§ 36. Formes hermitiennes

Dans tout ce §, on désigne par K un *corps commutatif*, et on suppose qu'on s'est donné une fois pour toutes une application de K dans K, notée

$$\lambda \mapsto \lambda^*,$$

et possédant les propriétés suivantes : c'est un homomorphisme, autrement dit on a les identités

$$(1) \qquad (\lambda + \mu)^* = \lambda^* + \mu^*, \qquad (\lambda\mu)^* = \lambda^*\mu^*, \qquad 1^* = 1,$$

et en outre on a

$$(2) \qquad (\lambda^*)^* = \lambda;$$

une telle application s'appelle une **involution** dans K. Ce n'est autre qu'un automorphisme du corps K dont le carré est l'automorphisme identique.

Les exemples élémentaires les plus importants sont les suivants :

Exemple 1 (**cas orthogonal réel**). On prend $K = \mathbf{R}$ et $\lambda^* = \lambda$ pour tout $\lambda \in K$.

Exemple 2 (**cas orthogonal complexe**). On prend $K = \mathbf{C}$ et $\lambda^* = \lambda$ pour tout $\lambda \in K$.

Exemple 3 (**cas hermitien complexe**). On prend $K = \mathbf{C}$ et $\lambda^* = \bar{\lambda}$ pour tout $\lambda \in K$.

Mais il y a beaucoup d'autres situations possibles.

Exemple 4. On prend $K = \mathbf{Q}[\sqrt{d}]$ où d est un entier rationnel qui n'est pas un carré parfait (§ 9) et on pose

$$(a + b\sqrt{d})^* = a - b\sqrt{d}$$

quels que soient $a, b \in \mathbf{Q}$.

1. Formes sesquilinéaires, formes hermitiennes

Soit L un espace vectoriel sur le corps K. On appelle **forme sesquilinéaire sur L** (relativement à l'involution donnée sur K) toute application

$$f: \mathrm{L} \times \mathrm{L} \to \mathrm{K}$$

vérifiant les deux conditions que voici :

(SQ 1) : *Pour tout $y \in \mathrm{L}$, l'application $x \to f(x, y)$ de* L *dans* K *est linéaire.*

(SQ 2) : *Pour tout $x \in \mathrm{L}$, l'application $y \to f(x, y)^*$ de* L *dans* K *est linéaire.*

On peut remplacer ces axiomes par les identités que voici :

$$f(x' + x'', y) = f(x', y) + f(x'', y), \qquad f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$$
$$f(x, y' + y'') = f(x, y') + f(x, y''), \qquad f(x, \lambda y) = \lambda^* . f(x, y)$$

Lorsque l'involution choisie sur K est l'identité, on retrouve évidemment les formes bilinéaires du § 21.

On dit qu'une forme sesquilinéaire f est **hermitienne** si l'on a

$$f(x, y) = f(y, x)^* \tag{3}$$

quels que soient $x, y \in \mathrm{L}$; on a alors, en particulier,

$$f(x, x)^* = f(x, x); \tag{4}$$

dans le cas hermitien complexe (*Exemple* 3), le nombre $f(x, x)$ est donc toujours *réel* puisqu'il est égal à son conjugué.

Si l'involution choisie sur K est l'identité, la relation (3) s'écrit

$$f(x, y) = f(y, x); \tag{5}$$

on dit alors que f est une forme bilinéaire **symétrique** sur **L**.

Exemple 5. Il est facile de construire toutes les formes sesquilinéaires sur L lorsque L est de dimension finie sur K. Choisissons pour cela une base $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de L et soient

$$x = \sum \xi_i a_i, \quad y = \sum \eta_i a_i$$

deux vecteurs de L. Comme l'expression

$$f_y(x) = f(x, y)$$

est une forme linéaire en x, d'après (SQ 1), il vient

$$f(x, y) = f_y(\sum \xi_i a_i) = \sum \xi_i . f_y(a_i) = \sum \xi_i . f(a_i, y);$$

mais comme

$$f_i(y) = f(a_i, y)^*$$

est une forme linéaire en y d'après (SQ 2), il vient

$$f(a_i, y)^* = f_i(\sum \eta_j a_j) = \sum_j \eta_j f_i(a_j) = \sum_j \eta_j f(a_i, a_j)^*$$

et en prenant le * de chaque membre on voit, en tenant compte de (1) et (2), que

$$f(a_i, y) = \sum_j f(a_i, a_j) \eta_j^*;$$

portant dans l'expression trouvée plus haut pour $f(x, y)$ il vient évidemment

$$f(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \xi_i \eta_j^* \qquad \text{où} \qquad \alpha_{ij} = f(a_i, a_j). \tag{6}$$

Il est immédiat de vérifier qu'inversement, quels que soient les $\alpha_{ij} \in \mathrm{K}$, la fonction f définie par (6) est une forme sesquilinéaire sur L.

Exemple 6. Supposons f hermitienne dans l'*Exemple* 5; il vient alors

$$\alpha_{ji} = f(a_j, a_i) = f(a_i, a_j)^* = \alpha_{ij}^*;$$

inversement, la relation

$$\alpha_{ji} = \alpha_{ij}^* \tag{7}$$

implique

$$f(x, y) = \sum \alpha_{ij} \xi_i \eta_j^* = \sum \alpha_{ji}^* \eta_j^* \xi_i = (\sum \alpha_{ji} \eta_j \xi_i^*)^* = f(y, x)^*$$

et caractérise donc les formes hermitiennes.

Lorsqu'on a choisi l'involution identique sur K, la relation (7) se réduit à

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \tag{8}$$

et caractérise alors les formes bilinéaires *symétriques* sur L.

Exemple 7. Plaçons-nous dans le cas orthogonal réel (Exemple 3) et prenons pour L l'espace vectoriel des vecteurs d'origine donnée 0 dans l'espace usuel; le produit scalaire (§ 21, *Exemple* 3)

$$f(x, y) = (x|y)$$

est une forme bilinéaire symétrique sur L.

Exemple 8. Dans la théorie de la Relativité, on utilise la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^4$ donnée par

$$f(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 - c\xi_4\eta_4$$

où c est la vitesse de la lumière. On l'appelle la **forme de Lorentz;** il s'agit bien entendu du cas orthogonal réel.

Exemple 9. Dans le cas hermitien complexe, prenons pour L l'espace vectoriel formé par les fonctions $x(t)$ à valeurs complexes qui sont définies et continues dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$; alors la formule

$$f(x, y) = \int_0^1 x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$$

définit une forme sesquilinéaire hermitienne sur L (laquelle joue un rôle important en Analyse, notamment dans la théorie des séries de Fourier). On pourrait prendre aussi

$$f(x, y) = \int_0^1\int_0^1 x(s)\,\overline{y(t)}\,\mathrm{K}(s, t)\,ds\,dt$$

où $\mathrm{K}(s, t)$ est une fonction définie et continue dans le carré $0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$, et choisie une fois pour toutes; l'expression obtenue est une forme sesquilinéaire sur L, et est hermitienne si et seulement si la fonction K vérifie

$$\mathrm{K}(t, s) = \overline{\mathrm{K}(s, t)}$$

quels que soient s, t.

Les méthodes purement algébriques développées dans ce § ne permettent pas d'établir des propriétés non triviales des formes définies dans cet *Exemple :* leur étude détaillée exige l'emploi de méthodes analytiques inspirées des considérations du présent §, mais beaucoup plus compliquées que celles-ci, et est en grande partie à l'origine de l'Analyse Fonctionnelle (théorie des espaces de Hilbert).

Soient L un espace vectoriel de dimension finie sur K et f une forme sesquilinéaire sur L. Étant donnée une base $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de L, les scalaires

$$\alpha_{ij} = f(a_i, a_j)$$

figurant dans la formule (6) s'appellent les **coefficients de** f par rapport à la base considérée, et la matrice carrée

$$(\alpha_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$$

s'appelle la **matrice de** f **par rapport à la base** en question.

On dit qu'une matrice carrée

$$\mathrm{A} = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$$

à coefficients dans K est **hermitienne** (relativement à l'involution considérée sur K) lorsque ses coefficients vérifient la relation (7) ci-dessus. Lorsque l'involution choisie sur K est l'identité, i.e. lorsque

$$\alpha_{ji} = \alpha_{ij},$$

on dit que la matrice A est **symétrique.**

Remarque 1. On appelle **matrice hermitienne complexe** une matrice hermitienne dans le cas hermitien complexe (*Exemple* 3), autrement dit une matrice carrée

(α_{ij}) à coefficients complexes telle que

$$\alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}}$$

quels que soient i, j. D'une manière générale, lorsque $\mathrm{K} = \mathbf{C}$ et qu'on emploie la terminologie « hermitienne » sans préciser davantage, il est toujours sous-entendu qu'on choisit sur $\mathbf{C}$ l'involution

$$\lambda \mapsto \overline{\lambda},$$

passage à l'imaginaire conjugué.

2. *Formes non dégénérées*

Soient L un espace vectoriel sur K et f une forme sesquilinéaire sur L. Pour tout $y \in \mathrm{L}$, la fonction

$$f_y(x) = f(x, y) \tag{9}$$

est une forme linéaire sur L d'après (SQ 1) : par suite, f définit une application

$$\hat{f} : y \mapsto f_y \tag{10}$$

de L dans son dual L^* (§ 16, nº 1). Quels que soient $x, y, z \in \mathrm{L}$ on a

$$f_{y+z}(x) = f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z) = f_y(x) + f_z(x),$$

donc

$$f_{y+z} = f_y + f_z$$

ou, si l'on préfère,

$$\hat{f}(y + z) = \hat{f}(y) + \hat{f}(z); \tag{11}$$

on a d'autre part

$$f_{\lambda y}(x) = f(x, \lambda y) = \lambda^* . f(x, y) = \lambda^* . f_y(x)$$

et par suite

$$\hat{f}(\lambda y) = \lambda^* . \hat{f}(y) \tag{12}$$

quels que soient $\lambda \in \mathrm{K}$ et $y \in \mathrm{L}$. Si l'involution choisie sur K est l'application identique (cas des formes bilinéaires), on voit donc que $\hat{f}$ est un homomorphisme de l'espace vectoriel L dans l'espace vectoriel L^*. Dans le cas général il n'en est plus de même, et on exprime les relations (11) et (12) en disant que l'application $\hat{f}$ de L dans son dual est **semi-linéaire.** En dimension finie, les applications semi-linéaires possèdent, à des modifications triviales près, les mêmes propriétés que les applications linéaires.

Le noyau de $\hat{f}$, ensemble des $y \in \mathrm{L}$ tels que $\hat{f}(y) = 0$, est aussi l'ensemble des

$y \in L$ tels que l'on ait

(13) $$f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } x \in L.$$

On dit que la forme sesquilinéaire f est **non dégénérée** si (13) implique $y = 0$, autrement dit si l'application $\hat{f}$ de L dans son dual est injective.

THÉORÈME 1. *Soient* L *un espace vectoriel de dimension finie sur* K, f *une forme sesquilinéaire sur* L, *et* $A = (\alpha_{ij})$ *la matrice de* f *par rapport à une base de* L. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

a) : *La relation*
$$f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } x \in L$$
implique $y = 0$.

b) : *La relation*
$$f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } y \in L$$
implique $x = 0$.

c) : *La matrice* A *est inversible*, i.e. on a
$$\text{dét}(\alpha_{ij}) \neq 0.$$

d) : *L'application* $\hat{f}$ *de* L *dans son dual est bijective*, autrement dit, *pour toute forme linéaire* u *sur* L, *il existe un et un seul* $y \in L$ *tel que l'on ait*
$$u(x) = f(x, y) \quad \text{pour tout } x \in L.$$

Utilisant les notations de l'*Exemple* 5, les y tels que $f(x, y) = 0$ pour tout x sont évidemment les solutions du système d'équations

(14) $$\sum_j \alpha_{ij}\eta_j^* = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

et les x tels que $f(x, y) = 0$ pour tout y sont les solutions du système d'équations

(15) $$\sum_i \alpha_{ij}\xi_i = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n);$$

dans la propriété *d*), si l'on pose $u(a_i) = v_i$, tout revient à déterminer y de telle sorte que $f(a_i, y) = v_i$ pour tout i, i.e. à résoudre le système d'équations

(16) $$\sum_i \alpha_{ij}\eta_j^* = v_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Ceci dit, *d*) signifie que le système (16) possède une et une seule solution quels que soient les seconds membres; l'équivalence avec *c*), et avec *a*) qui exprime que le système (14) n'admet que la solution triviale, résulte donc du § 20, Théorème 2. Par ailleurs, *b*) signifie que (15) n'a que la solution triviale, donc que la matrice (α_{ji}) est inversible, et comme celle-ci est la transposée de la matrice (α_{ij}) on voit que *b*) et *c*) sont équivalentes, ce qui achève la démonstration.

Remarque 2. Comme *a*) signifie que le noyau de $\hat{f}$ est nul, l'équivalence des propriétés *a*) et *d*) résulte aussi du § 19, Corollaire 1 du Théorème 13 (lequel s'étend trivialement aux applications semi-linéaires).

Exemple 10. La forme de Lorentz (*Exemple* 8) est non dégénérée car sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c \end{pmatrix}$$
et est donc inversible puisque c n'est pas nulle.

3. *Adjoint d'un homomorphisme*

Soient L et M deux espaces vectoriels de dimension finie sur K, et f et g deux formes sesquilinéaires *non dégénérées* sur L et M respectivement.

