Morceaux choisis de théorie globale des fonctions.

Valence-Lyon-Grenoble printemps automne hiver 2010, 2011
Collection de « cours à distance » d'accoutumance à de robustes[1] références.

On utilisera les baba ensemblistes (entiers naturels, ensemble, applications, injection, surjections et les propriétés élémentaires des cardinaux), relire [**Ld**] et les §0 à §8 de [**Go**].

La présente traduction libre de [**We**], [**Sl**], [**Gi**] et [**De**] ne revenant pas sur es premières propriétés des fonctions holomorphes sur et vers $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, il convient aussi de relire le rapide chapitre **10** de [**Ru**] ou, tout à loisir, les chapitres I à III de [**Cn**], ou les chapitres **1** à **4** de [**Ah**],

[1] mais que sous le règne de El'hemdée, certains traitent de poussièreuses.

1 Des fractions rationnelles aux surfaces de Riemann.

1.1 *Décomposition en éléments simples et développement de Laurent.*

Premiers rappels : fractions et séries formelles. — Une suite $f : \mathbf{Z} \to A, n \mapsto f_n$ à valeurs dans un anneau A est une *fraction formelle* (*en une variable à coefficients dans* A), *de* $n^{\text{ième}}$ *terme* f_n, si il y a un entier $v \in \mathbf{Z}$ tel que pour tout $n < v$, $f_n = 0$. Si $f \neq 0$ il y a un plus grand tel v, l'*ordre* $v(f)$ de f, son *terme initial* est alors $i(f) = f_{v(f)} \in A \setminus \{0\}$. On pose $v(0) = \infty$.

Si f, g sont deux fractions formelles alors $f + g, n \mapsto f_n + g_n$ est une fraction formelle, dite *somme* des fractions formelles f et g, elle est d'ordre :

$$v(f+g) \geq \min(v(f), v(g)) \text{ avec égalité si } v(f) \neq v(g)$$

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ alors si $n - v(f) < i$ ou $i < v(g)$ on a $f_{n-i} g_i = 0$ ainsi la somme $\sum_{i \in \mathbf{Z}} f_{n-i} g_i$, de termes non nuls en nombre fini, a un sens et est nulle si $n < v(f) + v(g)$, définissant le $n^{\text{ième}}$ terme du *produit* $f \cdot g$ des fractions formelles f et g. De plus $f \cdot g_{v(f)+v(g)} = i(f) i(g)$, donc :

$$v(f \cdot g) \geq v(f) + v(g) \text{ avec égalité si } A \text{ est intège, en ce cas, si } f \neq 0 \neq g, \quad i(f \cdot g) = i(f) i(g)$$

Muni de + et · l'ensemble des fractions formelles à coefficients dans un anneau A est un anneau. Utilisant la notation « sommatoire » $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} X^n f_n$ des fractions formelles, on le note $A((X))$.

L'anneau $A((X))$ contient le sous-anneau $A[[X]] = \{f = \sum_{n \in \mathbf{N}} X^n f_n \mid v(f) \geq 0\}$, dit des *séries formelles*[1], formé des fractions formelles d'ordre non négatif.
Ce dernier contient le sous-anneau $A[X] = \{f = \sum_{n \in \mathbf{N}} X^n f_n \mid |f^{-1}(A \setminus \{0\})| < \infty\}$, dit des *polyômes*[1], formé des séries formelles dont le nombre de termes non nuls est fini.

L'anneau $A((X))$ *est commutatif si* A *l'est*, ce que l'on suppose désormais[2].

Si A *est intègre, de corps des fractions* $K \supset A$, *alors* $A((X))$ *est intègre et* $K((X)) \supset A[[X]]$ *est corps des fractions de l'anneau de séries fomelles* $A[[X]]$. *Ainsi* $K((X))$ *contient comme sous-corps un corps de fractions* $A(X) \supset A[X]$, *dit des fractions rationnelles*[1], *de l'anneau des polynômes* $A[X]$. *En particulier si* $A = K$ *est un corps alors* $A((X))$ *est un corps.*

Soit un polynôme $\sum_{m \in \mathbf{N}} T^m \sum_{n \in \mathbf{Z}} X^n f_{m,n} = \sum_{m \in \mathbf{N}} T^m f_m \in A((X))[T]$ à coefficients dans l'anneau de fractions formelles $A((X))$. Comme les $f_m \neq 0$ non nuls sont en nombre fini, d'une part la série formelle $F_n = \sum_{m \in \mathbf{N}} T^m f_{m,n} \in A[[T]]$ n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls est un polynôme, d'autre part $\{v(f_m) \mid m \in \mathbf{N}\}$, l'ensemble des ordres de ces polynômes, a un plus petit élément V, ainsi si $n < V$ ce polynôme $F_n = 0$ est nul :

