Beweis. Man erweitere Σ zu einem algebraisch-abgeschlossenen algebraischen Erweiterungskörper Ω'. Dieser ist auch algebraisch in bezug auf P, also mit Ω äquivalent. Bei einem Isomorphismus, der Ω' in Ω überführt und P elementweise fest läßt, geht insbesondere Σ über in einen äquivalenten Unterkörper Σ_0 von Ω.

Aufgabe. Man beweise die Existenz und Eindeutigkeit eines Erweiterungskörpers von P, der durch Adjunktion aller Nullstellen einer vorgegebenen Menge von Polynomen aus $\mathsf{P}[x]$ entsteht.

Bemerkung. Statt der transfiniten Induktion kann man bei solchen Beweisen, wie sie in diesem Paragraphen dargestellt wurden, auch das Lemma von ZORN verwenden. Siehe M. ZORN, Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 667 (1935).

§ 73. Einfache transzendente Erweiterungen

Jede einfache transzendente Erweiterung eines (kommutativen) Körpers Δ ist, wie wir wissen, äquivalent dem Quotientenkörper $\Delta(x)$ des Polynombereichs $\Delta[x]$. Wir studieren daher diesen Quotientenkörper

$$\Omega = \Delta(x).$$

Elemente von Ω sind rationale Funktionen

$$\eta = \frac{f(x)}{g(x)},$$

die in unverkürzbarer Gestalt (f und g teilerfremd) angenommen werden können. Der größte der beiden Grade von $f(x)$ und $g(x)$ heißt der *Grad* der Funktion η.

Satz. *Jedes nichtkonstante η vom Grade n ist transzendent in bezug auf Δ, und $\Delta(x)$ ist algebraisch vom Grade n in bezug auf $\Delta(\eta)$.*

Beweis. Die Darstellung $\eta = f(x)/g(x)$ sei unverkürzbar. Dann genügt x der Gleichung

$$g(x)\cdot\eta - f(x) = 0$$

mit Koeffizienten aus $\Delta(\eta)$. Diese Koeffizienten können nicht alle Null sein. Wären sie es nämlich und wäre a_k ein nichtverschwindender Koeffizient in $g(x)$, b_k der Koeffizient derselben Potenz von x in $f(x)$, so hätte man

$$a_k\eta - b_k = 0,$$

mithin $\eta = b_k/a_k =$ konst., entgegen der Voraussetzung. Also ist x algebraisch in bezug auf $\Delta(\eta)$.

Wäre nun η algebraisch in bezug auf Δ, so wäre auch x algebraisch in bezug auf Δ, was nicht der Fall ist. Mithin ist η transzendent.

x ist Nullstelle des Polynoms in $\Delta(\eta)[z]$

$$g(z)\,\eta - f(z)$$

vom Grade n. Dieses Polynom ist irreduzibel in $\Delta(\eta)[z]$. Denn sonst wäre es nach § 30 auch in $\Delta[\eta, z]$ reduzibel; da es linear in η ist, müßte ein Faktor von η unabhängig sein und nur von z abhängen; einen solchen Faktor kann es aber nicht geben, da $g(z)$ und $f(z)$ teilerfremd sind.

Mithin ist x algebraisch vom Grade n in bezug auf $\Delta(\eta)$. Daraus folgt die Behauptung $(\Delta(x):\Delta(\eta)) = n$.

Wir merken uns für später noch, daß das Polynom

$$g(z)\,\eta - f(z)$$

keinen von z allein abhängigen (in $\Delta[z]$ liegenden) Faktor hat. Dieser Tatbestand bleibt erhalten, wenn man η durch seinen Wert $f(x)/g(x)$ ersetzt und mit dem Nenner $g(x)$ aufmultipliziert; mithin hat das Polynom in $\Delta[x, z]$

$$g(z)\,f(x) - f(z)\,g(x)$$

keinen von z allein abhängigen Faktor.