Soit u un homomorphisme de L dans M, et considérons l'expression
$$g(u(x), y) \quad \text{pour } x \in L, y \in M;$$
pour $y \in M$ donné, c'est évidemment une forme linéaire en $x \in L$, et par suite le Théorème 1, *d*) montre que pour chaque $y \in M$ il existe un et un seul $y' \in L$ tel que l'on ait
$$g(u(x), y) = f(x, y') \quad \text{pour tout } x \in L;$$
en posant $y' = u^*(y)$ on définit une application
$$u^* : M \to L$$
et on a, par conséquent, la relation

(17) $$f(x, u^*(y)) = g(u(x), y) \quad \text{quels que soient } x \in L, y \in M.$$

L'application u^* est *linéaire* comme u; en effet, quels que soient $y, z \in M$, on a
$$f(x, u^*(y + z)) = g(u(x), y + z) = g(u(x), y) + g(u(x), z)$$
$$= f(x, u^*(y)) + f(x, u^*(z)) = f(x, u^*(y) + u^*(z))$$
d'où la relation $u^*(y + z) = u^*(y) + u^*(z)$; de même, on a
$$f(x, u^*(\lambda y)) = g(u(x), \lambda y) = \lambda^* g(u(x), y) = \lambda^* f(x, u^*(y)) = f(x, \lambda u^*(y))$$
ce qui montre que $u^*(\lambda y) = \lambda u^*(y)$ et prouve notre assertion.

L'homomorphisme
$$u^* : M \to L$$
défini par (17) s'appelle l'**adjoint de l'homomorphisme**
$$u : L \to M$$

par rapport aux formes f **et** g. Dans le cas particulier où $L = M$, $f = g$, on dit que u^* **est l'adjoint de** u **par rapport à** f.

A la notion d'adjoint d'un homomorphisme correspond celle d'adjointe d'une matrice. Dans ce qui précède, *supposons* que L admette une base $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ par rapport à laquelle l'expression de f soit

$$f(x, y) = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \xi_i\eta_i^*,$$

et que M admette de même une base $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ par rapport à laquelle l'expression de g soit

$$g(z, t) = \sum_{1\leqslant j\leqslant q} \zeta_j\tau_j^*,$$

enfin soient

$$A = (\alpha_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant q}$$
$$B = (\beta_{ji})_{1\leqslant j\leqslant q,\ 1\leqslant i\leqslant p}$$

les matrices de u et u^* par rapport aux bases considérées. Prenons des vecteurs

$$x = \sum\xi_i a_i, \qquad y = \sum\eta_j b_j;$$

on aura

$$u(x) = \sum\alpha_{ij}\xi_i b_j, \qquad u^*(y) = \sum\beta_{ji}\eta_j a_i$$

et par suite

$$g(u(x), y) = \sum\alpha_{ij}\xi_i\eta_j^*$$
$$f(x, u^*(y)) = \sum\xi_i\beta_{ji}^*\eta_j^*;$$

écrivant que les résultats obtenus sont égaux quels que soient x et y il vient donc la relation

$$\beta_{ji}^* = \alpha_{ij}$$

ou encore

$$\beta_{ji} = \alpha_{ij}^*,$$

en sorte que B *s'obtient en transformant par l'involution de* K *les termes de la matrice* ${}^tA$ *transposée de* A. On dit que B est **l'adjointe de la matrice** A par rapport à l'involution donnée, et on écrit

$$B = A^*$$

(toutefois, lorsque l'involution choisie sur K est l'application identique, par exemple dans le cas orthogonal réel ou orthogonal complexe, on dit transposée au lieu d'adjointe, et on utilise la notation habituelle

$${}^tA$$

au lieu de A^*).

Par exemple, dans le cas hermitien complexe, **l'adjointe d'une matrice complexe** A n'est autre que

$$A^* = {}^t\bar{A},$$

transposée de la matrice imaginaire conjuguée de A.

Remarque 3. Il est possible de calculer la matrice de u^* en fonction de la matrice de u sans faire d'hypothèses sur les bases choisies dans L et M (le calcul précédent suppose que les bases sont « orthonormales » pour f et g comme on le verra plus loin). Voir *Exercice* 11.

Les règles de calcul sur les matrices adjointes sont analogues à celles concernant les matrices transposées — de façon précise, on a les relations

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \qquad (\lambda A)^* = \lambda^*A^*,$$
$$(AB)^* = B^*A^*, \qquad 1_n^* = 1_n,$$
$$(A^*)^* = A;$$

pour les obtenir, on écrit les formules relatives aux transposées (§ 16, Théorème 4), puis on transforme les résultats obtenus par l'automorphisme

$$\lambda \mapsto \lambda^*$$

de K.

On peut aussi prouver des formules analogues concernant les homomorphismes eux-mêmes. Si par exemple u et v sont deux homomorphismes de L dans M, on a évidemment

$$(\lambda u + \mu v)^* = \lambda^*u^* + \mu^*v^*$$

quels que soient les scalaires λ et μ. Si L, M, N sont trois espaces vectoriels de dimension finie sur K, munis de formes sesquilinéaires non dégénérées f, g, h, et si l'on a des homomorphismes $u : L \to M$ et $v : M \to N$, alors on a de même la formule

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*;$$

en effet, posant $v \circ u = w$ il vient

$$f(x, w^*(z)) = h(w(x), z) = h(v(u(x)), z) = g(u(x), v^*(z)) = f(x, u^*(v^*(z))),$$

d'où le résultat cherché.

La formule « évidente »

$$(u^*)^* = u,$$

où u est un homomorphisme de L dans M, n'est par contre valable que si f et g sont *hermitiennes*. Posons en effet $u^* = v$; l'adjoint de cet homomorphisme de M dans L est alors donné par la relation (17) dans laquelle on doit remplacer f par g, g par f, u par v, autrement dit par la relation

$$g(y, v^*(x)) = f(v(y), x);$$

si f est hermitienne, le second membre s'écrit encore

$$f(x, v(y))^* = f(x, u^*(y))^* = g(u(x), y)^*$$

d'après (17); si de plus g est hermitienne, il vient donc finalement

$$g(y, v^*(x)) = g(y, u(x))$$

d'où le résultat cherché, à savoir que $v^* = u$ si $v = u^*$.

4. *Orthogonalité par rapport à une forme hermitienne non dégénérée*

Soit f une forme *hermitienne* sur un espace vectoriel L sur K. On dit que deux vecteurs $x, y \in$ L sont **orthogonaux** par rapport à f si

$$f(x, y) = 0;$$

dans le cas de l'*Exemple* 7 on retrouve la notion usuelle, puisque $(x|y)$, étant le produit des longueurs de x et y par le cosinus de leur angle, ne peut être nul que si l'un des vecteurs est nul, ou bien si cet angle est multiple de $\pi/2$.

Si x et y sont orthogonaux, on a

$$f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(y, y) \tag{17}$$

car dans tous les cas on a

$$\begin{aligned} f(x+y, x+y) &= f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) \\ &= f(x, x) + f(x, y) + f(x, y)^* + f(y, y) \end{aligned}$$

puisque f est hermitienne. Dans le cas de l'*Exemple* 7, la relation précédente signifie que le carré de la longueur de $x + y$ est la somme des carrés des longueurs de x et de y, autrement dit se réduit au *théorème de Pythagore*.

Soit maintenant M un sous-espace vectoriel de L; on appelle **orthogonal de** M par rapport à f l'ensemble, noté généralement

$$\mathrm{M}^{\perp},$$

des $x \in$ L qui sont orthogonaux à *tout* $y \in$ M. D'après (SQ_1), c'est un sous-espace vectoriel de L. Dans le cas de l'*Exemple* 7, si M est une droite (resp. un plan) passant par l'origine, alors $\mathrm{M}^{\perp}$ est le plan (resp. la droite) perpendiculaire à M et passant par l'origine.

On a toujours

$$\mathrm{M} \subset (\mathrm{M}^{\perp})^{\perp}, \tag{18}$$

car le second membre est formé des $z \in$ L orthogonaux à tous les $y \in \mathrm{M}^{\perp}$, et comme ceux-ci sont orthogonaux aux $x \in$ M il est clair que tout $x \in$ M est dans le second membre de la relation (18).

Théorème 2. *Soit f une forme hermitienne non dégénérée sur un espace vectoriel* L *de dimension finie sur* K; *on a alors*

$$(\mathrm{M}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{M}$$

pour tout sous-espace vectoriel M *de* L.

Il suffit d'établir l'inclusion opposée à (18), i.e. de prouver que tout $z \in (\mathrm{M}^{\perp})^{\perp}$ appartient à M; pour cela, il suffit (§ 19, Théorème 3) de montrer que si une forme linéaire u sur L est nulle sur M, alors $u(z) = 0$. Or, d'après le Théorème 1, d), on

peut écrire

$$u(x) = f(x, y)$$

pour un $y \in$ L; l'hypothèse que u est nulle sur M signifie que $y \in \mathrm{M}^{\perp}$, et le fait que $u(z) = 0$, i.e. que $f(z, y) = 0$, résulte alors trivialement de l'hypothèse que z est orthogonal à $\mathrm{M}^{\perp}$, ce qui achève la démonstration.

Théorème 3. *Soient* M *et* N *des sous-espaces vectoriels de* L. *Dans les hypothèses du Théorème* 2, *on a les relations*

$$(\mathrm{M} + \mathrm{N})^{\perp} = \mathrm{M}^{\perp} \cap \mathrm{N}^{\perp}; \qquad (\mathrm{M} \cap \mathrm{N})^{\perp} = \mathrm{M}^{\perp} + \mathrm{N}^{\perp}.$$

Comme M + N se compose des $x + y$ où $x \in$ M et $y \in$ N, et comme

$$f(x+y, z) = f(x, z) + f(y, z),$$

la première relation est immédiate. Pour obtenir la seconde, on remplace M et N par $\mathrm{M}^{\perp}$ et $\mathrm{N}^{\perp}$ dans la première; il vient alors

$$(\mathrm{M}^{\perp} + \mathrm{N}^{\perp})^{\perp} = (\mathrm{M}^{\perp})^{\perp} \cap (\mathrm{N}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{M} \cap \mathrm{N}$$

d'après le Théorème 2, et en appliquant le Théorème 2 à nouveau on obtient la relation cherchée.

Théorème 4. *Soit f une forme hermitienne non dégénérée sur un espace vectoriel* L *de dimension finie sur* K. *On a alors*

$$\dim(\mathrm{M}) + \dim(\mathrm{M}^{\perp}) = \dim(\mathrm{L})$$

pour tout sous-espace vectoriel M *de* L.

On sait que, si M^{0} désigne l'orthogonal de M dans le dual L* de L, i.e. l'ensemble des formes linéaires u sur L qui vérifient

$$u(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{M}, \tag{19}$$

on a

$$\dim(\mathrm{M}) + \dim(\mathrm{M}^{0}) = \dim(\mathrm{L})$$

(§ 19, Théorème 9). Tout revient donc à montrer que $\mathrm{M}^{\perp}$ et M^{0} ont la même dimension. Or, étant donnée une forme linéaire u sur L, il existe un $y \in$ L et un seul (Théorème 1) tel que l'on ait $u(x) = f(x, y)$ pour tout $x \in$ L, et évidemment la relation (19) équivaut à $y \in \mathrm{M}^{\perp}$; il s'ensuit que l'application $\hat{f}$ du n° 2 applique $\mathrm{M}^{\perp}$ sur M^{0}, et par suite qu'il existe une application semi-linéaire et bijective de $\mathrm{M}^{\perp}$ sur M^{0}; ces deux espaces vectoriels ont donc bien même dimension, ce qui achève la démonstration.

Théorème 5. *Soit f une forme hermitienne sur un espace vectoriel* L *de dimension finie sur* K. *Étant donné un sous-espace* M *de* L, *les propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) *On a* $\mathrm{M} \cap \mathrm{M}^{\perp} = 0$.

4. *Orthogonalité par rapport à une forme hermitienne non dégénérée*

Soit f une forme *hermitienne* sur un espace vectoriel L sur K. On dit que deux vecteurs $x, y \in \mathrm{L}$ sont **orthogonaux** par rapport à f si

$$f(x, y) = 0;$$

dans le cas de l'*Exemple* 7 on retrouve la notion usuelle, puisque $(x|y)$, étant le produit des longueurs de x et y par le cosinus de leur angle, ne peut être nul que si l'un des vecteurs est nul, ou bien si cet angle est multiple de $\pi/2$.

Si x et y sont orthogonaux, on a

$$f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(y, y) \tag{17}$$

car dans tous les cas on a

$$\begin{aligned} f(x+y, x+y) &= f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) \\ &= f(x, x) + f(x, y) + f(x, y)^* + f(y, y) \end{aligned}$$

puisque f est hermitienne. Dans le cas de l'*Exemple* 7, la relation précédente signifie que le carré de la longueur de $x + y$ est la somme des carrés des longueurs de x et de y, autrement dit se réduit au *théorème de Pythagore*.

Soit maintenant M un sous-espace vectoriel de L; on appelle **orthogonal de** M par rapport à f l'ensemble, noté généralement

$$\mathrm{M}^{\perp},$$

des $x \in \mathrm{L}$ qui sont orthogonaux à *tout* $y \in \mathrm{M}$. D'après (SQ_1), c'est un sous-espace vectoriel de L. Dans le cas de l'*Exemple* 7, si M est une droite (resp. un plan) passant par l'origine, alors $\mathrm{M}^{\perp}$ est le plan (resp. la droite) perpendiculaire à M et passant par l'origine.

On a toujours

$$\mathrm{M} \subset (\mathrm{M}^{\perp})^{\perp}, \tag{18}$$

car le second membre est formé des $z \in \mathrm{L}$ orthogonaux à tous les $y \in \mathrm{M}^{\perp}$, et comme ceux-ci sont orthogonaux aux $x \in \mathrm{M}$ il est clair que tout $x \in \mathrm{M}$ est dans le second membre de la relation (18).

THÉORÈME 2. *Soit f une forme hermitienne non dégénérée sur un espace vectoriel* L *de dimension finie sur* K; *on a alors*

$$(\mathrm{M}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{M}$$

pour tout sous-espace vectoriel M *de* L.