L'échange de signes somme $\sum_{m \in \mathbf{N}} T^m \sum_{n \in \mathbf{Z}} X^n f_{m,n} \mapsto \sum_{n \in \mathbf{Z}} X^n \sum_{m \in \mathbf{N}} T^m f_{m,n}$ *induit un plongement, dit tautologique* $\tau_{X,T} : A((X))[T] \to A[T]((X))$ *de l'anneau des plolynômes à coefficients dans l'anneau des fractions formelles à coeficients dans* A *vers l'anneau de fractions formelles à coeficients dans l'anneau de plolynômes à coefficients dans* A.

Le corps $\mathbf{K} = \mathbf{C}(T)$ des fractions rationnelles[3]complexes s'identifie à celui des fonctions complexes méromorphes sur la droite projective complexe $\mathbf{P}_1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, c'est à dire à l'ensemble des applications holomorphes $f : \mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_1$, non « constante infinie », muni des opérations algébriques d'addition et multiplication au but.

Ainsi $\mathbf{K}[T]$ s'identifie à l'anneau des des polynômes complexes F méromorphes[4]

---

1 (*en une variable à coefficients dans* A)
2 et, suivant l'usage anglo-saxon, *corps commutatif* s'abrège en *corps*.
3 (en une variable à coefficients)
4 *c. a d.* il y a un entier positif $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et une partie finie Ξ de $\mathbf{P}_1$ tels que :

Une *constante* du corps $\mathbf{K}$ (resp. de l'anneau $\mathbf{K}[T]$) est une fonction $f\in\mathbf{C}\subset\mathbf{K}$ (resp. un polynôme $F\in\mathbf{C}[T]\subset\mathbf{K}[T]$) méromorphe qui est dans le sous corps $\mathbf{C}$ (resp. sous anneau $\mathbf{C}[T]$).

On considère pour un point $a\in\mathbf{P}_1=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ l'isomorphisme holomorphe :

$$\sigma_a:\mathbf{P}_1\to\mathbf{P}_1,\sigma_\infty=\frac{1}{X}\text{ et si }a\in\mathbf{C},\sigma_a=X+a$$

Il induit l'isomorphisme de corps : $\sigma_a^*:\mathbf{K}\to\mathbf{K},\sigma_a^*(f)=f\circ\sigma_a$ qui : « *ramène en l'origine* $0\in\mathbf{C}\subset\mathbf{P}_1$ *pôles et zéros en* a », et par composition avec l'inclusion $\iota:\mathbf{K}=\mathbf{C}(X)\hookrightarrow\mathbf{C}((X))$ du corps $\mathbf{K}$ des fractions rationnelles complexes dans celui des fractions formelles complexes[5], deux familles de plongements :

$$\iota_a=\iota\circ\sigma_a^*:\mathbf{K}\to\mathbf{C}((X)),\quad \iota_a[T]=\tau_{X,T}\circ\iota[T]\circ\sigma_a^*[T]:\mathbf{K}[T]\to\mathbf{C}[T]((X))$$

dits *développement standard des fonctions* (resp. *polynômes*) méromorphes *aux points* $a\in\mathbf{P}_1$.

Définitions. L'*ordre* en un point $a\in\mathbf{P}_1$ *de* $f\in\mathbf{K}$ (resp. $F\in\mathbf{K}[T]$) est :

$$v_a(f)=v(\iota_a(f))\quad\text{(resp. }v_a(F)=v(\iota_a[T](F))$$

celui du dévelopement standard en a de cette fonction (resp. ce polynôme) complexe.

Les sorites des premiers rappels, comme une fonction méromorphe $f\in\mathbf{K}$ est constante si et seulement si elle n'a pas de pôle, donnent la :

Proposition. — (*i*) *Pour tout* $a\in\mathbf{P}_1$ *et tout* $f,g\in\mathbf{K},F,G\in\mathbf{K}[T]$ *on a :*

(*a*) $$v_a(f+g)\geq\min(v_a(f),v_a(g)),\quad v_a(f\cdot g)=v_a(f)+v_a(g)$$

(*b*) $$v_a(F+G)\geq\min(v_a(F),v_a(G)),\quad v_a(F\cdot G)=v_a(F)+v_a(G)$$

(*ii*) *Les constantes du corps* $\mathbf{K}$ *(resp. de l'anneau* $\mathbf{K}[T]$*) sont les fonctions (resp. polynômes) méromorphes d'ordre en tout point* $a\in\mathbf{P}_1$ *non négatif :*

