608. Il nous reste à étudier les courbes de genre zéro, dites *courbes unicursales*.

Soient $F=0$ une semblable courbe; φ_1, φ_2 deux de ses adjointes, d'un même degré m et coupant F, la première aux points $a_1, \ldots, a_{\mu-2}, \alpha$, la seconde aux points $a_1, \ldots, a_{\mu-2}, \beta$. Elles n'auront pas d'autres points de rencontre avec F, puisque p est nul.

Considérons les adjointes du faisceau

$$c_1\varphi_1+c_2\varphi_2=0.$$

Chacune d'elles coupera F aux points $a_1, \ldots, a_{\mu-2}$, et en un autre point (ξ, η) variable avec le rapport $\frac{c_1}{c_2}=t$. Pour obtenir ξ, on éliminera η entre les équations $F=0$, $c_1\varphi_1+c_2\varphi_2=0$, et l'on supprimera, dans l'équation finale, les facteurs correspondants aux racines fixes; il restera une équation du premier degré, d'où l'on déduira $\xi=R(t)$, R désignant une fraction rationnelle. On trouvera de même $\eta=R_1(t)$, R_1 étant également rationnel.

L'équation $F=0$ sera donc équivalente au système des deux suivantes :

$$\xi=R(t), \qquad \eta=R_1(t).$$

A chaque point (ξ, η) de F correspondra, en général, une valeur unique de t. Car si deux adjointes différentes $c_1\varphi_1+c_2\varphi_2$, $c'_1\varphi_1+c'_2\varphi_2$ passent par le point (ξ, η), φ_1 et φ_2 y passeront aussi; (ξ, η) sera donc un des points communs à φ_1, φ_2, F, c'est-à-dire un point multiple, ou l'un des points $a_1, \ldots, a_{\mu-2}$.

Pour obtenir la valeur de t correspondante à l'un de ces points particuliers A, on supposera que le point (ξ, η), d'abord différent de ce point, s'en rapproche indéfiniment, et l'on cherchera la valeur limite vers laquelle tend t. Ce sera celle que nous ferons correspondre au point A.

Si ce point est multiple d'ordre k, on pourra supposer successivement le point (ξ, η) placé sur chacune des k branches de F qui se croisent en A; on obtiendra ainsi k valeurs de t correspondantes à ce point.

609. Considérons réciproquement une courbe F définie par les équations

$$\xi = R(t), \qquad \eta = R_1(t),$$

R et R_1 désignant des fractions rationnelles. Réduisant ces fractions au même dénominateur, on pourra les mettre sous la forme

$$R(t) = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)}, \qquad R_1(t) = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)},$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ étant trois polynomes sans facteur commun.

Cherchons combien de valeurs du paramètre t correspondent, en général, à un même point de la courbe. Soit t_1 l'une d'elles; les valeurs cherchées seront les solutions communes aux deux équations

$$(10) \qquad R(\theta) = R(t_1), \qquad R_1(\theta) = R_1(t_1),$$

ou

$$(11) \qquad \begin{cases} P(\theta, t_1) = \varphi_1(\theta)\varphi_3(t_1) - \varphi_3(\theta)\varphi_1(t_1) = 0, \\ P_1(\theta, t_1) = \varphi_2(\theta)\varphi_3(t_1) - \varphi_3(\theta)\varphi_2(t_1) = 0. \end{cases}$$

Les deux polynomes P et P_1 sont divisibles par $\theta - t_1$; mais ils peuvent avoir d'autres diviseurs communs. Soit en général $D(\theta, t_1)$ leur plus grand commun diviseur; on aura

$$P(\theta, t_1) = D(\theta, t_1)\, Q(\theta, t_1),$$
$$P_1(\theta, t_1) = D(\theta, t_1)\, Q_1(\theta, t_1).$$

Les deux équations $Q = 0$, $Q_1 = 0$ ne pourront avoir de racine commune que pour des valeurs particulières de t_1. Les solutions communes aux deux équations (11) se réduiront donc (lorsque t_1 reste indéterminé) aux racines de l'équation

$$D(\theta, t_1) = 0.$$

Ces racines sont généralement distinctes, car une racine double devrait satisfaire non seulement aux équations (10), mais à leurs dérivées

$$R'(\theta) = 0, \qquad R'_1(\theta) = 0,$$

équations algébriques qui n'admettent qu'un nombre limité de valeurs de θ; et les valeurs correspondantes de t_1, déduites des équations (10), seraient également en nombre limité.

Soit donc

$$D(\theta, t_1) = A(t_1)\theta^m + A_1(t_1)\theta^{m-1} + \ldots + A_m(t_1);$$

les équations (10) admettront, en général, m racines communes distinctes $t_1, \ldots, t_m$, solutions de l'équation

$$D(\theta, t_1) = 0.$$

Si l'on permute les deux variables θ et t_1, les deux polynomes P et P_1 changent simplement de signe; leur plus grand commun diviseur D doit donc se reproduire à une constante près; il est donc du degré m en t_1. L'un au moins des polynomes $A, A_1, \ldots$, par exemple A_μ, sera de degré m, les autres étant de degré $\overline{\gtrless} m$. En particulier, A sera de degré inférieur à m; car, s'il en était autrement, D ne pourrait s'annuler identiquement pour $\theta = t_1$, ainsi que cela doit être; car $D(t_1, t_1)$ contiendrait un terme en t_1^{2m}, qui ne pourrait se réduire avec les autres.