Il suffit d'établir l'inclusion opposée à (18), i.e. de prouver que tout $z \in (\mathrm{M}^{\perp})^{\perp}$ appartient à M; pour cela, il suffit (§ 19, Théorème 3) de montrer que si une forme linéaire u sur L est nulle sur M, alors $u(z) = 0$. Or, d'après le Théorème 1, *d*), on peut écrire

$$u(x) = f(x, y)$$

pour un $y \in \mathrm{L}$; l'hypothèse que u est nulle sur M signifie que $y \in \mathrm{M}^{\perp}$, et le fait que $u(z) = 0$, i.e. que $f(z, y) = 0$, résulte alors trivialement de l'hypothèse que z est orthogonal à $\mathrm{M}^{\perp}$, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 3. *Soient* M *et* N *des sous-espaces vectoriels de* L. *Dans les hypothèses du Théorème 2, on a les relations*

$$(\mathrm{M}+\mathrm{N})^{\perp} = \mathrm{M}^{\perp} \cap \mathrm{N}^{\perp}; \qquad (\mathrm{M} \cap \mathrm{N})^{\perp} = \mathrm{M}^{\perp} + \mathrm{N}^{\perp}.$$

Comme M + N se compose des $x + y$ où $x \in \mathrm{M}$ et $y \in \mathrm{N}$, et comme

$$f(x+y, z) = f(x, z) + f(y, z),$$

la première relation est immédiate. Pour obtenir la seconde, on remplace M et N par $\mathrm{M}^{\perp}$ et $\mathrm{N}^{\perp}$ dans la première; il vient alors

$$(\mathrm{M}^{\perp} + \mathrm{N}^{\perp})^{\perp} = (\mathrm{M}^{\perp})^{\perp} \cap (\mathrm{N}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{M} \cap \mathrm{N}$$

d'après le Théorème 2, et en appliquant le Théorème 2 à nouveau on obtient la relation cherchée.

THÉORÈME 4. *Soit f une forme hermitienne non dégénérée sur un espace vectoriel* L *de dimension finie sur* K. *On a alors*

$$\dim(\mathrm{M}) + \dim(\mathrm{M}^{\perp}) = \dim(\mathrm{L})$$

pour tout sous-espace vectoriel M *de* L.

On sait que, si M^0 désigne l'orthogonal de M dans le dual L^* de L, i.e. l'ensemble des formes linéaires u sur L qui vérifient

$$u(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{M}, \tag{19}$$

on a

$$\dim(\mathrm{M}) + \dim(\mathrm{M}^0) = \dim(\mathrm{L})$$

(§ 19, Théorème 9). Tout revient donc à montrer que $\mathrm{M}^{\perp}$ et M^0 ont la même dimension. Or, étant donnée une forme linéaire u sur L, il existe un $y \in \mathrm{L}$ et un seul (Théorème 1) tel que l'on ait $u(x) = f(x, y)$ pour tout $x \in \mathrm{L}$, et évidemment la relation (19) équivaut à $y \in \mathrm{M}^{\perp}$; il s'ensuit que l'application $\hat{f}$ du nº 2 applique $\mathrm{M}^{\perp}$ sur M^0, et par suite qu'il existe une application semi-linéaire et bijective de $\mathrm{M}^{\perp}$ sur M^0; ces deux espaces vectoriels ont donc bien même dimension, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 5. *Soit f une forme hermitienne sur un espace vectoriel* L *de dimension finie sur* K. *Étant donné un sous-espace* M *de* L, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *On a* $\mathrm{M} \cap \mathrm{M}^{\perp} = 0$.

b) La restriction de f à M *est une forme hermitienne non dégénérée sur* M.

c) L'espace L *est somme directe des sous-espaces* M *et* $M^\perp$, i.e. tout $x \in L$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme

$$x = y + z \quad \text{avec} \quad y \in M \quad \text{et} \quad z \in M^\perp.$$

Si de plus f est non dégénérée, les conditions précédentes sont encore équivalentes à la suivante :

d) L'espace L *est somme des sous-espace* M *et* $M^\perp$, i.e. tout $x \in L$ s'écrit d'une façon au moins sous la forme

$$x = y + z \quad \text{avec} \quad y \in M \quad \text{et} \quad z \in M.$$

Pour démontrer ce Théorème, notons d'abord que les $x \in M \cap M^\perp$ sont les $x \in M$ qui vérifient

$$f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } y \in M;$$

l'équivalence des conditions *a*) et *b*) est donc claire. Il est non moins évident que la condition *c*), i.e. la relation

$$L = M \oplus M^\perp,$$

implique *a*). Pour achever de montrer l'équivalence des conditions *a*), *b*) et *c*), il suffit donc de montrer que *b*) implique *c*). Comme d'ailleurs *c*) n'est autre (§ 17, Théorème 1) que la conjonction de *a*) et *d*), et comme on sait déjà que *b*) implique *a*), il suffit d'établir que *b*) implique *d*).

Or soit $x \in L$, et considérons sur M la fonction

$$u(y) = f(y, x);$$

c'est évidemment une forme linéaire sur M, et comme la restriction de f à M est non dégénérée le Théorème 1 montre qu'il existe un $x' \in M$ tel que l'on ait

$$u(y) = f(y, x') \quad \text{pour tout } y \in M;$$

on a donc

$$f(y, x) = f(y, x')$$

ou encore

$$f(y, x - x') = 0$$

pour tout $y \in M$, et par suite $x - x' \in M^\perp$; comme $x' \in M$ la condition *d*) est bien vérifiée.

Supposons maintenant f non dégénérée, et *d*) vérifiée; écrivons (§ 19, Corollaire 2 du Théorème 13) la relation

$$\dim(M + M^\perp) = \dim(M) + \dim(M^\perp) - \dim(M \cap M^\perp);$$

par hypothèse le premier membre est égal à dim (L); tenant compte du Théorème 4, on voit donc que $\dim(M \cap M^\perp) = 0$. Ainsi *d*) implique *a*), et ceci termine la démonstration.

On notera que, lorsque f est non dégénérée, la relation ci-dessus s'écrit

$$\dim(M + M^\perp) = \dim(L) - \dim(M \cap M^\perp),$$

en sorte que dans cette hypothèse l'équivalence des propriétés *a*), *c*) et *d*) est immédiate. Mais on a parfois besoin dans la pratique du Théorème 5 pour des formes dégénérées, et de plus le raisonnement que nous avons utilisé pour établir que *b*) implique *d*) s'étend aux espaces de Hilbert (ce sont certains espaces vectoriels complexes de dimension infinie munis d'une forme hermitienne définie positive, et qui jouent un rôle fondamental en Analyse).

Considérons à nouveau une forme hermitienne f *non dégénérée* sur un espace vectoriel L de dimension finie sur K.

On dit qu'un sous-espace vectoriel M de L est **isotrope** lorsque

$$M \cap M^\perp \neq 0,$$

et **non isotrope** lorsque

$$M \cap M^\perp = 0,$$

Le Théorème 5 signifie donc que l'on a

$$L = M \oplus M^\perp \quad (\text{somme directe})$$

si et seulement si M est non isotrope. Dans ce cas, le nº 4 du § 17 montre qu'il existe un et un seul endomorphisme p_M de l'espace vectoriel L vérifiant les conditions suivantes :

$$p_M \circ p_M = p_M;$$
$$p_M(L) = M;$$
$$p_M(M^\perp) = 0;$$

pour tout $x \in L$, on a

$$x = p_M(x) + y \quad \text{avec } y \in M^\perp,$$

et cette relation caractérise p_M — plus précisément, $p_M(x)$ est l'unique élément de M tel que $x - p_M(x)$ soit orthogonal à M. On dit que $p_M(x)$ est la **projection orthogonale** de x sur M, et que p_M est l'**opérateur de projection orthogonale** sur M.

Exemple 11. Si M est la droite engendrée par un vecteur $a \in L$, il est clair que M est isotrope si et seulement si

$$f(a, a) = 0;$$

on dit alors que a est un **vecteur isotrope** pour f, et l'ensemble de ces vecteurs (qui est évidemment une réunion de droites passant par 0) s'appelle le **cône isotrope** de f. Lorsque f est par exemple la forme de Lorentz, celui-ci est l'ensemble des $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - ct^2 = 0.$$

Par contre, dans le cas de l'*Exemple* 7 (produit scalaire dans l'espace usuel), le seul vecteur isotrope est 0 — du reste il est clair que si trois nombres *réels*

x, y, z vérifient la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

on a $x = y = z = 0$. (Par contre cette équation a des solutions *complexes* non triviales.)

Revenant au cas général, soit a un vecteur non isotrope pour f. Alors la projection orthogonale de tout $x \in \mathrm{L}$ sur la droite M engendrée par a est donnée par la formule

$$p_{\mathrm{M}}(x) = \frac{f(x, a)}{f(a, a)} a;$$

le second membre est en effet dans M, et on a

$$f(x - p_{\mathrm{M}}(x), a) = f(x, a) - \frac{f(x, a)}{f(a, a)} f(a, a) = 0,$$

ce qui montre que $x - p_{\mathrm{M}}(x)$ est orthogonal à M.

Corollaire du Théorème 5. *Soit f une forme hermitienne sur un espace vectoriel* L *de dimension finie sur* K. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) : *Pour* $x \in \mathrm{L}$, *la relation* $f(x, x) = 0$ *implique* $x = 0$ (autrement dit f ne possède aucun vecteur isotrope non nul).

b) : *On a*

$$\mathrm{L} = \mathrm{M} \oplus \mathrm{M}^{\perp}$$

pour tout sous-espace vectoriel M *de* L.

Il est clair que, pour tout sous-espace M de L, le sous-espace $\mathrm{M} \cap \mathrm{M}^{\perp}$ se compose de vecteurs isotropes; donc la propriété *a)* implique

$$\mathrm{M} \cap \mathrm{M}^{\perp} = 0$$

et par suite implique *b)* d'après le Théorème 5. Le fait que *b)* implique *a)* s'obtient en écrivant qu'on a

$$\mathrm{M} \cap \mathrm{M}^{\perp} = 0$$

pour tout sous-espace M de dimension un de L.

Remarque 4. Supposons K algébriquement clos et $\lambda^* = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathrm{K}$. Si f est une forme hermitienne (i.e. bilinéaire symétrique, vu l'hypothèse faite sur l'involution de K) et si L est de dimension au moins égale à 2, il existe toujours des vecteurs isotropes *non nuls* pour f.

En effet, comme dim (L) $\geqslant 2$ on peut choisir dans L deux vecteurs a et b non proportionnels. Pour $\lambda \in \mathrm{K}$, on a

$$f(a\lambda + b, a\lambda + b) = f(a, a)\lambda^2 + 2f(a, b)\lambda + f(b, b);$$

si a est isotrope, il n'y a rien à démontrer; si a n'est pas isotrope, on voit que les $\lambda \in \mathrm{K}$ pour lesquels $a\lambda + b$ est isotrope sont les racines d'une équation du second degré. Comme K est supposé algébriquement clos, l'équation considérée a au moins une racine, et le vecteur isotrope $a\lambda + b$ correspondant n'est pas nul puisque a et b sont non proportionnels.

Cette *Remarque* s'applique notamment dans le cas *orthogonal complexe.*

5. *Bases orthogonales*

Soient L un espace vectoriel de dimension finie sur K et f une forme hermitienne sur L. On appelle **base orthogonale** de L (par rapport à f) toute base $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de L telle que l'on ait

$$f(a_i, a_j) = 0 \quad \text{pour } i \neq j;$$

cela signifie que la matrice de f par rapport à la base en question est *diagonale*, ou encore que l'expression de f par rapport à cette base est de la forme

$$f(x, y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i \xi_i \eta_i^*. \tag{20}$$

Par exemple, la base canonique de $\mathbf{R}^4$ est orthogonale par rapport à la forme de Lorentz.

Théorème 6. *Soit f une forme hermitienne sur un espace vectoriel* L *de dimension finie sur* K. *Si* K *est de caractéristique différente de* 2, *il existe une base de* L *orthogonale relativement à f.*

Le Théorème est trivial si $f = 0$, de sorte que nous supposerons $f \neq 0$. Comme il n'y a rien à démontrer si L est de dimension 1, nous raisonnerons par récurrence sur $n = \dim(\mathrm{L})$.

Supposons trouvé un vecteur $a_1 \in \mathrm{L}$ *non isotrope* pour f. Alors (Théorème 5) L est somme directe de la droite engendrée par a_1 et de l'hyperplan L′ orthogonal à celle-ci. Comme $\dim(\mathrm{L}') = n - 1$, l'hypothèse de récurrence montre que L′ admet une base $(a_2, \ldots, a_n)$ orthogonale par rapport à la restriction f' de f à L′. Il est clair alors que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est une base de L orthogonale relativement à L.

Pour achever la démonstration, il reste donc à établir le résultat suivant :

Lemme. *Soit f une forme hermitienne sur un espace vectoriel* L *sur* K, *et supposons la caractéristique de* K *différente de* 2. *Si f n'est pas nulle, il existe dans* L *des vecteurs non isotropes pour f.*

Autrement dit, si $f \neq 0$ et si $f(x, x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{L}$, alors K est de caractéristique 2.

En effet, supposons $f(x, x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{L}$; la relation

$$f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(x, y)^* + f(y, y)$$

montre qu'on a alors

$$f(x, y) + f(x, y)^* = 0$$

quels que soient $x, y \in \mathrm{L}$. Remplaçant x par tx où $t \in \mathrm{K}$, on voit que le scalaire $u = f(x, y)$ vérifie

$$tu + (tu)^* = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathrm{K}.$$

Si $f \neq 0$, on peut choisir x et y de telle sorte que $u \neq 0$; prenant $t = u^{-1}$ il vient alors

$$0 = 1 + 1^* = 1 + 1,$$

et ceci montre que K est de caractéristique 2.