(*a*) $f\in\mathbf{K}$ est une constante ssi pour tout $a\in\mathbf{P}_1$ on a $v_a(f)\geq 0$

(*b*) $F\in\mathbf{K}[T]$ est constante ssi pour tout $a\in\mathbf{P}_1$ on a $v_a(F)\geq 0$

Second rappel : Éléments simples. — Soit $f=\frac{p}{q}\in\mathbf{K}$ pour $p=\sum_{i=0}^d X^{d-i}a_i$ et $q=X^e+\sum_{j=1}^e X^{e-j}b_j\in\mathbf{C}[T]=\mathbf{A}$ deux polynômes complexes, p de degré au plus d, $q=\prod_{z\in\mathbf{C}}(X-z)^{m_z}$ unitaire[6]de degré e, alors pour tout $j,k\in\mathbf{Z}$ il y a des uniques $\alpha_j,\alpha_{z,k}:\mathbf{C}$, nuls si $j>d-e,k>m_z,j,k-1<0$, donnant la *décomposition en éléments simples* de $f=\frac{p}{q}$:

$$f=\sum_{j=0}^{d-e}X^j\alpha_j+\sum_{z\in\mathbf{C}}^{n}\sum_{k=1}^{m_z}\frac{\alpha_{z,k}}{(X-z)^k}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\Big[X^k\alpha_k+\sum_{z\in\mathbf{C}}\frac{\alpha_{z,k}}{(X-z)^k}\Big]$$

$$F=\sum_{i=0}^{n-1}T^if_i:\mathbf{P}_1\backslash\Xi\to\mathbf{C}[T]_n=\{P\in\mathbf{C}[T]\mid\deg P<n\}$$

a ses n applications coefficients f_i restrictions à $\mathbf{P}_1\backslash\Xi$ de fonctions méromorphes sur $\mathbf{P}_1$.

[5] et, pour la seconde famille, de leurs extensions $\sigma_a^*[T],\iota_a[T]$ aux anneaux de polynômes ainsi que du plongement tautologique $\tau_{X,T}:\mathbf{C}((X))[X]\to\mathbf{C}[T]((X))$.

[6] la fonction multiplicité $m:\mathbf{C}\to\mathbf{N},z\mapsto m_z$ est à support $m^{-1}(0)$ fini .

D'où, en appliquant les isomorphismes $\sigma_a^*, a \in \mathbf{P}_1$, les expressions :

$$\sigma_\infty^*(f)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} X^k\left[\alpha_{-k}+\sum_{z\in\mathbf{C}}\frac{\alpha_{z,k}}{(1-Xz)^k}\right]$$

si $a\in\mathbf{C}$
$$\sigma_a^*(f)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left[(X+a)^k\alpha_k+\sum_{z\in\mathbf{C}}\frac{\alpha_{z,k}}{(X+(a-z))^k}\right]$$

Les formules du binôme formel pour tout entier $m\in\mathbf{Z}$ relatif et complexes $u\in\mathbf{C}$:

$$(X+u)^m=\sum_{k=0}^{+\infty} X^k u^{m-k}\binom{m}{k},\quad (1-Xt)^m=\sum_{k=0}^{+\infty} X^k(-t)^k\binom{m}{k}$$

donnent alors les développements standard[7] $\iota_a(f)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} X^n\iota_a(f)_n$ aux points $a\in\mathbf{P}_1$:

$$\iota_\infty(f)_n=\alpha_{-n}+\sum_{z\in\mathbf{C}}\sum_{m\in\mathbf{N}}(-z)^m\binom{n-m}{m}\alpha_{z,n-m}$$

et si $a\in\mathbf{C}$ $\iota_a(f)_n=\alpha_{a,-n}+\sum_{m\in\mathbf{N}}\left[a^m\binom{m+n}{m}\alpha_{m+n}+\sum_{z\in\mathbf{C}\setminus\{a\}}(a-z)^{-(m+n)}\binom{-m}{n}\alpha_{z,m}\right]$

Définitions. Les *parties polaire* et *régulière en* un point $a\in\mathbf{P}_1$ de $f\in\mathbf{K}$ sont :

$$\mathfrak{p}_a(f)=\sum_{n<0} X^n\iota_a(f)_n,\quad \mathfrak{r}_a(f)=\sum_{m\in\mathbf{N}} X^m\iota_a(f)_m=f-\mathfrak{p}_a(f)$$

Ainsi $\mathfrak{p}_\infty(f)=\sum_{m=1}^{d-e}\frac{\alpha_m}{X^m}$ et si $a\in\mathbf{C}$, $\mathfrak{p}_a(f)=\sum_{k=1}^{m_a}\frac{\alpha_{a,k}}{X^k}$, donc $\mathfrak{r}_a(f)$ est une fraction rationelle.

