S) est vraie et implique (S ou R); par suite (T ou T) est vraie, et on conclut la démonstration à l'aide de (AL 1).

Dans la pratique, on utilise surtout l'énoncé précédent en prenant pour S la négation de R; *pour montrer que* T *est vraie, il suffit de faire voir que* R *implique* T, *et que* (non R) *implique* T *également.*

6. *Substitutions dans une relation*

Soient R une relation, A un objet mathématique, et x une lettre (qui est donc un objet mathématique « totalement indéterminé »); dans l'assemblage de lettres et de signes fondamentaux qui constitue la relation R, remplaçons partout la lettre x par l'assemblage A; l'un des critères de formation des relations est que l'assemblage ainsi obtenu *est encore une relation*, que l'on désigne (*) par la notation

$$(A|x)R$$

et qu'on appelle la relation obtenue en **substituant** A **à** x **dans** R, ou en **donnant à** x **la valeur** A **dans** R; et on dit que l'objet mathématique A **vérifie la relation** R si la relation $(A|x)R$ est vraie. Il va de soi que, si la lettre x ne figure pas effectivement dans l'assemblage R, la relation $(A|x)R$ n'est autre que R, et dans ce cas dire que A vérifie R signifie que R est vraie.

Pour indiquer qu'une lettre x figure dans une relation R, on écrit fréquemment celle-ci sous la forme

$$R\{x\}$$

(analogue, mais non identique, à celle qu'on utilisera au § 2 pour désigner les fonctions); on écrit alors fréquemment

$$R\{A\}$$

au lieu de $(A|x)R$. De même, si x et y sont deux lettres distinctes figurant dans R, et si l'on veut mettre ce fait en évidence, on écrit

$$R\{x, y\}$$

au lieu de R, et ainsi de suite.

(TL 7) : *Soient* R *une relation,* x *une lettre, et* A *un objet mathématique. Si la relation* R *est vraie, il en est de même de la relation obtenue en substituant* A *à* x *dans* R.

Autrement dit, si R est vraie lorsqu'on y regarde x comme un « objet indéterminé », alors R reste vraie lorsqu'on donne à x une « valeur » spécifique A. Par exemple, si l'on démontre que la relation

$$x = x,$$

(*) **Dans ce § exclusivement.**

où x est une *lettre* au sens technique du terme, est vraie, il s'ensuivra que la relation

$$A = A$$

est vraie quel que soit l'objet mathématique A.

Ce résultat donnera sans doute au lecteur débutant l'impression d'un simple calembour, à cause de la signification intuitive que nous avons attribuée plus haut aux *lettres*, qui sont censées représenter des objets « totalement indéterminés » ou « arbitraires »; *mais cette interprétation n'était jusqu'ici fondée sur aucun résultat mathématique précis*, et n'avait pas encore été effectivement justifiée par des règles gouvernant l'emploi des lettres et conformes à ce que le sens commun attend du comportement d'objets « indéterminés ». *La règle* (TL 7) *a précisément pour but de justifier cette interprétation des lettres comme « objets indéterminés »*, et ce serait ne pas avoir compris la situation véritable que de croire qu'on peut justifier (TL 7) par de simples considérations de « bon sens » : les machines à démontrer ignorent cette notion, et on perdrait son temps à vouloir leur faire comprendre ce qu'est un « objet indéterminé ».

En fait, la démonstration consiste tout d'abord à vérifier (TL 7) lorsque R s'obtient par application directe d'un axiome, et se fait en constatant que, dans ce cas, la relation $(A|x)R$ est soit identique à R, soit obtenue par application directe du même axiome que R — si par exemple R est la relation

$$(S \text{ ou } S) \Longrightarrow S$$

où S est une relation donnée, alors il est clair que $(A|x)R$ n'est autre que la relation

$$(S' \text{ ou } S') \Longrightarrow S'$$

où S' désigne la relation $(A|x)S$. Une fois effectuées ces vérifications, qui supposent bien entendu qu'on a écrit explicitement tous les axiomes, il est immédiat de passer au cas général d'une relation vraie « quelconque ».