¶ *Remarque* 5. Si K est de caractéristique 2 et si l'involution de K est l'identité, alors toute forme alternée est aussi symétrique, et tout vecteur $x \in \mathrm{L}$ est isotrope par rapport à une telle forme. L'hypothèse que K est de caractéristique $\neq 2$ est donc essentielle pour assurer la validité de l'énoncé précédent, et est bien entendu toujours vérifiée dans la « pratique ».

COROLLAIRE 1. *Soit f une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel* L *de dimension finie n sur* K. *Supposons* K *algébriquement clos et de caractéristique différente de* 2 (par exemple $\mathrm{K} = \mathbf{C}$). *Alors il existe une base de* L *telle que l'expression de f par rapport à cette base soit*

$$f(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_r\eta_r$$

où r est un entier inférieur à n. Pour que f soit non dégénérée il faut et il suffit que $r = n$.

Choisissons en effet une base $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ orthogonale pour f; on peut supposer

$$\begin{aligned} f(b_i, b_i) &= \beta_i \neq 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant r \\ f(b_i, b_i) &= 0 \quad \text{pour } r + 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned}$$

Comme K est algébriquement clos il existe des $\lambda_i \in \mathrm{K}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ vérifiant

$$\lambda_i^2 f(b_i, b_i) = 1 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant r;$$

cela veut dire, puisque f est bilinéaire, que les vecteurs $a_i = \lambda_i b_i$ vérifient

$$f(a_i, a_i) = 1 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant r;$$

la base $(a_1, \ldots, a_r, b_{r+1}, \ldots, b_n)$ satisfait alors aux conditions de l'énoncé.

Si $r < n$, il est clair que b_n est orthogonal à tous les b_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ donc à tout $x \in \mathrm{L}$, et par suite que f est dégénérée; on a donc $r = n$ si f est non dégénérée. Si inversement $r = n$, la matrice de f par rapport à la base qu'on vient de former est la matrice unité, donc est inversible, et f est non dégénérée.

Remarque 6. Plus généralement, pour que la forme (20) soit non dégénérée il faut et il suffit que $\alpha_i \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, car on doit exprimer que la matrice de f par rapport à la base considérée est inversible.

COROLLAIRE 2. *Soit f une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel* réel L *de dimension finie n. Il existe des entiers p et q tels que $p + q \leqslant n$, et une base de* L *telle que l'expression de f par rapport à cette base soit*

$$f(x, y) = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_p\eta_p - \xi_{p+1}\eta_{p+1} - \cdots - \xi_{p+q}\eta_{p+q};$$

f est non dégénérée si et seulement si $p + q = n$.

La démonstration est analogue à celle du Corollaire précédent; on choisit une base (b_i) de L orthogonale pour f; on peut supposer

$$\begin{aligned} f(b_i, b_i) &> 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant p \\ f(b_i, b_i) &< 0 \quad \text{pour } p + 1 \leqslant i \leqslant p + q \\ f(b_i, b_i) &= 0 \quad \text{pour } p + q + 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned}$$

En prenant

$$a_i = \begin{cases} \dfrac{b_i}{\sqrt{f(b_i, b_i)}} & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant p \\ \dfrac{b_i}{\sqrt{-f(b_i, b_i)}} & \text{pour } p + 1 \leqslant i \leqslant p + q \\ b_i & \text{pour } p + q + 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

on trouve une base de L par rapport à laquelle l'expression de f est évidemment celle de l'énoncé. Le fait que f soit non dégénérée si et seulement si $n = p + q$ résulte de la *Remarque* 6.

COROLLAIRE 3. *Soit f une forme hermitienne sur un espace vectoriel* complexe L *de dimension finie n. Il existe des entiers p et q tels que $p + q \leqslant n$, et une base de* L *telle que l'expression de f par rapport à cette base soit*

$$f(x, y) = \xi_1\bar{\eta}_1 + \cdots + \xi_p\bar{\eta}_p - \xi_{p+1}\bar{\eta}_{p+1} - \cdots - \xi_{p+q}\bar{\eta}_{p+q};$$

f est non dégénérée si et seulement si $n = p + q$.

La démonstration est identique à celle du Corollaire précédent, compte tenu du fait que $f(x, x)$ est réel quel que soit $x \in \mathrm{L}$ comme on l'a vu au n° 1, relation (4).

On peut démontrer (*Loi d'inertie*) que les entiers p et q figurant dans ces énoncés ne dépendent que de f, et non du choix de la base; cf. *Exercice* 24.

6. *Bases orthonormales*

Soit f une forme hermitienne sur un espace vectoriel L de dimension finie sur K. On dit qu'une base (a_i) de L est **orthonormale** par rapport à f si l'on a

$$f(a_i, a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

autrement dit si la matrice de f par rapport à la base en question est la matrice unité, ou enfin si l'expression de f par rapport à cette base est

$$f(x, y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi_i\eta_i^*$$

où $n = \dim(\mathrm{L})$.

L'existence d'une base orthonormale exige évidemment que f soit *non dégénérée*, et le Corollaire 1 du Théorème 6 montre que cette condition est aussi *suffisante dans le cas orthogonal complexe* par exemple (plus généralement, si K est algébriquement clos, de caractéristique $\neq 2$, et si l'involution choisie sur K est l'identité).

Plaçons-nous maintenant dans le cas *orthogonal réel* ou dans le cas *hermitien complexe*. Si f admet une base orthonormale, on a pour tout $x \in L$

$$f(x, x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi_i \xi_i^* = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|^2$$

et par suite

$$f(x, x) > 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

Une forme satisfaisant à cette condition (dans le cas orthogonal réel ou hermitien complexe — on notera qu'alors $f(x, x)$ est toujours réel) est dite **définie positive.** Si inversement f est définie positive, la démonstration du Corollaire 2 montre qu'on a $p = n$ et par suite que L admet une base orthonormale. Donc :

THÉORÈME 7. *Soient* L *un espace vectoriel réel (resp. complexe) de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique (resp. sesquilinéaire hermitienne) sur* L. *Pour que* L *admette une base orthonormale relativement à f, il faut et il suffit que f soit définie positive.*

Exemple 12. La forme $(x|y)$ de l'*Exemple* 7 est évidemment définie positive; une base orthonormale pour cette forme n'est autre qu'un système de trois vecteurs orthogonaux et de longueur 1; une telle base s'appelle aussi un **système de coordonnées rectangulaires** dans l'espace usuel.

Remarque 7. Si (a_i) est une base orthonormale pour f, et si

$$x = \sum \xi_i a_i \in L,$$

alors les coordonnées de x sont données par la relation

$$\xi_i = f(x, a_i).$$

On a en effet

$$f(x, a_i) = \sum \xi_j f(a_j, a_i) = \xi_i f(a_i, a_i) = \xi_i.$$

Remarque 8. Soient L un espace vectoriel réel (resp. complexe) de dimension n et f une forme bilinéaire symétrique (resp. sesquilinéaire hermitienne) sur L; il existe donc une base de L par rapport à laquelle l'expression de f est

$$f(x, y) = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \cdots + \xi_p \bar{\eta}_p - \xi_{p+1} \overline{\eta_{p+1}} - \cdots - \xi_{p+q} \overline{\eta_{p+q}}$$

avec des entiers $p, q \geqslant 0$ tels que $p + q \leqslant n$.

Pour que f soit *définie positive* il faut et il suffit que $p = n$, $q = 0$. L'autre cas extrême, celui où $p = 0$, $q = n$, est celui des formes **définies négatives,**, i.e. telles que l'on ait

$$f(x, x) < 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

On dit plus généralement que f est **positive** (resp. **négative** si l'on a $f(x, x) \geqslant 0$ (resp. $f(x, x) \leqslant 0$) pour tout x; cela signifie évidemment qu'on a $q = 0$ (resp. $p = 0$), en sorte que les formes définies positives (resp. définies négatives) sont les formes positives (resp. négatives) *non dégénérées.*

Une forme qui n'est ni positive ni négative est dite **indéfinie;** cela signifie donc qu'on a $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, ou encore qu'on peut trouver des vecteurs x et y tels que

$$f(x, x) > 0, \qquad f(y, y) < 0$$

C'est par exemple le cas de la forme de Lorentz.

7. *Automorphismes d'une forme hermitienne*

Soient L un espace vectoriel sur K et f une forme hermitienne non dégénérée sur L. On appelle **automorphisme de** f tout automorphisme u de l'espace vectoriel L tel que

$$f(u(x), u(y)) = f(x, y) \quad \text{quels que soient } x, y \in L.$$

Comme on a

$$f(u(x), u(y)) = f(x, u^*(u(y)))$$

où u^* est l'adjoint de u par rapport à f (n° 3), on voit que les automorphismes de f ne sont autres que les automorphismes de L vérifiant la relation

$$u^* \circ u = j_L,$$

application identique. De là et des relations

$$(j_L)^* = j_L, \qquad (v \circ u)^* = u^* \circ v^*, \qquad (u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$$

on déduit aussitôt que les automorphismes de f forment un *sous-groupe* du groupe GL(L) des automorphismes de L; ce sous-groupe se note

$$GL(f)$$

et s'appelle le **groupe des automorphismes** de f.

Que u soit ou non un automorphisme de f, la fonction

$$g(x, y) = f(u(x), u(y))$$

est une forme hermitienne sur L. Pour exprimer que u est un automorphisme de f, i.e. que $g = f$, il suffit d'écrire que les coefficients de f et g par rapport à une base donnée $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de L sont les mêmes (on suppose bien entendu L de dimension finie). Par suite les automorphismes de f sont caractérisés par le fait que l'on a

$$f(u(a_i), u(a_j)) = f(a_i, a_j)$$

quels que soient i et j. En particulier, *s'il existe une base de* L *orthonormale relativement à f, pour que u soit un automorphisme de f il faut et il suffit que u la transforme en une autre base orthonormale relativement à f.*

Lorsque l'involution de K est l'identité, et que l'on prend pour f la forme bilinéaire

$$f(x, y) = \sum \xi_i \eta_i$$

sur K^n, le groupe $GL(f)$ se note

$$O(n,\ K)$$

et s'appelle le **groupe orthogonal à n variables sur le corps** K; dans ce cas, si A est la matrice d'un automorphisme u de L, la matrice de u^* n'est autre comme on l'a vu au n° 3 que ${}^tA$, transposée de A; donc $O(n, K)$ *est le sous-groupe de* $GL(n, K)$ *formé des matrices* $A \in M_n(K)$ *telles que*

$${}^tA.A = 1_n;$$

une telle matrice est dite **orthogonale.** On notera que la relation précédente implique

$$1 = \text{dét}\,({}^tA)\ \text{dét}\,(A) = \text{dét}\,(A)^2$$

et par suite

$$\text{dét}\,(A) = +1 \quad \text{ou} \quad -1;$$

les matrices orthogonales de déterminant $+1$ forment un sous-groupe de $O(n, K)$, qu'on note

$$O^+(n,\ K) \quad \text{ou} \quad SO(n,\ K),$$

et qu'on appelle le **groupe des rotations à n variables sur le corps K.**

Si $K = \mathbf{R}$ (resp. $K = \mathbf{C}$) on parle du **groupe orthogonal réel** (resp. **complexe**) et du **groupe des rotations réel** (resp. **complexe**).

Dans le cas d'un corps K et d'une involution quelconques, et où l'on prend pour f la forme hermitienne

$$f(x, y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi_i \eta_i^*$$

sur K^n, le groupe $GL(f)$ se note

$$U(n,\ K)$$

et s'appelle le **groupe unitaire à n variables sur le corps** K relativement à l'involution considérée sur K; c'est donc aussi le groupe des matrices $A \in M_n(K)$ telles que

$$A^*A = 1_n$$

(une telle matrice est dite **unitaire** relativement à l'involution considérée). En particulier, pour $K = \mathbf{C}$, l'involution étant $\lambda \to \bar{\lambda}$, on obtient le **groupe unitaire complexe à n variables**; il est formé des matrices complexes **unitaires,** i.e. telles que

$${}^t\bar{A}.A = 1_n.$$

Exemple 13. Prenons pour L l'espace usuel et pour f la forme $(x|y)$ de l'*Exemple* 7; alors le groupe des rotations correspondant est formé des rotations (au sens usuel) autour de l'origine, i.e. des déplacements laissant fixe le point O.

Exemple 14. On appelle **groupe de Lorentz** le groupe des automorphismes de la forme de Lorentz — ou, plus précisément, le sous-groupe du groupe des automorphismes de la forme de Lorentz f formé par ceux de ces automorphismes

qui sont de déterminant $+1$ et qui appliquent dans lui-même l'ensemble des vecteurs $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ tels que $t > 0$. Il joue un rôle fondamental en Physique.

8. *Automorphismes d'une forme hermitienne positive : réduction à la forme diagonale*

Nous allons démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 8. *Soient* L *un espace vectoriel complexe de dimension finie, f une forme hermitienne définie positive sur* L, *et u un automorphisme de f. Il existe alors des vecteurs propres de u formant une base orthonormale de* L *par rapport à f.*

Désignant d'une manière générale par u^* l'adjoint relativement à f d'un endomorphisme u de L, les automorphismes de f sont caractérisés par la relation

$$u^* = u^{-1}$$

et par suite satisfont à la condition

$$u^* \circ u = u \circ u^*;$$

un endomorphisme u de L qui la vérifie est dit **normal** relativement à f. Ceci dit, le Théorème 8 est évidemment un cas particulier du suivant :

THÉORÈME 9. *Soient* L *un espace vectoriel complexe de dimension finie, f une forme hermitienne définie positive sur* L, *et u un endomorphisme de* L *normal relativement à f. Il existe alors une base de* L *formée de vecteurs propres de u et orthonormale par rapport à f.*

La démonstration de ce Théorème repose sur plusieurs lemmes.