Aus dem bewiesenen Satz fließen drei *Folgerungen.*

1. Der Grad einer Funktion $\eta = f(x)/g(x)$ hängt nur von den Körpern $\Delta(\eta)$ und $\Delta(x)$, nicht von der speziellen Wahl der Erzeugenden x des letzteren Körpers ab.

2. Dann und nur dann ist $\Delta(\eta) = \Delta(x)$, wenn η vom Grade 1, also gebrochen-linear ist. Das heißt: *Körpererzeugende sind neben x alle gebrochenen linearen Funktionen von x und nur diese.*

3. Ein Automorphismus von $\Delta(x)$, der die Elemente von Δ fest läßt, muß x wieder in eine Körpererzeugende überführen. Führt man umgekehrt x in eine andere Körpererzeugende $\bar{x} = \frac{ax+b}{cx+d}$ und jedes $\varphi(x)$ in $\varphi(\bar{x})$ über, so entsteht ein Automorphismus, bei dem die Elemente von Δ fest bleiben. Also:

Alle relativen Automorphismen von $\Delta(x)$ in bezug auf Δ sind die gebrochen-linearen Substitutionen.

$$\bar{x} = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad ad - bc \neq 0.$$

Wichtig für gewisse geometrische Untersuchungen ist der folgende

Satz von Lüroth: *Jeder Zwischenkörper Σ mit $\Delta \subset \Sigma \subseteq \Delta(x)$ ist eine einfache transzendente Erweiterung: $\Sigma = \Delta(\vartheta)$.*

Beweis. Das Element x muß algebraisch in bezug auf Σ sein; denn wenn η irgendein nicht in Δ gelegenes Element von Σ ist, so ist x, wie gezeigt, algebraisch in bezug auf $\Delta(\eta)$, also um so mehr in bezug auf Σ. Das im Polynombereich $\Sigma[z]$ irreduzible Polynom mit dem höchsten Koeffizienten 1 und der Nullstelle x sei

$$f_0(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n. \tag{1}$$

Wir wollen den Bau dieses $f_0(z)$ bestimmen.

Die a_i sind rationale Funktionen von x. Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner kann man sie ganzrational machen und außerdem erreichen, daß man ein in bezug auf x primitives Polynom (vgl. § 30) erhält:

$$f(x, z) = b_0(x)\,z^n + b_1(x)\,z^{n-1} + \cdots + b_n(x)\,.$$

Der Grad dieses Polynoms in x sei m, der Grad in z ist n.

Die Koeffizienten $a_i = b_i/b_0$ von (1) können nicht sämtlich von x unabhängig sein, da sonst x algebraisch in bezug auf Δ wäre, es muß also einer unter ihnen, etwa

$$\vartheta = a_i = \frac{b_i(x)}{b_0(x)}$$

oder, unverkürzbar geschrieben

$$\vartheta = \frac{g(x)}{h(x)}$$

von x wirklich abhängen. Die Grade von $g(x)$ und $h(x)$ sind $\leqq m$. Das (nichtverschwindende) Polynom

$$g(z) - \vartheta\,h(z) = g(z) - \frac{g(x)}{h(x)}\,h(z)$$

hat die Nullstelle $z = x$, ist also in $\Sigma[z]$ durch $f_0(z)$ teilbar. Geht man nach § 30 von diesen in x rationalen Polynomen zu ganzrationalen und in x primitiven Polynomen über, so bleibt diese Teilbarkeit bestehen, und man erhält

$$h(x)\,g(z) - g(x)\,h(z) = q(x, z)\,f(x, z)\,.$$

In x hat die linke Seite einen Grad $\leqq m$. Auf der rechten hat aber f schon den Grad m; also folgt, daß der Grad auf der linken Seite genau m ist und daß $q(x, z)$ nicht von x abhängt. Einen von z allein abhängigen Faktor hat aber die linke Seite nicht (s. oben); also ist $q(x, z)$ eine Konstante:

$$h(x)\,g(z) - g(x)\,h(z) = q \cdot f(x, z)\,.$$

Damit ist, da es auf die Konstante q nicht ankommt, der Bau von $f(x, z)$ bestimmt. Der Grad von $f(x, z)$ in x ist m; also ist (aus Symmetriegründen) der Grad in z auch m, mithin $m = n$. Mindestens eine der Gradzahlen von $g(x)$ und $h(x)$ muß den Höchstwert m wirklich erreichen; also hat auch ϑ als Funktion von x genau den Grad m.