7. *Quantificateurs*

Nous avons indiqué jusqu'à présent trois procédés fondamentaux pour former des relations — la disjonction logique, la négation, et la substitution d'un objet à une lettre. Ces procédés sont de nature purement logique (i.e. ne font pas intervenir les signes mathématiques qu'on introduira aux §§ 1 et 2). Dans la pratique, on a encore besoin d'un quatrième procédé purement logique pour former des relations — c'est celui qui exprime l'assertion qu'étant données une relation R et une lettre x, il existe au moins un objet mathématique A tel que la relation $(A|x)R$ soit vraie, i.e. qui vérifie R. Naturellement nous attribuons ici à l'expression « il existe » son sens purement intuitif; les considérations qui suivent ont pour but de la remplacer par un nouveau signe logique, à savoir le signe

$$\exists,$$

et de codifier l'emploi de celui-ci de telle sorte qu'il se comporte conformément à ce qu'exige le sens commun lorsqu'on utilise l'expression « il existe » en langage courant. Le signe $\exists$ s'appelle le **quantificateur existentiel.**

Étant données une *relation* R et une *lettre* x, on peut donc former une nouvelle *relation* qui se désigne par

$$(\exists x)\,R \qquad \text{ou} \qquad (\exists x)\,R\{x\}$$

et qui se lit (*)

il existe x tel que R.

Pour écrire dans ce langage que, par exemple, l'équation $x^4 + 1 = 0$ possède au moins une racine réelle (ce qui est d'ailleurs faux, mais importe peu), on désigne par **R** l'ensemble des nombres réels et, en utilisant le signe $\in$ qui sera introduit au § suivant, on forme la relation

$$(\exists x)\ [(x \in \mathbf{R})\ \text{et}\ (x^4 + 1 = 0)].$$

A partir du signe $\exists$, on introduit l'abréviation

$$\forall$$

qu'on appelle le **quantificateur universel** ; si R est une relation et x une lettre, on désigne par

$$(\forall x)\,R$$

la relation

$$\text{non}\,[(\exists x)\ (\text{non}\ R)],$$

et on la lit (*)

pour tout x, R

ou encore

on a R quel que soit x.

Dire que la relation $((\forall x)\,R)$ est fausse signifie donc que l'assertion $((\exists x)\ (\text{non}\ R))$ est vraie : l'assertion « tous les hommes sont mortels » est la négation logique de l'assertion « il existe des hommes immortels ». Mais bien entendu, dire que l'assertion « tous les habitants de la Casbah d'Alger ont été soumis à la torture en 1957 » est fausse *ne signifie pas* que l'assertion « aucun habitant de la Casbah d'Alger n'a été torturé en 1957 » soit vraie (**).

(*) Il est fort difficile d'utiliser *correctement* les signes $\exists$ et $\forall$ dans la pratique courante; il est donc préférable de se borner à écrire « il existe » et « pour tout », comme on l'a toujours fait.

(**) Le lecteur qui désirerait savoir à quoi s'en tenir pourra consulter la documentation rassemblée dans le livre de Pierre Vidal-Naquet, *La Raison d'Etat* (Éditions de Minuit, Paris, 1962), où l'on trouvera aussi une bibliographie abondante.

Sur les exploits de la police algérienne voir, du même auteur, *La Question ininterrompue* dans *Le Monde* du 29 septembre 1965.

¶ *Remarque* 6. Il est théoriquement possible d'écrire les Mathématiques en n'utilisant que des lettres, les trois signes logiques

$$\text{ou}, \quad \text{non}, \quad \exists,$$

et les trois signes mathématiques qui, dans les §§ 1 et 2, serviront à former des « égalités », des « appartenances » et des « couples » (on pourrait même se passer du dernier signe).

Dans ce système, une assertion de la forme $(\exists x)\,R$ peut être vraie sans qu'on ait aucun moyen de « construire effectivement » un objet mathématique vérifiant R — de même, dans la vie de tous les jours, l'assertion « il existe des banquiers honnêtes » ne constitue pas une information très substantielle, car elle ne permet pas, à elle seule, d'*exhiber* un honnête banquier.

On trouvera au n° 9 des indications sur un système plus complet, ne présentant pas l'inconvénient dont on vient de parler, mais moins naturel que le système précédent.

8. Règles d'emploi des quantificateurs

La première de ces règles est la suivante :

(AL 5) : *Soient* R *une relation,* x *une lettre et* A *un objet mathématique. Alors la relation*

$$(A|x)\,R \Longrightarrow (\exists x)\,R$$

est vraie.