D'autre part, t_i désignant l'une quelconque des racines $t_1, \ldots, t_m$, on aura

$$R(t_i) = R(t_1), \qquad R_1(t_i) = R_1(t_1).$$

Les équations

$$R(\theta) = R(t_i), \qquad R_1(\theta) = R_1(t_i)$$

seront donc équivalentes aux équations (10). L'équation $D(\theta, t_i)$, qui fournit les racines communes à ces équations, sera donc équivalente à $D(\theta, t_1) = 0$. On aura, par suite,

$$\frac{A_\mu(t_i)}{A(t_i)} = \frac{A_\mu(t_1)}{A(t_1)}.$$

Si donc nous posons

$$u = \frac{A_\mu(t)}{A(t)},$$

à chaque valeur de ce nouveau paramètre u correspondront m valeurs de t et précisément celles qui correspondent elles-mêmes à un même point (ξ, η) de la courbe F; et ξ, η étant des fonctions algébriques de u, qui n'ont qu'une seule valeur pour chaque valeur de u, seront rationnels en u.

On voit ainsi que, si les coordonnées d'un point d'une courbe sont exprimables en fonction rationnelle d'un paramètre, on pourra toujours, en changeant au besoin le paramètre, faire en sorte qu'à chaque point de la courbe corresponde une seule valeur du paramètre.

610. Supposons cette condition réalisée, avec le paramètre t, pour une courbe définie par les équations

$$\xi = R(t), \qquad \eta = R_1(t);$$

nous allons établir que cette courbe est unicursale.

Les fonctions $R(t)$, $R_1(t)$ peuvent être supposées réduites au même dénominateur. Passant aux coordonnées homogènes, en posant $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$, les équations de la courbe pourront s'écrire

$$x : y : z :: T_1 : T_2 : T_3,$$

T_1, T_2, T_3 étant des polynomes en t.

Par une transformation birationnelle

$$x' : y' : z' :: f_1(x, y, z) : f_2(x, y, z) : f_3(x, y, z),$$

nous pouvons changer la courbe F en une autre F' de même genre p, n'ayant que des cycles d'ordre 1. Les équations de cette nouvelle courbe seront de la forme

$$x' : y' : z' :: \Theta_1 : \Theta_2 : \Theta_3,$$

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ étant de nouveaux polynomes en t.

A chaque point (x', y', z') correspondra d'ailleurs, en général, un seul point (x, y, z), et par suite une seule valeur de t.

Soit s le plus grand des degrés des polynomes $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$; on pourra écrire

$$\Theta_1 = at^s + a_1 t^{s-1} + \ldots,$$
$$\Theta_2 = bt^s + b_1 t^{s-1} + \ldots,$$
$$\Theta_3 = ct^s + c_1 t^{s-1} + \ldots,$$

l'un au moins des trois coefficients a, b, c étant $\gtrless 0$. D'ailleurs, si t croît indéfiniment, on aura, en posant $t = \frac{1}{t'}$,

$$x' : y' : z' :: a + a_1 t' + \ldots : b + b_1 t' + \ldots : c + c_1 t' + \ldots.$$

Ces équations définissent un cycle de F', qui doit être d'ordre 1, par hypothèse; donc l'un au moins des trois déterminants $ab_1 - a_1 b$, $bc_1 - b_1 c$, $ca_1 - c_1 a$ sera $\gtrless 0$.

Le degré n de la courbe F' est le nombre de ses intersections avec une droite arbitraire

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Les t correspondants sont les racines de l'équation de degré s

$$\alpha \Theta_1 + \beta \Theta_2 + \gamma \Theta_3 = 0,$$

et à chacune d'elles correspond un point distinct de F'. Donc $n = s$.

Cherchons d'autre part la classe ν de F'.

Une droite

$$ux + vy + wz = 0$$

sera tangente à F' au point t si l'on a

$$u\Theta_1 + v\Theta_2 + w\Theta_3 = 0,$$
$$u\Theta'_1 + v\Theta'_2 + w\Theta'_3 = 0.$$

Elle passera, en outre, par un point donné arbitrairement α, β, γ, si l'on a

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

Éliminant u, v, w entre ces trois équations, on aura, pour déterminer les points de F′ dont la tangente passe par α, β, γ, l'équation

$$\alpha(\Theta_2\Theta'_3-\Theta_3\Theta'_2)+\beta(\Theta_3\Theta'_1-\Theta_1\Theta'_3)+\gamma(\Theta_1\Theta'_2-\Theta_2\Theta'_1)=0.$$

Or

$$\begin{aligned}\Theta_2\Theta'_3-\Theta_3\Theta'_2&=-(bc_1-b_1c)\,t^{2s-2}+\ldots,\\ \Theta_3\Theta'_1-\Theta_1\Theta'_3&=-(ca_1-c_1a)\,t^{2s-2}+\ldots,\\ \Theta_1\Theta'_2-\Theta_2\Theta'_1&=-(ab_1-a_1b)\,t^{2s-2}+\ldots.\end{aligned}$$

L'équation en t est donc de degré $2s-2$, et $\nu=2s-2$.

Cela posé, F′ n'ayant que des cycles d'ordre 1, son genre p sera défini par la relation

$$2p-2=\nu-2n=2s-2-2s=-2.$$

Donc $p=0$, et les courbes F′, F seront unicursales.

FIN DU TOME PREMIER.

Joseph FLOCH, Maître-Imprimeur à Mayenne
24 Avril 1959 - N° d'Editeur 823