Demnach ist einerseits

$$(\Delta(x) : \Delta(\vartheta)) = m\,,$$

andererseits

$$(\Delta(x) : \Sigma) = m\,,$$

mithin, da Σ ja $\Delta(\vartheta)$ umfaßt:

$$(\Sigma : \Delta(\vartheta)) = 1,$$
$$\Sigma = \Delta(\vartheta).$$

Der Lürothsche Satz hat die folgende Bedeutung für die Geometrie:

Eine ebene (irreduzible) algebraische Kurve $F(\xi, \eta) = 0$ heißt *rational*, wenn ihre Punkte bis auf endlichviele dargestellt werden können durch rationale Parametergleichungen:

$$\xi = f(t),$$
$$\eta = g(t).$$

Es kann nun vorkommen, daß jeder Kurvenpunkt (vielleicht mit endlichvielen Ausnahmen) zu mehreren Werten von t gehört. (Beispiel:

$$\xi = t^2,$$
$$\eta = t^2 + 1;$$

zu t und $-t$ gehört der gleiche Punkt.) Zufolge des Lürothschen Satzes kann man das aber immer durch geschickte Parameterwahl vermeiden. Es sei nämlich Δ ein Körper, der die Koeffizienten der Funktionen f, g enthält, und t zunächst eine Unbestimmte. $\Sigma = \Delta(f, g)$ ist ein Unterkörper von $\Delta(t)$. Ist t' ein primitives Element von Σ, so ist etwa

$$f(t) = f_1(t') \quad \text{(rational)},$$
$$g(t) = g_1(t') \quad \text{(rational)},$$
$$t' = \varphi(f, g) = \varphi(\xi, \eta),$$

und man verifiziert leicht, daß die neue Parameterdarstellung

$$\xi = f_1(t'),$$
$$\eta = g_1(t')$$

die gleiche Kurve darstellt, während der Nenner der Funktion $\varphi(x, y)$ nur in endlichvielen Punkten der Kurve verschwindet, so daß zu allen Kurvenpunkten (bis auf endlichviele) nur *ein* t'-Wert gehört.

Aufgabe. Ist der Körper $\Delta(x)$ normal in bezug auf den Unterkörper $\Delta(\eta)$, so zerfällt das Polynom (1) in ihm in Linearfaktoren. Alle diese Linearfaktoren gehen durch gebrochen-lineare Transformationen von x aus einem unter ihnen, etwa aus $z - x$, hervor. Diese linearen Transformationen bilden eine endliche Gruppe, lassen die Funktion $\vartheta = g(x)/h(x)$ invariant und sind dadurch gekennzeichnet.

§ 74. Algebraische Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Es sei Ω ein Erweiterungskörper eines festen Körpers P. Ein Element v von Ω heißt *algebraisch abhängig* von $u_1, \ldots, u_n$, wenn v algebraisch in bezug auf den Körper $\mathsf{P}(u_1, \ldots, u_n)$ ist, d. h. wenn v einer algebraischen Gleichung

$$a_0(u)\, v^g + a_1(u)\, v^{g-1} + \cdots + a_g(u) = 0$$

genügt, deren Koeffizienten $a_0(u), \ldots, a_g(u)$ Polynome in $u_1, \ldots, u_n$ mit Koeffizienten aus P und nicht sämtlich gleich Null sind.