Si donc la relation $(A|x)R$ est vraie, autrement dit si l'objet A « vérifie » R, alors la relation $(\exists x)R$ est vraie, conformément à ce qu'on espère. Dans la pratique, c'est presque toujours ainsi qu'on démontre qu'une relation de la forme $(\exists x)R$ est vraie : on exhibe un objet spécifique A qui vérifie R. On fait de même dans la vie courante : la meilleure façon de prouver qu'il existe des banquiers honnêtes, c'est d'en exhiber un explicitement.

(TL 8) : *Soient* R *une relation,* x *une lettre et* A *un objet mathématique. Alors la relation*

$$(\forall x)R \Longrightarrow (A|x)R$$

est vraie.

Si donc la relation $(\forall x)R$ est vraie, on obtient encore une relation vraie en substituant à x, dans R, un objet mathématique quelconque. Par exemple, si l'on démontre que la relation

$$(\forall x)\ (x = x),$$

où x est une lettre au sens technique du terme, est vraie, alors pour tout objet mathématique A la relation

$$A = A$$

sera vraie. On procède de même dans la vie courante : l'assertion « tous les intellectuels sont des pédérastes » implique que chaque intellectuel explicitement nommé est un pédéraste.

(TL 9) : *Soient* R *une relation et* x *une lettre. La relation*

$$\text{non } ((\exists x)\mathrm{R}) \Longleftrightarrow (\forall x)\ (\text{non } \mathrm{R})$$

est vraie.

Dire que la relation $(\exists x)\mathrm{R}$ est fausse signifie donc que la relation $(\forall x)$ (non R) est vraie, et en particulier implique que tout objet mathématique A vérifie (non R).

(TL 10) : *Soient* R *et* S *des relations et* x *une lettre. La relation*

$$(\forall x)\ (\mathrm{R} \text{ et } \mathrm{S}) \Longleftrightarrow ((\forall x)\mathrm{R} \text{ et } (\forall x)\mathrm{S})$$

est vraie.

C'est évident intuitivement. On notera par contre que la relation

$$(\forall x)\ (\mathrm{R} \text{ ou } \mathrm{S}) \Longleftrightarrow ((\forall x)\mathrm{R} \text{ ou } (\forall x)\mathrm{S})$$

n'est pas vraie en général; par exemple, l'assertion « tous les intellectuels sont des traîtres ou des pédérastes » n'implique pas la relation « tous les intellectuels sont des traîtres ou tous les intellectuels sont des pédérastes », car il pourrait exister *à la fois* des intellectuels qui sont des traîtres sans être des pédérastes, *et* des intellectuels qui sont des pédérastes tout en étant patriotes.

(TL 11) : *Soient* R *et* S *des relations et* x *une lettre. La relation*

$$(\exists x)\ (\mathrm{R} \text{ ou } \mathrm{S}) \Longleftrightarrow ((\exists x)\mathrm{R} \text{ ou } (\exists x)\mathrm{S})$$

est vraie.

C'est aussi évident intuitivement. Notons d'autre part que la relation

$$(\exists x)\ (\mathrm{R} \text{ et } \mathrm{S}) \Longrightarrow ((\exists x)\mathrm{R} \text{ et } (\exists x)\mathrm{S})$$

est *vraie*, mais que l'implication opposée

$$((\exists x)\mathrm{R} \text{ et } (\exists x)\mathrm{S}) \Longrightarrow (\exists x)\ (\mathrm{R} \text{ et } \mathrm{S})$$

est généralement *fausse*. Ainsi l'assertion « il existe des gens riches et honnêtes » implique évidemment l'assertion « il existe des gens riches et il existe des gens honnêtes », mais l'implication opposée n'est pas correcte, car des raisonnements *purement logiques* ne sauraient suffire à exclure l'éventualité dans laquelle les gens riches seraient nécessairement malhonnêtes.