LEMME 1. *Supposons u normal; alors, pour tout $x \in$ L, la relation $u(x) = 0$ implique $u^*(x) = 0$* autrement dit on a $\text{Ker}\,(u) = \text{Ker}\,(u^*)$.

Notons d'abord que, quels que soient $x, y \in L$, on a

$$f(u(x), u(y)) = f(u^* \circ u(x), y) = f(u \circ u^*(x), y) = f(u^*(x), u^*(y));$$

par suite

$$f(u(x), u(x)) = f(u^*(x), u^*(x));$$

si $u(x) = 0$, le second membre est donc nul, ce qui montre que $u^*(x) = 0$ puisque f est définie positive.

LEMME 2. *Supposons u normal et soit λ une valeur propre de u; alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de u^*, et pour $x \in$ L la relation $u(x) = \lambda x$ équivaut à la relation $u^*(x) = \bar{\lambda}x$.*

Posons $v = u - \lambda . j_L$; comme λ commute à tout endomorphisme de L, un calcul trivial montre que v est normal comme u; comme $v^* = u^* - \bar{\lambda} . j_L$, le Lemme 2 s'obtient alors en appliquant le Lemme 1 à v.

Dans ce qui suit on désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les diverses valeurs propres de u, et par L_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ le sous-espace de L formé des solutions de $u(x) = \lambda_i x$.

LEMME 3. *Supposons u normal; alors les sous-espaces propres $L_1, \ldots, L_r$ sont deux à deux orthogonaux pour f.*

Soient en effet $x \in L_i$ et $y \in L_j$; on a, d'après le lemme 2,

$$\lambda_i . f(x, y) = f(u(x), y) = f(x, u^*(y)) = f(x, \lambda_j^* y) = \lambda_j f(x, y),$$

et puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$ on voit que dans ce cas on trouve $f(x, y) = 0$, d'où le Lemme.

LEMME 4. *Soit M un sous-espace de L stable par u et par u^*; alors l'orthogonal $M^\perp$ de M relativement à f est aussi stable par u et u^*.*

Il suffit de montrer que, pour $x \in L$, la relation $f(x, y) = 0$ pour tout $y \in M$ implique la même propriété pour $u(x)$ et $u^*(x)$; or on a $f(u(x), y) = f(x, u^*(y))$, et comme par hypothèse la relation $y \in M$ implique $u^*(y) \in M$, le premier point est évident; le second se démontre de même.

Pour achever la démonstration du Théorème 9, considérons le sous-espace

$$M = L_1 + \cdots + L_r$$

de L engendré par les vecteurs propres de u. D'après le lemme 2, il est stable par u et u^*; il en est donc de même de $M^\perp$; si l'on avait $M^\perp \neq 0$, l'endomorphisme u aurait au moins un vecteur propre dans $M^\perp$, et l'on aurait donc

$$M \cap M^\perp \neq 0$$

contrairement au fait que f est définie positive; on a donc $M^\perp = \{0\}$, et comme L est somme directe de M et de $M^\perp$ (Corollaire du Théorème 5) il vient

$$L = M.$$

Ainsi L est somme des L_i, et même somme *directe* d'après le Théorème 4 du § 34.

Ceci fait, et en vertu du Lemme 3, il suffit, pour construire une base orthonormale de L formée de valeurs propres de u, de choisir dans chaque L_i une base orthonormale pour la restriction de f à L_i ce qui est possible (Théorème 7) en vertu du fait évident que la restriction d'une forme définie positive à un sous-espace est encore définie positive. Ceci achève la démonstration des Théorèmes 8 et 9.

Lorsque u est un *automorphisme* de f, le lemme 2 montre que $u(x) = \lambda x$ implique

$$u^{-1}(x) = \bar{\lambda} x,$$

d'où résulte que chaque valeur propre λ de u vérifie

$$\lambda^{-1} = \bar{\lambda},$$

i.e. est un *nombre complexe de module égal à* 1.

Un autre cas particulier important est celui d'un endomorphisme u **autoadjoint** pour f, i.e. tel que

$$u^* = u;$$

le lemme 2 montre alors que

$$\lambda = \bar{\lambda},$$

autrement dit que *toute valeur propre de u est réelle.*

Les résultats précédents peuvent évidemment s'interpréter en langage de matrices. Prenons $L = \mathbf{C}^n$ et

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i \bar{\eta}_i,$$

ce qui ne restreint d'ailleurs pas la généralité en vertu du Théorème 7. Soit A la matrice de u par rapport à la base canonique, et soit U la matrice de passage de la base canonique à une base orthonormale formée de vecteurs propres de u; la matrice de u par rapport à celle-ci est alors $U^{-1}AU$ (§ 15, Corollaire du Théorème 2), en sorte que

$$A = UDU^{-1}$$

où D est diagonale; mais comme U fait passer de la base canonique (qui est *orthonormale* par rapport à la forme considérée) à une autre base *orthonormale*, la matrice U est *unitaire* comme on l'a vu au n° 7. Donc :

COROLLAIRE DU THÉORÈME 9. *Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes telle que*

$$A^*A = AA^*.$$

Il existe alors une matrice unitaire complexe U d'ordre n et une matrice diagonale D d'ordre n telles que l'on ait

$$A = UDU^{-1};$$

pour que A soit unitaire (resp. hermitienne) il faut et il suffit que les termes diagonaux de D soient de module un (resp. réels).

En ce qui concerne la dernière assertion, on observe que de $A = UDU^{-1}$ résulte

$$A^* = (U^{-1})^*D^*U^* = UD^*U^{-1} = U\bar{D}U^{-1}$$

où $\bar{D}$ est la matrice imaginaire conjuguée de D; pour que A soit hermitienne il est donc nécessaire et suffisant que

$$UDU^{-1} = U\bar{D}U^{-1}$$

i.e. que $D = \bar{D}$, i.e. que D soit réelle; et pour que A soit unitaire, il est nécessaire et suffisant que

$$1_n = A^*A = U\bar{D}U^{-1}UDU^{-1} = U\bar{D}DU^{-1}$$

i.e. que $\bar{D}.D = 1_n$, ce qui signifie évidemment que les termes diagonaux de D sont de valeur absolue égale à 1.

Une matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $A^*A = AA^*$ est dite **normale**; une telle matrice est donc diagonalisable.

Le Corollaire ci-dessus montre naturellement que les valeurs propres d'une matrice *hermitienne* (donc aussi d'une matrice *symétrique réelle*) sont toutes *réelles*. Ce résultat implique le suivant :

Théorème 10. *Soient* L *un espace vectoriel réel de dimension finie, f une forme bilinéaire symétrie définie positive sur* L, *et u un endomorphisme de* L *autoadjoint pour f. Il existe alors une base de* L *orthonormale pour f et composée de vecteurs propres de u.*

On procède comme dans la démonstration du Théorème 9; les lemmes 1 et 2 sont ici triviaux puisque $u^* = u$, et les lemmes 3 et 4 sont encore valables avec les mêmes démonstrations. Formant comme plus haut le sous-espace M de L engendré par les vecteurs propres de u, tout revient à montrer que M = L, i.e. (Corollaire du Théorème 5) que $M^{\perp} = 0$, et pour cela tout revient, comme plus haut, à montrer que *tout sous-espace* N *de* L *stable par u et non nul contient au moins un vecteur propre de u.* En remplaçant f par sa restriction à N (laquelle est encore symétrique et définie positive), et u par sa restriction à N (laquelle est encore autoadjointe relativement à la restriction de f à N), on est finalement ramené à montrer que, dans les hypothèses de l'énoncé, u possède au moins un vecteur propre dans L, i.e. admet au moins une valeur propre *réelle*.

Or soit (a_i) une base de L orthonormale pour f (Théorème 7) ; la matrice A de u par rapport à cette base est *symétrique réelle* comme il résulte des calculs du nº 3, et toutes ses valeurs propres sont donc réelles (Corollaire du Théorème 9). Comme les valeurs propres de u sont aussi celles de A, la démonstration est achevée.

Corollaire. *Soit* A *une matrice symétrique réelle; il existe une matrice orthogonale réelle* U *et une matrice diagonale réelle* D *telles que*

$$A = UDU^{-1}.$$

Il suffit pour le voir de considérer sur $\mathbf{R}^n$ la forme bilinéaire

$$f(x, y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi_i \eta_i$$

et l'endomorphisme u admettant A pour matrice par rapport à la base canonique; celui-ci est autoadjoint pour f, et on peut alors prendre pour U la matrice de passage de la base canonique à une base de $\mathbf{R}^n$ composée de vecteurs propres de u et orthonormale par rapport à f.

Remarque 9. Dans les ouvrages classiques de Mathématiques Spéciales (sic), le fait qu'une matrice symétrique réelle A d'ordre $n = 3$ ait toutes ses valeurs propres réelles est fréquemment démontré en invoquant le fait que ces valeurs propres sont racines d'une équation algébrique à coefficients réels de degré 3, et qu'une telle équation (plus généralement, une équation algébrique de degré *impair* sur **R**) admet toujours au moins une racine réelle.

L'inconvénient majeur de cette démonstration est évidemment qu'on ne peut pas l'étendre aux matrices symétriques réelles d'ordre 4 (ni même, à vrai dire, à celles d'ordre 2 ...), attendu qu'une équation algébrique réelle de degré pair peut fort bien ne posséder aucune racine réelle.

Une démonstration fort élémentaire du résultat général s'obtient comme suit. Soit (α_{ij}) une matrice symétrique réelle (ou même hermitienne complexe) et soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre de celle-ci; alors le système d'équations linéaires et homogènes

$$\sum_i \alpha_{ij} \xi_i = \lambda \xi_j$$

possède dans $\mathbf{C}^n$ une solution *non triviale*; pour cette solution on a

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j = \lambda \sum_j \xi_j \bar{\xi}_j;$$

or le premier membre est réel puisque (α_{ij}) est hermitienne, et d'autre part l'expression

$$\sum \xi_j \bar{\xi}_j = \sum |\xi_j|^2$$

est réelle et même > 0 puisque les ξ_j ne sont pas tous nuls; la valeur propre λ est donc nécessairement réelle.

Le raisonnement « géométrique » correspondant consiste à écrire, avec les notations du Théorème 9, que

$$\lambda . f(x, x) = f(\lambda x, x) = f(u(x), x) = f(x, u(x)) = f(x, \lambda x) = \bar{\lambda} . f(x, x)$$

et à observer que $f(x, x) \neq 0$ puisque f est définie positive, d'où résulte que

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

9. *Vecteurs isotropes et formes indéfinies*

Dans le cas orthogonal réel ou hermitien complexe, une forme hermitienne f sur un espace vectoriel L est dite **définie** si elle soit définie positive, soit définie négative, autrement dit si, pour $x \in L$, l'expression $f(x, x)$ garde un signe constant et ne devient nulle qu'en $x = 0$.

Une forme définie ne possède évidemment aucun vecteur isotrope non nul; en fait, cette propriété caractérise même les formes définies; autrement dit, *pour que f soit définie il faut et il suffit que la relation* $f(x, x) = 0$ *implique* $x = 0$.

Il revient au même de montrer qu'une forme f non définie (ce qui ne veut pas dire indéfinie...) admet des vecteurs isotropes non nuls. Or puisque f n'est pas définie, il existe des vecteurs non nuls $a, b \in L$ tels que l'on ait

$$f(a, a) \geqslant 0, \qquad f(b, b) \leqslant 0,$$

et comme il n'y a rien à démontrer si a ou b est isotrope on peut même supposer que

$$f(a, a) > 0, \qquad f(b, b) < 0.$$

On va alors montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $x = a\lambda + b$ soit isotrope et non nul.

Le dernier point est clair, car si $b + \lambda a = 0$ alors

$$f(b, b) = f(-\lambda a, -\lambda a) = |\lambda|^2 . f(a, a)$$

a le même signe que $f(a, a)$, contrairement à l'hypothèse. Tout revient donc à prouver l'existence d'un λ tel que

$$0 = f(a\lambda + b, a\lambda + b) = f(a\lambda, a\lambda) + f(a\lambda, b) + f(b, a\lambda) + f(b, b) = \lambda\bar{\lambda}u + v\lambda + \bar{v}\bar{\lambda} + w$$

où l'on a posé

$$u = f(a, a), \quad v = f(a, b), \quad w = f(b, b).$$

Or on a visiblement (cf. la réduction d'un trinôme du second degré à une somme de carrés)

$$u\lambda\bar{\lambda} + v\lambda + \bar{v}\bar{\lambda} + w = u\left[\left(\lambda + \frac{\bar{v}}{u}\right)\left(\bar{\lambda} + \frac{v}{u}\right) - \frac{\bar{v}v - uw}{u^2}\right] = u\left[\left|\lambda + \frac{\bar{v}}{u}\right|^2 - \frac{|v|^2 - uw}{u^2}\right];$$

pour que cette équation en λ possède une solution dans le corps de base K (qui est **R** dans le cas orthogonal réel, et **C** dans le cas orthogonal complexe) il faut et il suffit que

$$|v|^2 - uw \geqslant 0;$$

comme $u = f(a, a)$ est positif et $w = f(b, b)$ négatif, cette condition est vérifiée, et notre assertion est établie.

Remarque 10. On pourrait aussi, dans la démonstration précédente, remplacer L par le sous-espace engendré par a et b, et appliquer le Corollaire 2 ou le Corollaire 3 du Théorème 6 (avec les notations de ces corollaires, il est *évident* qu'il existe des vecteurs isotropes non nuls en dehors des deux cas $p = n$, $q = 0$ et $p = 0$, $q = n$, lesquels caractérisent justement les formes définies).