En considérant la fraction rationnelle $F_a=f(X-a)^{m_a}$ qui est définie en a, partie régulière et développements standard en a s'écrivent[8] « Tayloriquement » :

$$\mathfrak{r}_a(f)=\sum_{m\in\mathbf{N}} X^m\frac{D^k(\mathfrak{r}_a(f)(a)}{k!},\quad \iota_a(f)=\sum_{m\in\mathbf{Z}} X^{m-m_a}\frac{D^m(F_a)(a)}{m!}$$

Commentaires bibliographiques

Pour se familiariser avec séries et fractions formelles, faire dans **[Go]**, les exercices **11**, **12** du §27, puis voir **[Ga]**, **C5.** p. 331-353 et **[Go1] II** §**1.6** (p.79-84) et §**3.19** p. 155-165

Les formules explicites des développements standard ne sont pas nécessaires pour la suite. Les amateurs trouveront plus d'exemples de calculs et des applications combinatoire dans **[Wi]**.

---

[7] qui, en substituant $z\in\mathbf{C}$ (resp $u\in\mathbf{C}^*$) à X convergent pour $|z-a|$ (resp. $\frac{1}{|u|}$) assez petit, c'est le dévellopement de Laurent en a de la fonction méromorphe correspondante.

[8] utilisant la formule du produit de Cauchy-Leibniz $\dfrac{D^m(P\cdot F)}{m!}=\sum_{k=0}^{m}\dfrac{D^k(P)}{k!}\cdot\dfrac{D^{m-k}(F)}{(m-k)!}$.

1.2 *Courbes unicursales.*

1.2.1 *Les deux théorèmes de Lűroth.*

Rappel. — Soit $f : \mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_1$ une fonction méromorphe non constante sur la droite projective. *Pour tout $a \in \mathbf{C}$ la préimage $f^{-1}(a)$ est finie non vide, son nombre d'éléments, comptés avec multiplicités $\sum_{z\in f^{-1}(a)} v_z(f-a) = \sum_{p\in f^{-1}(\infty)} v_p(\frac{1}{f})$, est égal à celui de $f^{-1}(\infty)$ et ne dépend donc pas de a, c'est $\deg(f)$, le degré de f.*

De plus pour $p=\sum_{i=0}^{d_p} X^i a_i, q=\sum_{j=0}^{d_q} X^j b_j \in \mathbf{C}[X], a_{d_p}b_{d_q}\neq 0, (p,q)=1$ deux polynômes complexes premiers entre eux avec $f=\frac{p}{q}$ alors : $\deg(f)=\max(d_p,d_q)$.

Lemme. — *Soit $f \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{C}$ une fraction rationnelle non constante alors $\mathbf{K}$ est algébrique sur le corps $\mathbf{C}(f)$ engendré par f, de degré $[\mathbf{K} : \mathbf{C}(f)] \leq \deg(f)$.*

Démonstration. — Le générateur X sur $\mathbf{C}$ du corps $\mathbf{K}$ est, avec les notations du rappel, racine du polynôme $R=p(T)-q(T)f \in \mathbf{C}(f)[T]$ donc $[\mathbf{K} : \mathbf{C}(f)] \leq d_R = \max(d_p,d_q) = \deg(f)$. ∎

Thèorème **(Lűroth XX°)**. — *Soit $\mathbf{K} \supset \mathbf{L} \underset{\neq}{\supset} \mathbf{C}$ sous-corps, non constant, du corps des fractions rationnelles. Alors $\mathbf{K}=\mathbf{C}(\mu)$ est $\mathbf{C}$-engendré par tout coefficient non constant $\mu \in \mathbf{L}$ du polynôme minimal $M=\sum_{i=0}^{n} T^i\mu_i \in \mathbf{L}[T], \mu_n=1$ de X sur $\mathbf{L}$.*

Démonstration. — Si $\mu=\frac{p}{q}$, $N=p(T)-q(T)\mu \in \mathbf{C}(\mu)[T]\backslash\{0\}$ annule le $\mathbf{C}$-générateur X de $\mathbf{K}$. Division euclidienne de N par M et minimalité de M donnent $Q\in\mathbf{L}[T]\backslash\{0\}$ tel que $N=M\cdot Q$.