Pour conclure, nous allons énoncer quelques règles faisant intervenir des quantificateurs itérés. Soient R une relation, et x, y deux lettres *distinctes*; on peut alors, dans R, appliquer un quantificateur relativement à la lettre x, puis, dans la relation obtenue, appliquer un quantificateur relativement à la variable y; on peut aussi bien entendu procéder dans l'ordre inverse, et se demander si l'ordre dans

lequel on effectue les opérations a une importance. La réponse est donnée par l'énoncé suivant (qui ne couvre pas tous les cas, pour la simple raison que les énoncés auxquels tout le monde pense et qui ne se trouvent pas ci-dessous sont *faux*) :

(TL 12) : *Soient* R *une relation,* x *et* y *des lettres distinctes. Alors les relations*

$$(\forall x)\ (\forall y)\mathrm{R} \Longleftrightarrow (\forall y)\ (\forall x)\mathrm{R}$$
$$(\exists x)\ (\exists y)\mathrm{R} \Longleftrightarrow (\exists y)\ (\exists x)\mathrm{R}$$
$$(\exists x)\ (\forall y)\mathrm{R} \Longrightarrow (\forall y)\ (\exists x)\mathrm{R}$$

sont vraies.

Donnons par exemple une démonstration intuitive (i.e. incorrecte...) du second énoncé. Si la relation $(\exists x)(\exists y)\mathrm{R}$ est vraie, cela veut dire qu'on peut trouver un objet A tel qu'en le substituant à x dans la relation $(\exists y)\mathrm{R}$ on trouve une relation vraie — autrement dit tel que la relation $(\exists y)\mathrm{R}\{\mathrm{A}, y\}$ soit vraie; mais ceci veut dire de même qu'il existe un objet B tel qu'en le substituant à y dans $\mathrm{R}\{\mathrm{A}, y\}$ on trouve une relation vraie — autrement dit tel que la relation $\mathrm{R}\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ soit vraie. Mais alors la relation $(\exists x)\mathrm{R}\{x, \mathrm{B}\}$ est vraie, donc aussi la relation $(\exists y)\ (\exists x)\mathrm{R}\{x, y\}$ et ceci démontre (sic) la relation considérée.

Remarque 7. Les incorrections de la démonstration précédente sont au nombre de trois au moins : (1) on s'est borné à montrer que la relation $(\exists x)\ (\exists y)\mathrm{R}$ *implique* la relation $(\exists y)(\exists x)\mathrm{R}$ au lieu de prouver que ces deux relations sont équivalentes; ce n'est évidemment pas grave, l'implication opposée se démontrant de la même façon; (2) on s'est borné à montrer que si la relation $(\exists x)(\exists y)\mathrm{R}$ est vraie alors la relation $(\exists y)(\exists x)\mathrm{R}$ l'est aussi — alors qu'une implication peut fort bien être vraie indépendamment de la vérité de ses deux termes; (3) on a admis que, pour qu'une relation de la forme $(\exists x)\mathrm{R}$ soit vraie, *il faut* et il suffit que l'on puisse trouver un objet A tel que la relation $(\mathrm{A}|x)\mathrm{R}$ soit vraie : or la règle (AL 5) indique seulement que cette condition est *suffisante*.

En ce qui concerne le point (3), on peut le justifier à l'aide des considérations du n° 9. Pour ce qui est de (2), on le justifie en faisant usage de la **méthode de l'hypothèse auxiliaire** dont voici l'énoncé: soient R et S deux relations; adjoignons temporairement R aux axiomes des Mathématiques (ce qu'on indique pratiquement en disant « supposons que R soit vraie »), et supposons que S soit vraie dans ces « nouvelles » Mathématiques; alors la relation $(\mathrm{R} \Longrightarrow \mathrm{S})$ est vraie (dans les Mathématiques usuelles bien entendu !). Cette méthode se justifie à l'aide des critères les plus élémentaires, ceux des n° 4 et 5 : on écrit une suite de syllogismes partant des « nouveaux » axiomes (i.e. des axiomes usuels et de R) et aboutissant à S, et on démontre, en raisonnant de proche en proche, que chaque relation de la chaîne est conséquence logique de R, d'où, à la fin du processus, l'implication $(\mathrm{R} \Longrightarrow \mathrm{S})$.