10. *L'inégalité de Cauchy-Schwarz*

Pour terminer ce §, nous allons établir un résultat fort utile en Analyse, malgré sa simplicité :

Théorème 11. *Soient L un espace vectoriel réel (resp. complexe) et f une forme bilinéaire symétrique (resp. sesquilinéaire hermitienne) sur L. On suppose*

$$f(x, x) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{L}.$$

On a alors

$$|f(x, y)|^2 \leqslant f(x, x) f(y, y)$$

quels que soient $x, y \in$ L.

En effet, pour tout scalaire λ, l'expression

$$(21) \qquad f(x\lambda + y, x\lambda + y) = u\lambda\bar{\lambda} + v\lambda + \bar{v}\bar{\lambda} + w,$$

où

$$u = f(x, x), \quad v = f(x, y), \quad w = f(y, y),$$

est positive; de là et du fait que u et w sont positifs on doit déduire que

$$|v|^2 - uw \leqslant 0.$$

Si $u = 0$, il est clair que l'expression (21) ne peut être constamment positive que si $v = 0$ (car si $v \neq 0$, on peut toujours choisir λ de façon que $v\lambda$ soit un scalaire arbitraire), en sorte que l'inégalité à établir est évidente dans ce cas.

Si $u \neq 0$, on peut par exemple exprimer que (21) est positive pour

$$\lambda = -\bar{v}/u;$$

la valeur de (21) pour ce choix de λ est

$$-\frac{|v|^2 - uw}{u},$$

et comme $u > 0$ le fait que ce résultat soit positif établit évidemment le Théorème.

Corollaire 1. *Supposons $f(x, x) \geqslant 0$ pour tout x. Pour que f soit non dégénérée il faut et il suffit que f soit définie positive.*

En effet le Théorème 11 montre que la relation $f(x, x) = 0$ implique $f(x, y) = 0$ pour tout $y \in$ L, donc $x = 0$ si f est non dégénérée.

Exemple 13. Prenons L $= \mathbf{C}^n$ et

$$f(x, y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi_i \bar{\eta}_i;$$

on trouve alors l'inégalité

$$|\xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n| \leqslant \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2} . \sqrt{|\eta_1|^2 + \cdots + |\eta_n|^2}$$

valable quels que soient les nombres complexes ξ_i, η_i.

Exemple 14. Prenons la forme

$$f(x, y) = \int_0^1 x(t) \overline{y(t)} \, dt$$

de l'*Exemple* 9; on trouve alors l'inégalité

$$\left| \int_0^1 x(t) \overline{y(t)} \, dt \right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 |x(t)|^2 dt} . \sqrt{\int_0^1 |y(t)|^2 dt},$$

fréquemment utilisée en Analyse.

Remarque 11. Dans le cas du produit scalaire $(x|y)$ dans l'espace usuel, le Théorème 11 signifie qu'en valeur absolue le produit scalaire de x et y est inférieur ou égal au produit des longueurs de x et y; l'explication géométrique de ce fait est évidente, puisque $(x|y)$ est égal au produit des longueurs de x et y et du cosinus de l'angle de x et y : or, en valeur absolue, le cosinus d'un angle est toujours inférieur ou égal à 1.

COROLLAIRE 2. *Supposons $f(x, x) \geqslant 0$ pour tout x, et posons*

$$\|x\| = \sqrt{f(x, x)};$$

on a alors

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

quels que soient $x, y \in$ L.

On a en effet

$$\|x+y\|^2 = f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + \overline{f(x, y)} + f(y, y)$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 . \mathrm{Re}(f(x, y));$$

comme l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit encore

$$|f(x, y)| \leqslant \|x\| . \|y\|,$$

il vient *à fortiori*

$$\mathrm{Re}(f(x, y)) \leqslant \|x\| . \|y\|$$

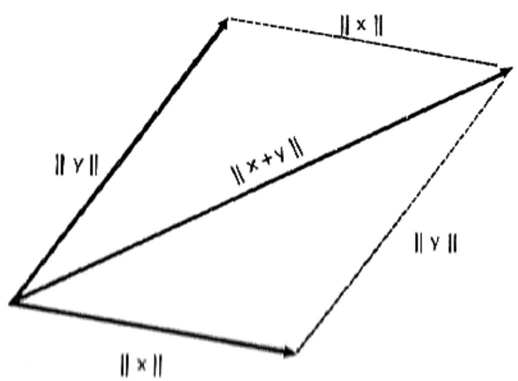
et par suite

$$\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| . \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

ce qui conduit aussitôt au résultat cherché.

Dans le cas du produit scalaire usuel $(x|y)$, il est clair que $\|x\|$ n'est autre que la *longueur* du vecteur x. Le Corollaire 2 démontre donc le résultat suivant :

COROLLAIRE 3. *Dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres.*



EXERCICES

Il est parfaitement utopique d'espérer apprendre des Mathématiques, si élémentaires ou si supérieures soient-elles, sans résoudre des Exercices.

Les Exercices qu'on trouvera dans ce livre sont de trois sortes. Certains sont des illustrations pratiques ou même numériques des théories exposées dans le texte; le lecteur débutant ne pourra pas acquérir la technique du calcul sans résoudre une partie appréciable des Exercices de ce genre. D'autres apportent au texte des compléments théoriques élémentaires; en les étudiant, le lecteur s'habituera à manipuler le langage et les modes de raisonnements utilisés dans le texte; ceux de ces Exercices qui ne sont pas *très* faciles sont précédés d'un signe ¶. Enfin, la dernière catégorie est constituée par des Exercices qui apportent au texte des compléments importants et difficiles; ils sont destinés uniquement aux étudiants déjà avancés qui s'intéressent vraiment aux Mathématiques; ces Exercices sont précédés de deux ou même trois signes ¶.

Nous ne saurions trop insister enfin sur le fait que résoudre un Exercice ne consiste pas seulement à se convaincre, à l'aide d'un « brouillon » fait à la hâte, du fait qu'on en a à peu près compris la solution; si cette méthode est admissible pour les Exercices de calcul numérique, il faut par contre s'efforcer de *rédiger intégralement* les Exercices plus théoriques, où l'on doit construire de véritables démonstrations. De cette façon, et uniquement de cette façon, l'étudiant parviendra à acquérir un langage clair et correct, et à utiliser les termes techniques dans leur sens propre, ce qui, en Mathématiques, est le signe le plus certain de la compréhension d'un sujet.

§ 36

(Les *Exercices* **1** à **21** sont relatifs à des propriétés valables sur un corps de base K quelconque, à ceci près que le lecteur devra parfois exclure les corps de caractéristique 2, ce que nous n'avons pas mentionné explicitement dans les énoncés en question. Les *Exercices* **22** à **51** supposent par contre que le corps de base est **R** ou **C**, ce qu'on a indiqué dans les énoncés. Il va de soi par ailleurs que les énoncés valables sur un corps de base quelconque, notamment ceux des *Exercices* **1**, **2**, **9** à **21**, sont tout aussi utiles lorsque le corps de base est **R** ou **C**.)

1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K; on appelle **forme quadratique** sur V toute fonction polynomiale homogène de degré 2 sur V (§§ 27, 28, *Exercice* 17); i.e. toute application q de V dans K donnée par une relation de la forme

$$q(x) = \sum a_{ij} x_i x_j$$

où les a_{ij} sont des éléments donnés de K, et où les $x_i \in \mathrm{K}$ sont les coordonnées du vecteur $x \in \mathrm{V}$ par rapport à une base de V.

a) Montrer que si $f(x, y)$ est une forme bilinéaire symétrique sur V, la fonction

$$q(x) = f(x, x)$$

est une forme quadratique sur V (dite **associée** à f).

b) On suppose K de caractéristique $\neq 2$. Montrer que la donnée de q permet de reconstituer f, à l'aide de la formule

$$f(x, y) = \frac{q(x + y) - q(x - y)}{4}.$$

c) Inversement, si q est une forme quadratique sur V, la formule précédente définit une forme bilinéaire symétrique f sur V, et on a $q(x) = f(x, x)$.

d) Pour qu'une base de V soit orthogonale par rapport à f, il faut et il suffit que l'expression de q par rapport à cette base soit de la forme

$$q(x) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \cdots + c_r x_r^2$$

(on dit alors que q est **réduite à une somme de carrés**).

[Les résultats précédents montrent que l'étude des formes bilinéaires symétriques est équivalente, en caractéristique $\neq 2$, à celle des formes quadratiques. On utilisera souvent le langage des formes quadratiques dans les *Exercices* suivants.]

2. Soit K un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$. On considère une forme quadratique

$$q(x) = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

sur K^n.

a) On suppose $a_{11} \neq 0$; montrer qu'il existe alors une forme linéaire f_1 sur K^n telle que l'on ait

$$q(x) = a_{11} \cdot f_1(x)^2 + q_1(x)$$

où la forme quadratique q_1 ne dépend plus de la variable x_1 (écrire $q(x)$ comme un trinôme du second degré en x_1, dont les coefficients dépendent de $x_2, \ldots, x_n$, et mettre ce trinôme sous la forme canonique des Lycées et Collèges).

b) On suppose $a_{11} = 0$ mais $a_{12} \neq 0$, et on choisit comme nouvelles coordonnées dans K^n les formes linéaires

$$y_1 = x_1 + x_2$$
$$y_2 = x_1 - x_2$$
$$y_i = x_i \qquad (3 \leqslant i \leqslant n).$$

Montrer qu'on a

$$q(x) = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} b_{ij} y_i y_j$$

avec $b_{11} \neq 0$, et par suite qu'on peut, dans le nouveau système de coordonnées, appliquer la question *a*).

c) Déduire de ce qui précède une méthode pratique pour réduire une forme quadratique à une somme de carrés *Exercice* [1, *d*)], ou pour construire une base orthogonale pour une forme bilinéaire symétrique donnée.

Dans les *Exercices* 3 à 8, on demande de mettre la forme quadratique donnée sous forme d'une somme de carrés en utilisant la méthode indiquée dans l'*Exercice* 2 ; on prendra **Q** pour corps de base, et on indiquera dans chaque cas le changement de coordonnées qui conduit au résultat cherché

3. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

4. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$

5. $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3.$

6. $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$

7. $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4.$

8. $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3.$

9. Soit f une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps K.

a) Soit

$$A = (f(a_i, a_j))_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$$

la matrice de f par rapport à une base (a_i) de E. On identifie chaque vecteur $x \in E$ à la matrice colonne formée avec les composantes de x par rapport à la base en question. Montrer qu'on a

alors

$$f(x, y) = {}^t y . A . x$$

quels que soient $x, y \in E$.

b) Soit B la matrice de f par rapport à une autre base (b_i) de E. On note P la matrice de passage de la base (a_i) à la base (b_i). Montrer que

$$B = {}^t PAP.$$

c) Déduire de là que, pour toute matrice symétrique $S \in M_n(K)$, il existe une matrice diagonale D et une matrice $P \in GL(n, K)$ telles que

$$S = {}^t PDP,$$

et réciproquement ; montrer de plus que, si K est algébriquement clos, on peut supposer tous les coefficients de D égaux à 1 ou 0, et que si $K = \mathbf{R}$ on peut supposer qu'ils sont égaux à 0, + 1 ou — 1.

10. Pour toute matrice symétrique S d'ordre n, à coefficients dans un corps algébriquement clos K, il existe une matrice $X \in M_n(K)$ telle que

$$S = {}^t XX,$$

et réciproquement.

11. Soit f une forme hermitienne sur un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps commutatif K (muni d'une involution, cf. l'introduction du § 36).

a) Soit $A = (f(a_i, a_j))_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ la matrice de f par rapport à une base (a_i) de E. Montrer que, si l'on identifie chaque $x \in E$ à la matrice colonne formée avec les composantes de x par rapport à la base en question, on a

$$f(x, y) = y^* . A . x$$

quels que soient $x, y \in E$.

b) Soit u une endomorphisme de E, dont la matrice par rapport à la base (a_i) est U ; montrer que la matrice par rapport à cette base de l'adjoint de u relativement à f (on suppose maintenant f non dégénérée) est

$$A^{-1}U^*A.$$

c) En utilisant l'existence pour toute forme hermitienne d'une base orthogonale, montrer que, pour toute matrice hermitienne $A \in M_n(K)$, il existe une matrice hermitienne diagonale $D \in M_n(K)$ et une matrice inversible $P \in GL(n, K)$ telles que

$$A = P^*DP.$$

12. Pour que le produit de deux matrices hermitiennes soit une matrice hermitienne, il faut et il suffit que les deux matrices données commutent.

13. Soient E un espace vectoriel complexe de dimension finie et f une forme hermitienne définie positive sur E.

a) Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel M de E, l'opérateur de projection orthogonale p_M est autoadjoint relativement à f.

b) Inversement, pour tout endomorphisme p de E tel que

$$p = p^* = p^2,$$

il existe un sous-espace vectoriel M tel que $p = p_M$.

c) Soient M et N deux sous-espaces vectoriels de E ; soit M′ (resp. N′) le sous-espace formé des $x \in \mathrm{M}$ (resp. $x \in \mathrm{N}$) orthogonaux à $\mathrm{M} \cap \mathrm{N}$. Montrer que, pour que p_{M} et p_{N} commutent, il faut et il suffit que M′ et N′ soient orthogonaux (la situation généralise alors celle de deux plans perpendiculaires dans l'espace usuel). Si cette condition est réalisée, on a

$$p_{\mathrm{M}\cap\mathrm{N}} = p_{\mathrm{M}} \circ p_{\mathrm{N}},$$
$$p_{\mathrm{M}+\mathrm{N}} = p_{\mathrm{M}} + p_{\mathrm{N}} - p_{\mathrm{M}} \circ p_{\mathrm{N}}.$$

d) Généralisation à un corps de base quelconque ? (Considérer des sous-espaces non isotropes).

