2.1 *Courbes unicursales.*

2.1.1 *Les deux théorèmes de Lűroth.*

Rappel. — Soit $f : \mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_1$ une fonction méromorphe non constante sur la droite projective. *Pour tout* $a \in \mathbf{C}$ *la préimage* $f^{-1}(a)$ *est finie non vide, son nombre d'éléments, comptés avec multiplicités* $\displaystyle\sum_{z\in f^{-1}(a)} v_z(f-a) = \sum_{p\in f^{-1}(\infty)} v_p(\frac{1}{f})$, *est égal à celui de* $f^{-1}(\infty)$ *et ne dépend donc pas de* a, *c'est* $\deg(f)$, *le degré de* f.

De plus pour $p=\sum_{i=0}^{d_p} X^i a_i, q=\sum_{j=0}^{d_q} X^j b_j \in \mathbf{C}[X], a_{d_p} b_{d_q} \neq 0, (p,q) = 1$ *deux polynômes complexes premiers entre eux avec* $f=\frac{p}{q}$ *alors :* $\deg(f) = \max(d_p, d_q)$.

LEMME. — *Soit* $f \in \mathbf{K}\setminus\mathbf{C}$ *une fraction rationnelle non constante alors* $\mathbf{K}$ *est algébrique sur le corps* $\mathbf{C}(f)$ *engendré par* f, *de degré* $[\mathbf{K} : \mathbf{C}(f)] \leq \deg(f)$.

Démonstration. — Le générateur X sur $\mathbf{C}$ du corps $\mathbf{K}$ est, avec les notations du rappel, racine du polynôme $R=p(T) - q(T)f \in \mathbf{C}(f)[T]$ donc $[\mathbf{K} : \mathbf{C}(f)] \leq d_R = \max(d_p, d_q) = \deg(f)$. ∎

THÈOREME **(Lűroth XX°)**. — *Soit* $\mathbf{K} \supsetneq \mathbf{L} \supset \mathbf{C}$ *sous-corps, non constant, du corps des fractions rationnelles. Alors* $\mathbf{K}=\mathbf{C}(\mu)$ *est* $\mathbf{C}$*-engendré par tout coefficient non constant* $\mu \in \mathbf{L}$ *du polynôme minimal* $M=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} T^i \mu_i \in \mathbf{L}[T], \mu_n=1$ *de* X *sur* $\mathbf{L}$.

Démonstration. — Si $\mu=\frac{p}{q}$, $N=p(T) - q(T)\mu \in \mathbf{C}(\mu)[T]\setminus\{0\}$ annule le $\mathbf{C}$-générateur X de $\mathbf{K}$. Division euclidienne de N par M et minimalité de M donnent $Q \in \mathbf{L}[T]\setminus\{0\}$ tel que $N=M\cdot Q$.

Par hypothèse 1 et μ sont coefficients de M, donc N a ses coefficients $\mathbf{C}$-linéaires en ceux de M donc, par $(i)(b)$ de la proposition de **1.1**, si $a \in \mathbf{P}_1$, la majoration $v_a(M) \leq v_a(N)$ et : $v_a(N)=v_a(M) + v_a(Q)$ d'où $v_a(Q) \geq 0$, ainsi $(ii)(b)$ de cette proposition donne : $Q \in \mathbf{C}[T]$.

Quotient par $Q \in \mathbf{C}[T] \subset \mathbf{L}[T]$ de $N \in \mathbf{C}(\mu)[T] \subset \mathbf{L}[T]$, $M \in \mathbf{C}(\mu)[T]$ et $[\mathbf{K} : \mathbf{L}]=[\mathbf{K} : \mathbf{C}(\mu)]$. Comme $[\mathbf{K} : \mathbf{C}(\mu)]=[\mathbf{K} : \mathbf{L}][\mathbf{L} : \mathbf{C}(\mu)], [\mathbf{L} : \mathbf{C}(\mu)]=1$ et $\mathbf{L}=\mathbf{C}(\mu)$. ∎

COROLLAIRE **(Lűroth XIX°)**. — *Soit* $f, g \in \mathbf{K}$ *avec* $\mathbf{L}=\mathbf{C}(f,g)$ *non constant.*

Alors si $\tau \in \mathbf{L}=\mathbf{C}(\tau)$ *engendre* $\mathbf{L}$, *il y a* $f_1, g_1 \in \mathbf{K}$ *et* $E \subset \mathbf{P}_1$ *une partie finie telles que* $(f,g)=(f_1\circ\tau, g_1\circ\tau)$ *et la restriction* $(f_1,g_1)_| : \mathbf{P}_1\setminus E \to \mathbf{P}_1$ *est injective.*

Démonstration. — La première partie est la moitié de l'hypothése : f, g sont dans le corps engendré sur $\mathbf{C}$ par τ. Que τ soit dans le corps $\mathbf{L}$ engendré par f et g donne deux polynômes $A, B \in \mathbf{C}[U,V]$ tels que la fraction rationelle $d=B(f,g)\neq 0$ est non nulle et $\tau=\frac{A(f,g)}{B(f,g)}=\frac{n}{d}$.

Soit $E=\tau(d^{-1}\cup n^{-1}(\{0,\infty\}))$ et $u, v \in \mathbf{P}_1\setminus E$ tels que $(f_1(u), g_1(u))=(f_1(v), g_1(v))$. Par surjectivité de τ, il y a $(r,s) \in \tau^{-1}((u,v))$. Donc : $u=\tau(r)=\frac{A(f,g)}{B(f,g)}(r)=\frac{A(f_1\circ\tau, g_1\circ\tau)}{B(f_1\circ\tau, g_1\circ\tau)}(r)=\frac{A(f_1(\tau(r)), g_1(\tau(r)))}{B(f_1(\tau(r)), g_1(\tau(r)))}=\frac{A(f_1(u), g_1(u))}{B(f_1(u), g_1(u))}=\frac{A(f_1(v), g_1(v))}{B(f_1(v), g_1(v))}=\cdots=v$. Ainsi $(f_1, g_1)_|$ est injective. ∎

COMMENTAIRES BIBLIOGRAPHIQUES

Pour un exposé en français du corollaire original **[Lű]** voir **[Jo1]** 3° Ed. **I.609** p. 616-618. Lűroth a lieu sur tout corps k en lieu de $\mathbf{C}$ (considérer les ordres aux points de $\mathbf{P}_1(\overline{k})$ où $\overline{k}\supset k$ est une clôture algébrique de k), comparer avec **[vW]** §**73** p. 221-224, ou **[Ja]** III IV 4 p. 157-160.)