Remarque 8. On a fréquemment à écrire la négation d'une relation comportant deux quantificateurs successifs (ou même plus de deux), exercice que les débutants ont généralement quelque peine à accomplir. Soit par exemple à former la négation (ou une relation équivalente à la négation) de la relation $(\forall x)(\exists y)\mathrm{R}$. Désignant provisoirement par S la relation $(\exists y)\mathrm{R}$, on doit former la négation de $(\forall x)S$; or cette relation n'est autre que

$$\text{non } [(\exists x) \text{ (non S)}];$$

sa négation est donc équivalente, d'après (TL 3), à $(\exists x)$ (non S). Mais comme S n'est autre que $(\exists y)R$, relation équivalente à $(\exists y)$(non non R), on voit que (non S) est équivalente à $(\forall y)$ (non R); par conséquent, on obtient le résultat cherché, à savoir que *la négation de la relation*

$$(\forall x)(\exists y)R$$

est équivalente à la relation

$$(\exists x)(\forall y)(\text{non R}).$$

9. *L'opération de Hilbert. Critères de formation*

Pour conclure ce §, et à l'intention des lecteurs non débutants qui pourraient s'intéresser à la Logique, nous allons donner des précisions supplémentaires sur l'un des systèmes possibles, à savoir celui qui est utilisé par N. Bourbaki dans ses *Éléments de Mathématique*.

Dans ce système, on utilise sept *signes fondamentaux*, et des *lettres*. Quatre des signes fondamentaux, à savoir

$$\text{ou}, \quad \text{non}, \quad \tau, \quad \square$$

sont de nature purement logique; les trois autres sont de nature mathématique à proprement parler, ce sont les signes

$$=, \quad \in, \quad \supset,$$

qui seront introduits aux §§ 1 et 2 (le troisième est le signe du couple; voir le critère (OM 2) ci-dessous).

Un *assemblage* s'obtient en écrivant une succession de signes et de lettres, certains des signes τ figurant dans un assemblage pouvant de plus être joints à certains des signes $\square$ par des *liens* — par exemple, l'expression

$$\tau x \in y = \in \in y x = z \square$$

est un assemblage.

Soit A un assemblage, et soit x une lettre; nous allons indiquer un procédé pour en déduire un nouvel assemblage *qui ne contient plus la lettre* x mais que l'on désigne néanmoins par la notation

$$\tau_x(A);$$

on l'obtient en effectuant les trois opérations suivantes :

a) on écrit l'assemblage τA obtenu en faisant précéder l'assemblage A du signe τ;

b) on joint le signe τ placé devant A à chaque occurence de la lettre x par un lien;

c) dans l'assemblage obtenu, on remplace partout la lettre x par le signe $\square$. Si par exemple A est l'assemblage écrit plus haut, alors $\tau_x(A)$ est l'assemblage

$$\tau\tau\square \in y = \in \in y \square = z \square.$$

L'opération faisant passer de A à $\tau_x(A)$ est essentiellement due à Hilbert; on en donnera plus loin la signification intuitive.

Nous allons maintenant énoncer les *critères de formation* des relations et des objets mathématiques; les voici :

(OM 1) : *Toute lettre est un objet mathématique.*

(OM 2) : *Si* A *et* B *sont des objets mathématiques, l'assemblage*

$$\supset AB,$$

qu'on désigne pratiquement par

$$(A, B),$$

est un objet mathématique.

(OM 3) : *Soient* A *et* T *des objets mathématiques, x une lettre; alors l'assemblage* $(A|x)T$ *déduit de* T *en* y *remplaçant partout la lettre x par l'assemblage* A, *est un objet mathématique.*

(OM 4) : *Soient* R *une relation et x une lettre. Alors l'assemblage* $\tau_x(R)$ *est un objet mathématique.*

(R 1) : *Si* R *et* S *sont des relations, l'assemblage*

$$\text{ou RS},$$

qu'on écrit pratiquement (R ou S), *est une relation.*

(R 2) : *Si* R *est une relation, l'assemblage*

$$\text{non R}$$

est une relation.

(R 3) : *Soient* R *une relation, x une lettre, et* A *un objet mathématique. L'assemblage* $(A|x)R$ *est une relation.*

(R 4) : *Soient* A *et* B *des objets mathématiques. L'assemblage*

$$= AB,$$

qu'on écrit pratiquement A = B, *est une relation.*

(R 5) : *Soient* A *et* B *des objets mathématiques. L'assemblage*

$$\in AB,$$

qu'on écrit pratiquement $A \in B$, *est une relation.*

Il n'y a pas d'autres méthodes, en Mathématiques, pour former des objets mathématiques et des relations; et, à l'exception de (OM 4), qui ne s'utilise presque jamais directement, tous les critères précédents sont effectivement utilisés à chaque instant dans la pratique.