14. Soit f une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps commutatif K. Soient $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de E et U le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes : (*i*) U est non isotrope et les a_i forment une base de U ; (*ii*) le déterminant des $f(a_i, a_j)$ n'est pas nul. Corollaire : si f ne possède aucun vecteur isotrope (exemple : K = **R** et f définie positive), pour que des vecteurs $a_1, \ldots, a_r$ soient linéairement indépendants il faut et il suffit que le déterminant des $f(a_i, a_j)$ soit non nul.

¶ **15.** Soit

$$\mathrm{S} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}, \qquad a_{ij} = a_{ji},$$

une matrice symétrique à coefficients dans un corps commutatif K. On suppose que les **mineurs principaux**

$$\mathrm{D}_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} \qquad (1 \leqslant p \leqslant n)$$

de S ne sont pas nuls. Montrer qu'il existe alors une matrice diagonale

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_n \end{pmatrix}$$

et une matrice triangulaire de la forme

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ t_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \ldots & t_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

à coefficients dans K, telles que

$$\mathrm{S} = \mathrm{TD}\,{}^t\mathrm{T} ;$$

que D et T sont entièrement déterminées par S ; et que les termes diagonaux de D sont donnés par les relations

$$c_1 = \mathrm{D}_1, \ c_2 = \mathrm{D}_2/\mathrm{D}_1, \ \ldots, \ c_n = \mathrm{D}_n/\mathrm{D}_{n-1}.$$

Corollaire (Jacobi) : soit

$$q(x) = \Sigma a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

une forme quadratique telle que les mineurs principaux de la matrice (a_{ij}) ne soient pas nuls ; alors on peut réduire q à une somme de carrés à l'aide d'un changement *triangulaire* de coordonnées.

(Pour établir l'existence de T et D on pourra utiliser le § 23, *Exercice* 11, ou bien raisonner par récurrence sur n, en écrivant

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \mathrm{S}_1 & {}^t u \\ u & a_{nn} \end{pmatrix}$$

où S_1 est une matrice carrée d'ordre $n - 1$, u une matrice colonne à $n - 1$ éléments, et utiliser une décomposition en blocs analogues pour D et T).

¶ **16.** Les notations restant celles de l'*Exercice* précédent, on suppose S de rang r quelconque, et on cherche à mettre S sous la forme

$$\mathrm{S} = \mathrm{TD}\,{}^t\mathrm{T}$$

avec $c_1 \neq 0, \ldots, c_r \neq 0, c_{r+1} = \cdots = c_n = 0$. Montrer que, pour que le problème admette une solution, il faut et il suffit qu'on ait

$$\mathrm{D}_p \neq 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant p \leqslant r.$$

17. Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K, et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E ; on note q la forme quadratique $f(x, x)$. On suppose qu'il existe des vecteurs isotropes non nuls pour f. Montrer alors que, pour tout $c \in \mathrm{K}$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que

$$q(x) = c.$$

¶ **18.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K, et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E.

a) Soit H un sous-espace vectoriel de E, non isotrope pour f. Montrer qu'il existe un et un seul automorphisme s_{H} de f pour lequel on ait

$$s_{\mathrm{H}}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathrm{H} \\ -x & \text{si } x \in \mathrm{H}^{\perp} \end{cases}$$

(**symétrie par rapport à** H).

b) Soient u un automorphisme de f et x un vecteur non isotrope pour f. Montrer que l'un au moins des vecteurs $u(x) - x$, $u(x) + x$ est non isotrope. En déduire qu'il existe dans E un sous-espace H non isotrope tel que l'on ait $s_{\mathrm{H}}(u(x)) = x$. [Prendre pour H soit le sous-espace orthogonal à $u(x) + x$, soit le sous-espace engendré par $u(x) - x$].

c) En déduire, par récurence sur n, que *tout automorphisme de f est produit d'au plus n symétries par rapport à des sous-espaces non isotropes de* E.

¶¶ **19.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K et f une forme bilinéaire symétrique sur E. On dit qu'un sous-espace vectoriel U de E est **totalement isotrope** pour f si $f(x, x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{U}$; on dit que U est un sous-espace totalement isotrope **maximal** s'il n'est contenu dans aucun autre sous-espace totalement isotrope pour f. On se propose d'établir que *tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux de f ont la même dimension*, qu'on appelle l'**indice** de f (ou de la forme quadratique correspondante).

a) Pour que U soit totalement isotrope pour f, il faut et il suffit que

$$f(x, y) = 0 \quad \text{quels que soient } x, y \in \mathrm{U}$$

i.e. que $\mathrm{U} \subset \mathrm{U}^{\perp}$ (utiliser l'*Exercice* 1).

b) Soient U et V deux sous-espaces totalement isotropes pour f. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{U} \cap \mathrm{V}^{\perp}$, le sous-espace $\mathrm{V} + \mathrm{K}x$ est totalement isotrope.

c) Soient U et V deux sous-espaces totalement isotropes pour f; soient M un supplémentaire de $U \cap V$ dans U, et N un supplémentaire de $U \cap V$ dans V. Montrer que

$$U \cap V^{\perp} = (U \cap V) \oplus (M \cap N^{\perp}).$$

Montrer que les éléments de $M \cap N^{\perp}$ s'obtiennent en résolvant un système de $s = \dim(N)$ équations linéaires et homogènes à $r = \dim(M)$ inconnues. En déduire que, si

$$\dim(V) < \dim(U),$$

il existe un $x \in U$ non dans V tel que le sous-espace $V + Kx$ soit totalement isotrope.

d) Montrer que tout sous-espace totalement isotrope est contenu dans au moins un sous-espace totalement isotrope maximal. En déduire, à l'aide de la question *c*), le résultat annoncé.

¶¶ **20.** (Démonstration du **théorème de Witt**). Soit f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps commutatif K de caractéristique différente de 2. Soient M et N deux sous-espaces de même dimension de E, et u une application linéaire bijective de M sur N. On se propose de montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes : (*i*) il existe un automorphisme de f qui coïncide avec u sur M; (*ii*) on a $f[u(x), u(y)] = f(x, y)$ quels que soient $x, y \in M$. Comme il est trivial que (*i*) implique (*ii*), on se borne ci-dessous à montrer que (*ii*) implique (*i*).

a) Soient x et y deux éléments de E tels que

$$f(x, x) = f(y, y) \neq 0;$$

montrer qu'il existe un automorphisme de f appliquant x sur y (montrer que $x - y$ et $x + y$ ne sont pas tous les deux isotropes, et prendre la symétrie par rapport à H, où H est soit l'hyperplan orthogonal à $x - y$, soit la droite engendrée par $x + y$).

b) On suppose que M et N ne sont pas totalement isotropes. Montrer à l'aide de la question *a*) qu'on peut supposer $u(x) = x$ pour un $x \in M$ non isotrope. Soit E′ l'hyperplan orthogonal à x; montrer que, pour construire un automorphisme de f prolongeant u, il suffit de construire un automorphisme de la restriction f' de f à E′ égal à u sur $E' \cap M$. En déduire dans ce cas le théorème de Witt par récurence sur dim(E).

c) On suppose dorénavant M et N totalement isotropes. On choisit un $x \notin M^{\perp}$. Montrer qu'il existe un $y \notin N^{\perp}$ tel que l'on ait

$$f[y, u(z)] = f(x, z) \quad \text{pour tout } z \in M.$$

Montrer qu'on peut en outre supposer

$$f(y, y) = f(x, x)$$

(remplacer y par $y + tn$ avec $t \in K$ et $n \in N$ convenablement choisis).

d) Déduire de la question *c*) qu'il existe des sous-espaces non totalement isotropes $M' \supset M$ et $N' \supset N$, ainsi qu'un isomorphisme u' de M′ sur N′, tels que l'on ait

$$f[u'(x), u'(y)] = f(x, y) \quad \text{quels que soient } x, y \in M'$$
$$u' = u \text{ sur } M,$$

et achever à partir de là la démonstration du théorème de Witt.

¶¶ **21.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K, f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, et M un sous-espace totalement isotrope de dimension r de E.

a) Montrer qu'il existe dans E des vecteurs non isotropes non orthogonaux à M.

b) Montrer qu'il existe un sous-espace totalement isotrope N tel que

$$E = M^{\perp} \oplus N$$

(prendre le symétrique de M par rapport à la droite engendrée par l'un des vecteurs construits dans la question précédente).

c) Soit $H = M^{\perp} \cap N^{\perp}$; montrer que

$$E = M \oplus H \oplus N,$$

et que H ne contient aucun vecteur isotrope non nul si M est totalement isotrope maximal. On forme une base de E en réunissant des bases de M, H et N; montrer que la matrice de f par rapport à cette base est de la forme

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & S_1 & 0 \\ {}^tA & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où A est une matrice carrée inversible d'ordre r, et S_1 une matrice symétrique d'ordre $n - 2r$.

d) Trouver à quelles conditions une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & W \end{pmatrix}$$

(où U et W sont carrées d'ordre r, et V carrée d'ordre $n - 2r$) représente, par rapport à la base considérée dans E, un automorphisme de f. En déduire que pour tout automorphisme u de l'espace vectoriel M, il existe un automorphisme de f qui se réduit à u sur M. Pouvez-vous déduire ce résultat du théorème de Witt?

22. Soit $q(x)$ une forme quadratique sur un espace vectoriel réel (resp. complexe) E de dimension finie; montrer qu'il existe une base de E par rapport à laquelle l'expression de q est de la forme

$$(*) \qquad x_1^2 + \cdots + x_p^2 - (x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2)$$

(resp.

$$x_1^2 + \cdots + x_r^2).$$

Trouver une telle base (dans le cas réel et dans le cas complexe) pour les formes quadratiques des *Exercices* 3 à 8.

23. Soient $f_1, \ldots, f_{p+q}$ des formes linéaires sur un espace vectoriel réel U de dimension finie; on suppose que, sur U, la forme quadratique

$$q(x) = f_1(x)^2 + \cdots + f_p(x)^2 - f_{p+1}(x)^2 - \cdots - f_{p+q}(x)^2$$

soit définie positive, i.e. vérifie

$$q(x) > 0 \qquad \text{pour tout} \qquad x \neq 0.$$

Montrer qu'on a alors

$$\dim(U) \leqslant p.$$

(Remarquer que dans le cas contraire il existerait un $x \neq 0$ où $f_1, \ldots, f_p$ seraient toutes nulles).

¶ **24.** Soit $q(x)$ une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E de dimension finie. On choisit une base de E par rapport à laquelle q est mise sous la forme $(*)$ de l'*Exercice* 22 ; montrer, à l'aide de l'*Exercice* précédent, que tout sous-espace vectoriel U de E sur lequel $q(x)$ est définie positive est de dimension p au plus. En déduire (**loi d'inertie** des formes quadratiques) que les entiers p et q de l'*Exercice* 22 sont indépendants du choix de la base de E par rapport à laquelle $q(x)$ se met sous la forme $(*)$.
[Le couple (p, q) formé du nombre p de carrés positifs et du nombre q de carrés négatifs dans la formule $(*)$ s'appelle la **signature** de la forme quadratique considérée ou de la forme bilinéaire symétrique correspondante. Le nombre p est la dimension maximum des sous-espaces sur lesquelles la forme donnée est définie positive, et le nombre q la dimension maximum des sous-espaces sur lesquels elle est définie négative].

¶ **25.** Deux formes quadratiques q et q' sur un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps commutatif sont dites **équivalentes** s'il existe un automorphisme u de E tel que l'on ait

$$q'(x) = q(u(x)) \qquad \text{pour tout } x \in \mathrm{E}.$$

On suppose que le corps de base soit $\mathbf{R}$; montrer que, pour que q et q' soient équivalentes, il faut et il suffit qu'elles aient même signature.

26. Montrer que les deux formes quadratiques suivantes sur $\mathbf{R}^3$ sont équivalentes, et construire un automorphisme de $\mathbf{R}^3$ transformant la première en la seconde :

$$2x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 8xy - 4xz - 10yz$$
$$3x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 4xy - 4xz + 8yz.$$

Même problème pour les formes

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 8xy + 6xz + 6yz \qquad \text{et} \qquad 4x^2 + y^2 + 9z^2 - 12xz.$$

¶ **27.** On considère sur $\mathbf{R}^n$ la forme bilinéaire symétrique f correspondant à la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

et on suppose $p \leqslant q$. Montrer que le sous-espace engendré par les vecteurs

$$e_1 + e_{p+1},\ e_2 + e_{p+2},\ \ldots,\ e_p + e_{2p},\ e_{p+q+1},\ \ldots,\ e_n$$

est totalement isotrope maximal pour f (*Exercice* 19).
En déduire que si f est une forme bilinéaire symétrique de signature (p, q) sur un espace vectoriel réel de dimension n, l'indice de f (*Exercice* 14) est $r + n - p - q$ où r est le plus petit des deux entiers p et q.
Quelle est la dimension des sous-espaces totalement isotropes maximaux de la forme de Lorentz ?

¶ **28.** Soit f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel réel E de dimension finie. Soient M et N deux sous-espaces vectoriels de E, tels que $\dim(\mathrm{M}) = \dim(\mathrm{N})$. Pour qu'il existe un automorphisme de f appliquant M sur N, il faut et il suffit que les restrictions de f à M et N aient la même signature (utiliser le théorème de Witt et les *Exercices* 24 et 25) On prend pour f la forme de Lorentz et on considère, sur l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de E, la relation d'équivalence « il existe un automorphisme u de f tel que $u(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$ ». Combien d'éléments l'ensemble quotient comporte-t-il ?
Même question pour la forme quadratique

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 - u^2$$

sur $\mathbf{R}^5$.

29. Pour qu'une matrice hermitienne complexe $\mathrm{H} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ soit positive, il faut et il suffit qu'il existe une matrice $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$\mathrm{H} = \mathrm{X}^*\mathrm{X} ;$$

si de plus H est réelle on peut supposer X réelle [utiliser l'*Exercice* 11, *c*), et noter que les termes diagonaux de D sont positifs si H est positive].
En déduire que si

$$\mathrm{H} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

est une matrice hermitienne complexe positive, on a

$$\mathrm{D}_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} \geqslant 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant p \leqslant n$$

et que

$$\mathrm{D}_p = 0 \quad \text{implique} \quad \mathrm{D}_{p+1} = \cdots = \mathrm{D}_n = 0$$

(Montrer d'abord que $\mathrm{D}_n \geqslant 0$, puis remplacer H par la matrice dont D_p est le déterminant, et utiliser l'*Exercice* 16). Cas $n = 2$? (Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et le « signe du trinôme ».)

¶ **30.** Soit

$$\mathrm{H} = (h_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

une matrice hermitienne complexe positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire complexe

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{avec } t_{ii} \text{ réel positif}$$

telle que

$$\mathrm{H} = \mathrm{T}^*\mathrm{T}$$

(utiliser les *Exercices* 15 et 16). Si H est inversible, T est unique.
Déduire de ce qui précède que pour toute matrice hermitienne positive H on a l'inégalité

$$0 \leqslant \text{dét}(\mathrm{H}) \leqslant h_{11}h_{22}\ldots h_{nn} ;$$

si H est inversible, on ne peut, de plus, avoir l'égalité que si H est diagonale.

¶ **31.** Soit A une matrice carrée inversible à coefficients complexes. Montrer qu'il existe une matrice unitaire U et une matrice triangulaire $\mathrm{T} = (t_{ij})$, avec $t_{ii} > 0$ pour tout i, telles que

$$\mathrm{A} = \mathrm{U}.\mathrm{T},$$

et que U et T sont uniques (appliquer l'*Exercice* précédent à $\mathrm{A}^*\mathrm{A}$). Montrer que U et T sont réelles si A est réelle.

¶ **32.** Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice complexe ; montrer qu'on a

$$|\text{dét}(\mathrm{A})|^2 \leqslant \prod_{j=1}^{j=n} (|a_{1j}|^2 + \cdots + |a_{nj}|^2).$$

¶ **33.** Pour qu'une matrice hermitienne complexe soit définie positive, il faut et il suffit que tous ses mineurs principaux soient strictement positifs (utiliser l'*Exercice* 30 et calculer les t_{ii} en fonction des mineurs principaux de la matrice donnée).

34. Trouver, à l'aide de l'*Exercice* précédent, les valeurs réelles de t pour lesquelles les formes quadratiques suivantes sont définies positives :

$$\begin{gathered} 5x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3 \\ 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3 \end{gathered}$$

¶¶ **35.** Montrer que toute matrice hermitienne positive est somme de matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} c_1\bar{c}_1 & \dots & c_1\bar{c}_n \\ \dots & \dots & \dots \\ c_n\bar{c}_1 & \dots & c_n\bar{c}_n \end{pmatrix},$$

et réciproquement.
En déduire que si deux matrices complexes $(a_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ et $(b_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ sont hermitiennes positives, il en est de même de la matrice

$$(a_{ij}b_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$$

obtenue en multipliant les termes de mêmes indices des deux matrices données.

36. Soit H une matrice hermitienne complexe. Montrer que $1 - i\mathrm{H}$ est inversible, que

$$\mathrm{U} = (1 + i\mathrm{H})\,(1 - i\mathrm{H})^{-1} = (i - \mathrm{H})\,(i + \mathrm{H})^{-1}$$

est unitaire, et que -1 n'est pas valeur propre de U. Inversement, toute matrice unitaire U dont -1 n'est pas valeur propre peut s'obtenir de cette façon (**transformation de Cayley**).

¶ **37.** Soit H une matrice complexe hermitienne positive. Montrer (en réduisant H à la forme diagonale à l'aide d'une matrice unitaire) qu'il existe une et une seule matrice hermitienne positive H′ telle que

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}'^2.$$

(On dit que H′ est la **racine carrée positive** de H, et on écrit $\mathrm{H}' = \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}$).

¶ **38.** Soient S et T deux matrices hermitiennes complexes; on suppose S définie positive. Montrer que les valeurs propres de ST sont réelles, et même positives si T est positive (utiliser l'*Exercice* 37).

¶ **39.** Soit A une matrice carrée inversible à coefficients complexes; montrer que la matrice

$$\mathrm{A}^*\mathrm{A}$$

est hermitienne et définie positive. En considérant sa racine carrée positive, montrer qu'on peut écrire

$$\mathrm{A} = \mathrm{U}.\mathrm{H}$$

avec U unitaire, et H hermitienne définie positive; montrer de plus que le problème n'admet qu'une solution.
Montrer que, si A est réelle, il en est de même de U et de H.

¶¶ **40.** Soit $\mathrm{F} \subset \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ un ensemble de matrices normales deux à deux permutables. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ telle que UAU^{-1} soit diagonale pour toute $\mathrm{A} \in \mathrm{F}$. Interprétation géométrique? (Utiliser l'*Exercice* 22 du § 34).

Dans les *Exercices* **41** à **47** on demande de ramener la matrice symétrique réelle donnée à une matrice diagonale à l'aide d'une matrice orthogonale réelle.

41. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ **42.** $\begin{pmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$ **43.** $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$ **45.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ **47.** $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

¶ **48.** Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, f une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E, et u un automorphisme de f. On suppose que les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u sont E et $\{0\}$. Montrer qu'on est alors dans l'une des situations suivantes : (*i*) E est de dimension *un* et u est égal à $+1$ ou à -1; (*ii*) E est de dimension *deux*, et il existe une base orthonormale pour f par rapport à laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

où φ est un nombre réel non multiple de π.

¶ **49.** Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, f une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E, et u un automorphisme de f. Montrer qu'il existe une base de E, orthonormale relativement à f, et par rapport à laquelle la matrice de u est de la forme

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \mathrm{O} & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \begin{matrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix} & & \\ & \mathrm{O} & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \begin{matrix} \cos\varphi_h & -\sin\varphi_h \\ \sin\varphi_h & \cos\varphi_h \end{matrix} \end{array}\right]$$

où les φ_i sont des nombres réels non multiples de π.

50. Pour tout nombre réel t, on pose

$$\mathrm{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{V}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour toute matrice orthogonale réelle X d'ordre 3 et de déterminant 1 (matrice d'une rotation dans l'espace usuel) il existe des nombres réels φ, ψ, θ tels que

$$\mathrm{X} = \mathrm{U}(\varphi)\mathrm{V}(\theta)\mathrm{U}(\psi).$$

(Observer que si l'on a deux bases orthonormales i, j, k et u, v, w, on passe de la première à la seconde en effectuant d'abord une rotation autour de k de façon à amener i dans le plan engendré par u et v, puis une rotation autour de l'intersection des plans ij et uv de façon à amener k sur w, et enfin une rotation autour de w). Les nombres φ, ψ et θ sont appelés les **angles d'Euler** de la matrice X (ou de la rotation correspondante).

¶¶ **51.** On considère la matrice hermitienne

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$$

d'ordre $p+q$ et de signature (p, q). Montrer que le groupe des automorphismes de S, i.e. le groupe des matrices $\mathrm{W} \in \mathrm{GL}(p+q, \mathbf{C})$ telles que

$$\mathrm{W}^*\mathrm{S}\mathrm{W} = \mathrm{S},$$

est l'ensemble des matrices

$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$$

possédant la propriété suivante : il existe une matrice complexe Z à p colonnes et q lignes, telle que la matrice

$$1_p - \mathrm{Z}^*\mathrm{Z}$$

soit définie positive, et deux matrices unitaires U et V, d'ordres p et q, telles que l'on ait les relations

$$\mathrm{A} = (1 - \mathrm{Z}^*\mathrm{Z})^{-\frac{1}{2}}\mathrm{U}, \qquad \mathrm{B} = \mathrm{Z}^*(1 - \mathrm{Z}\mathrm{Z}^*)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{V}$$
$$\mathrm{C} = \mathrm{Z}(1 - \mathrm{Z}^*\mathrm{Z})^{-\frac{1}{2}}\mathrm{U}, \qquad \mathrm{D} = (1 - \mathrm{Z}\mathrm{Z}^*)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{V},$$

et de plus U, V et Z sont entièrement déterminées par W. Si W est réelle, il en est de même de U, V et Z. [NB — On pose

$$\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}} = \left(\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

lorsque H est définie positive].

¶ **52.** Soit V un espace vectoriel de dimension paire $n = 2m$ sur un corps commutatif k.

a) Soit f une forme bilinéaire alternée (§ 22) non dégénérée sur V. On choisit deux vecteurs a et b tels que $f(a, b) = 1$ et on considère le plan $\mathrm{P} \subset \mathrm{V}$ engendré par a et b. Montrer que la restriction de f à P est non dégénérée, et en déduire de V est somme directe de P et du sous-espace V′ des vecteurs orthogonaux à P pour f. En déduire que V admet une base par rapport

à laquelle l'expression de $f(x, y)$ en fonction des coordonnées de x et y est

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{i=m} x_i y_{2m-i+1} - y_i x_{2m-i+1}.$$

En déduire que deux formes bilinéaires alternées non dégénérées sur V peuvent être transformées l'une en l'autre par un automorphisme de V. Existe-t-il des formes bilinéaires alternées non dégénérées sur un espace de dimension impaire ?

b) On choisit une forme bilinéaire alternée non dégénérée f sur V, et on appelle plan non dégénéré de V tout sous-espace P de dimension 2 de V sur lequel f n'est pas identiquement nulle. Soit $\mathrm{S}p(\mathrm{V})$ le groupe des automorphismes u de V tels que

$$f(u(x), u(y)) = f(x, y)$$

quels que soient $x, y \in \mathrm{V}$ (« groupe symplectique »). Montrer que $\mathrm{S}p(\mathrm{V})$ opère transitivement sur l'ensemble X des plans non dégénérés, et que si $\mathrm{P} \in \mathrm{X}$ le sous-groupe de $\mathrm{S}p(\mathrm{V})$ qui laisse fixe P (i.e. l'ensemble des $u \in \mathrm{S}p(\mathrm{V})$ tels que $u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$) est isomorphe au produit

$$\mathrm{SL}(2, k) \times \mathrm{S}p(\mathrm{W}),$$

où W est l'orthogonal de P dans V par rapport à f.

c) On suppose maintenant que k est fini à q éléments. Soit x un élément non nul de V. Montrer que x appartient à q^{n-2} plans non dégénérés. En déduire la formule

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{X}) = \frac{q^n - 1}{q^2 - 1}\, q^{n-2}.$$

Soient P un plan non dégénéré et W son orthogonal dans V. Montrer que l'on a

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{S}p(\mathrm{V})) = (q^n - 1)q^{n-1}\,\mathrm{Card}\,(\mathrm{S}p(\mathrm{W})).$$

En déduire, par récurrence sur n, la formule

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{S}p(\mathrm{V})) = q^{m(2m+1)} \prod_{i=1}^{i=m} (1 - 1/q^{2i}).$$

¶ **53.** Soit X un ensemble ayant 6 éléments. Soit Y l'ensemble des parties de X ayant 0 ou 2 éléments. On définit une loi de composition symétrique sur Y en posant :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{A} + \varnothing = \mathrm{A} & \text{pour tout} & \mathrm{A} \in \mathrm{Y} \\ \mathrm{A} + \mathrm{A} = \varnothing & \text{pour tout} & \mathrm{A} \in \mathrm{Y} \\ \mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B} - \mathrm{A} \cap \mathrm{B} & \text{si} & \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \text{ a un élément} \\ \mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{X} - (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) & \text{si} & \mathrm{A} \text{ et } \mathrm{B} \text{ sont disjoints et non vides.} \end{array}$$

a) Montrer que cette loi de composition fait de Y un groupe commutatif, d'ordre 16 et d'élément neutre $\varnothing$. Montrer que Y peut être muni (de façon unique) d'une structure d'espace vectoriel sur le corps $k = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et que sa dimension est égale à 4.

b) Si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{Y}$, on désigne par $f(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ l'élément de k défini par la congruence

$$f(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \equiv \mathrm{Card}\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \pmod 2.$$

Montrer que f est une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur Y.

c) Soient A, B, C trois parties de X, disjointes, et ayant chacune deux éléments. Montrer que $\{\varnothing, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ est un sous-espace totalement isotrope de dimension 2 de Y (relativement à la forme f).

d) Soit $\mathfrak{S}_\mathrm{X}$ le groupe des permutations de X ; c'est un groupe isomorphe au groupe symétrique

S_6. Soit d'autre part $Sp(Y)$ le groupe des automorphismes de Y qui conservent la forme f (ce groupe est souvent noté $Sp_4(F_2)$). Montrer que tout élément de S_X définit un élément de $Sp(Y)$, et que l'homomorphisme $\varepsilon : S_X \to Sp(Y)$ ainsi obtenu est un isomorphisme. (On montrera d'abord que ε est injectif, puis on comparera les ordres de S_X et $Sp(Y)$.)

e) Soit F le k-espace vectoriel des fonctions $f : X = k$ telles que $\sum_{x \in X} f(x) = 0$. Soit $V = F/\{0, 1\}$ le quotient de F par le sous-espace de dimension 1 engendré par la fonction constante 1. A tout $A \in Y$, on associe sa fonction caractéristique θ_A (égale à 1 sur A et à 0 sur $X - A$). Montrer que $A \mapsto \theta_A$ définit un *isomorphisme* de l'espace vectoriel Y sur l'espace vectoriel V. Montrer que cet isomorphisme transforme la forme bilinéaire f de *b*) en la forme

$$u(\theta, \theta') = \sum_{x \in X} \theta(x)\, \theta'(x).$$

I.
1.