On remarquera que les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ n'interviennent pas dans ce qui précède : c'est parce qu'on va maintenant pouvoir (en utilisant l'opération de Hilbert) les introduire comme simples abréviations.

De façon précise, soient R une relation et x une lettre; alors

$$(\exists x)R$$

sera, par définition, la relation

$$(\tau_x(R)|x)R$$

qu'on déduit de R en y remplaçant partout la lettre x par l'objet mathématique $\tau_x(R)$. Par suite, *pour que la relation* $(\exists x)$R *soit vraie, il faut et il suffit que l'objet* $\tau_x(R)$ *vérifie la relation* R, et ceci conduit à l'interprétation intuitive de l'opération de Hilbert: celle-ci consiste à choisir une fois pour toutes, pour chaque relation R et chaque lettre x, un objet vérifiant la relation $R\{x\}$ (s'il en « existe »; dans le cas contraire, $\tau_x(R)$ est un objet dont on ne peut rien dire). Il va de soi que ce « choix » est purement fictif : l'intérêt de l'opération de Hilbert est de donner un procédé parfaitement artificiel mais purement mécanique pour construire effectivement un objet dont on sait *seulement* qu'il satisfait à des conditions imposées d'avance (dans le cas où de tels objets existeraient) (*). On l'utilise aussi maintenant à la place de l'axiome du choix (§ 2, *Remarque* 7).

Dans la pratique courante, il est tout à fait exceptionnel d'avoir à utiliser l'opération de Hilbert (voir au § 5, *Remarque* 1 la définition des nombres cardinaux), qui ne peut évidemment conduire à aucun résultat « explicite ». Comme le Dieu des philosophes, l'opération de Hilbert est incompréhensible et ne se voit pas; mais elle gouverne tout, et ses manifestations sensibles éclatent partout.

(*) Le fait que $\tau_x(R)$ vérifie R si l'on peut construire un objet A qui vérifie R n'est bien entendu qu'une reformulation de l'*axiome* (AL 5).

EXERCICES

Il est parfaitement utopique d'espérer apprendre des Mathématiques, si élémentaires ou si supérieures soient-elles, sans résoudre des Exercices.

Les Exercices qu'on trouvera dans ce livre sont de trois sortes. Certains sont des illustrations pratiques ou même numériques des théories exposées dans le texte; le lecteur débutant ne pourra pas acquérir la technique du calcul sans résoudre une partie appréciable des Exercices de ce genre. D'autres apportent au texte des compléments théoriques élémentaires; en les étudiant, le lecteur s'habituera à manipuler le langage et les modes de raisonnements utilisés dans le texte; ceux de ces Exercices qui ne sont pas *très* faciles sont précédés d'un signe ¶. Enfin, la dernière catégorie est constituée par des Exercices qui apportent au texte des compléments importants et difficiles; ils sont destinés uniquement aux étudiants déjà avancés qui s'intéressent vraiment aux Mathématiques; ces Exercices sont précédés de deux ou même trois signes ¶.

Nous ne saurions trop insister enfin sur le fait que résoudre un Exercice ne consiste pas seulement à se convaincre, à l'aide d'un « brouillon » fait à la hâte, du fait qu'on en a à peu près compris la solution; si cette méthode est admissible pour les Exercices de calcul numérique, il faut par contre s'efforcer de *rédiger intégralement* les Exercices plus théoriques, où l'on doit construire de véritables démonstrations. De cette façon, et uniquement de cette façon, l'étudiant parviendra à acquérir un langage clair et correct, et à utiliser les termes techniques dans leur sens propre, ce qui, en Mathématiques, est le signe le plus certain de la compréhension d'un sujet.

1. Soient R et S deux relations. Montrer que, si R est fausse, la relation $(R \Longrightarrow S)$ est vraie. Peut-on déduire de là que S est vraie?

2. Soient R et S deux relations. Montrer que la relation

$$[R \text{ et } (\text{non } R)] \Longrightarrow S$$

est vraie.

3. Montrer à l'aide d'un exemple que la relation

$$(\forall x)\ (\exists y)R \Longrightarrow (\exists y)\ (\forall x)R$$

n'est généralement pas vraie.

4. Soient R et S deux relations équivalentes, et T une relation quelconque. Montrer que chacune des relations suivantes est vraie :

$$\begin{gathered}
(\text{non } R) \Longleftrightarrow (\text{non } S)\\
(R \Longrightarrow T) \Longleftrightarrow (S \Longrightarrow T)\\
(T \Longrightarrow R) \Longleftrightarrow (T \Longrightarrow S)\\
(R \text{ et } T) \Longleftrightarrow (S \text{ et } T)\\
(R \text{ ou } T) \Longleftrightarrow (S \text{ ou } T).
\end{gathered}$$

¶¶ 5. Démontrer les relations suivantes, où R, S et T désignent des relations quelconques :

$$\begin{gathered}
R \Longrightarrow (S \Longrightarrow R)\\
(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow [(S \Longrightarrow T) \Longrightarrow (R \Longrightarrow T)]\\
R \Longrightarrow [(\text{non } R) \Longrightarrow S]\\
(R \text{ ou } S) \Longleftrightarrow [(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow S]\\
(R \Longleftrightarrow S) \Longleftrightarrow \{(R \text{ et } S) \text{ ou } [(\text{non } R) \text{ et } (\text{non } S)]\}\\
(R \Longleftrightarrow S) \Longleftrightarrow \text{non } [(\text{non } R) \Longleftrightarrow S]\\
\{R \Longrightarrow [S \text{ ou } (\text{non } T)]\} \Longleftrightarrow [(T \text{ et } R) \Longrightarrow S]\\
[R \Longrightarrow (S \text{ ou } T)] \Longleftrightarrow [S \text{ ou } (R \Longrightarrow T)\\
(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow \{(R \Longrightarrow T) \Longrightarrow [R \Longrightarrow (S \text{ et } T)]\}\\
(R \Longrightarrow T) \Longrightarrow \{(S \Longrightarrow T) \Longrightarrow [(R \text{ ou } S) \Longrightarrow T]\}.\\
(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow [(R \text{ et } T) \Longrightarrow (S \text{ et } T)]\\
(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow [(R \text{ ou } T) \Longrightarrow (S \text{ ou } T)].
\end{gathered}$$

Soient R et S deux relations et x une lettre ne figurant pas dans R. Montrer que les relations

$$(\forall x)\ (\text{R ou S}) \Longleftrightarrow (\text{R ou } (\forall x)\text{S})$$
$$(\exists x)\ (\text{R et S}) \Longleftrightarrow (\text{R et } (\exists x)\text{S})$$

sont vraies.

Soient R et S des relations, x une lettre. Démontrer les relations

$$[(\forall x)(\text{R ou S})] \Longrightarrow [(\forall x)\text{R ou } (\exists x)\text{S}]$$
$$[(\exists x)\text{R et } (\exists x)\text{S}] \Longrightarrow [(\exists x)\ (\text{R et S})].$$

Les cannibales d'une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaines, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera roti, et il sera bouilli dans le cas contraire. Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ? (d'après Cervantès).

Le Colonel X traite le Professeur Y d'assassin. Deux semaines plus tard, le Colonel est l'objet d'une tentative d'assassinat inspirée par le Professeur. Le Colonel avait-il raison?

10. Énoncer des assertions équivalentes aux négations des assertions suivantes (*) :

a) Tout triangle rectangle possède un angle droit.

b) Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens.

c) Pour tout entier x il existe un entier y tel que pour tout entier z la relation $z < y$ implique la relation $z < x + 1$.

11. Examiner les relations logiques existant entre les assertions suivantes :

A : Tous les hommes sont mortels.
B : Tous les hommes sont immortels.
C : Aucun homme n'est mortel.
D : Aucun homme n'est immortel.
E : Il existe des hommes immortels.
F : Il existe des hommes mortels.

12. Montrer, à l'aide de l'opération de Hilbert, que si R est une relation et x une lettre figurant dans R, la lettre x *ne figure plus* dans les relations $(\forall x)$R et $(\exists x)$R, en dépit des notations utilisées pour désigner ces deux relations.
Ce résultat fort simple montre que, dans la notation $(\forall x)$R, la lettre x ne figure que pour indiquer une opération à effectuer sur la relation R, opération ayant pour résultat, entre autres, d'éliminer x de la relation R. Un phénomène analogue se retrouve dans la notation traditionnelle

$$\int_0^1 f(x)dx,$$

où la lettre x ne joue évidemment aucun rôle et, en particulier, ne figure pas dans le résultat final.

(*) La façon la plus simple (et pour cause) d'écrire la négation d'une relation est de faire précéder celle-ci d'un signe « non ». Ce n'est évidemment pas ce qu'on demande au lecteur de faire dans cet *Exercice*...

Cet Exercice explique aussi pourquoi, dans la relation $(\forall x)$R, on peut si on le désire remplacer la lettre x par toute autre lettre ne figurant pas dans R; par exemple, les relations

$$(\forall x)\ (x \times y = x - z) \quad \text{et} \quad (\forall t)\ (t \times y = t - z)$$

sont non seulement équivalentes mais en fait identiques. Il n'en est par contre pas de même des relations

$$(\forall x)\ (x \times y = x - z) \quad \text{et} \quad (\forall y)\ (y \times y = y - z).]$$

¶ **13.** Sur la planète Mars, on distingue en première approximation deux sortes d'opinions politiques : celles de droite et celles de gauche. D'autre part, les étudiants martiens se répartissent en deux associations : l'Union Planétaire des Étudiants Martiens (UPEM) et la Fédération Planétaire des Étudiants Martiens (FPEM). Sachant que les étudiants de gauche adhèrent à l'UPEM, démontrer que la FPEM est apolitique.

14. On considère quatre nombres entiers m, n, p, q sur lesquels on fait les hypothèses suivantes : *a*) les entiers m, p et q sont premiers entre eux; *b*) le reste de la division de m par pq est égal à 12; *c*) le reste de la division de $2n + 3$ par n est égal à 3; *d*) il n'existe aucun couple d'entiers x, y vérifiant la relation

$$x^4 + y^5 = p^3 - q^2 + m^6.$$

Démontrer que n est pair.

15. On considère les deux assertions suivantes :

a) : « En plein accord avec M. Robert Lacoste, ministre résidant en Algérie, nous confions la responsabilité de ramener la paix et la sécurité à Alger à la 10ᵉ division parachutiste. Cette unité gagnera en trois mois la bataille d'Alger sans tirer sur les immeubles avec des mitrailleuses lourdes, et sans qu'un seul avion français arrose de balles la Casbah. » (Extrait de la déclaration faite par le Général Salan à son procès).

b) : « The result was that the « battle of Algiers » became, for the paratroopers who fought it, and for France itself, a pyrrhic victory : it is estimated that out of the Kasbah's total population of 80 000 between 30 and 40 per cent of its active male population was, at one stage or another of the « battle », arrested for questioning and questioning came to involve the use of torture as a basic instrument, as a time-saving device to obtain quick results. » (Edward Behr, correspondant de *Time* à Alger, dans *The Algerian Problem*, W. W. Norton, New York, 1961).
Ces assertions sont-elles logiquement incompatibles? (On ne demande pas de décider si elles sont vraies ou fausses).

16. Utiliser la règle non (non A) $\Longleftrightarrow$ A pour simplifier la phrase suivante (extraite d'un compte rendu de match de football) :

« ... il ne se trouvera aucun sportif pour nier que le contraire n'eût été immérité... ».
Même question avec le texte suivant :

« Je vous envoie encore une note sur les examens. J'ai tenu à rappeler quelques principes fondamentaux. Je fais allusion à certaines « décisions » ou certains comportements qui sont encore, heureusement, peu nombreux. Mais, même s'ils restent peu nombreux et s'ils devaient être confirmés légalement, il ne manquera pas de gens pour dénier toute valeur à la qualité du travail que la très grande majorité des enseignants de la Faculté s'efforce de mener à bien. »

7. A la suite d'une représentation de *Pelléas et Mélisande*, un journaliste hésite entre les deux rédactions suivantes :

A) Jamais le rôle de Mélisande n'a été si bien chanté.

B) Jamais si jeune cantatrice, aux si beaux cheveux, n'a si bien chanté Mélisande.

Lequel de ces compliments est le plus fort ? (Expliciter non A et non B.)