Par hypothèse 1 et μ sont coefficients de M, donc N a ses coefficients $\mathbf{C}$-linéaires en ceux de M donc, par $(i)(b)$ de la proposition de **1.1**, si $a \in \mathbf{P}_1$, la majoration $v_a(M) \leq v_a(N)$ et : $v_a(N)=v_a(M)+v_a(Q)$ d'où $v_a(Q)\geq 0$, ainsi $(ii)(b)$ de cette proposition donne : $Q\in\mathbf{C}[T]$.

Quotient par $Q\in\mathbf{C}[T]\subset\mathbf{L}[T]$ de $N\in\mathbf{C}(\mu)[T]\subset\mathbf{L}[T]$, $M\in\mathbf{C}(\mu)[T]$ et $[\mathbf{K} : \mathbf{L}]=[\mathbf{K} : \mathbf{C}(\mu)]$. Comme $[\mathbf{K} : \mathbf{C}(\mu)]=[\mathbf{K} : \mathbf{L}][\mathbf{L} : \mathbf{C}(\mu)], [\mathbf{L} : \mathbf{C}(\mu)]=1$ et $\mathbf{L}=\mathbf{C}(\mu)$. ∎

Corollaire **(Lűroth XIX°)**. — *Soit $f,g\in\mathbf{K}$ avec $\mathbf{L}=\mathbf{C}(f,g)$ non constant.*

Alors si $\tau\in\mathbf{L}=\mathbf{C}(\tau)$ engendre $\mathbf{L}$, il y a $f_1,g_1\in\mathbf{K}$ et $E\subset\mathbf{P}_1$ une partie finie telles que $(f,g)=(f_1\circ\tau, g_1\circ\tau)$ et la restriction $(f_1,g_1)_| : \mathbf{P}_1\backslash E \to \mathbf{P}_1$ est injective.

Démonstration. — La première partie est la moitié de l'hypothése : f,g sont dans le corps engendré sur $\mathbf{C}$ par τ. Que τ soit dans le corps $\mathbf{L}$ engendré par f et g donne deux polynômes $A,B\in\mathbf{C}[U,V]$ tels que la fraction rationelle $d=B(f,g)\neq 0$ est non nulle et $\tau=\frac{A(f,g)}{B(f,g)}=\frac{n}{d}$.

Soit $E=\tau(d^{-1}\cup n^{-1}(\{0,\infty\}))$ et $u,v\in\mathbf{P}_1\backslash E$ tels que $(f_1(u),g_1(u))=(f_1(v),g_1(v))$. Par surjectivité de τ, il y a $(r,s)\in\tau^{-1}((u,v))$. Donc : $u=\tau(r)=\frac{A(f,g)}{B(f,g)}(r)=\frac{A(f_1\circ\tau,g_1\circ\tau)}{B(f_1\circ\tau,g_1\circ\tau)}(r)=\frac{A(f_1(\tau(r)),g_1(\tau(r)))}{B(f_1(\tau(r)),g_1(\tau(r)))}=\frac{A(f_1(u),g_1(u))}{B(f_1(u),g_1(u))}=\frac{A(f_1(v),g_1(v))}{B(f_1(v),g_1(v))}=\cdots=v$. Ainsi $(f_1,g_1)_|$ est injective. ∎

Commentaires bibliographiques

Pour un exposé en français du corollaire original **[Lű]** voir **[Jo1]** 3° Ed. **I.609** p. 616-618. Lűroth a lieu sur tout corps k en lieu de $\mathbf{C}$ (considérer les ordres aux points de $\mathbf{P}_1(\overline{k})$ où $\overline{k}\supset k$ est une clôture algébrique de k), comparer avec **[vW]** §**73** p. 221-224, ou **[Ja]** III IV 4 p. 157-160.)

1.2.2 *Exemples de courbes unicursales et algébriques.*

Exemple 1. — Les deux fractions rationnelles $u=\frac{(X^2+1)^2}{X^4+3X^2+1}, v=\frac{X(X^2+1)}{X^4+3X^2+1}\in\mathbf{K}$ engendrent $\mathbf{L}=\mathbf{C}(u,v)$ et induisent $\gamma:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2, \gamma(\lambda)=(u(\lambda),v(\lambda))$, non injective. puisque, $\gamma(\frac{1}{\lambda})=\gamma(\lambda)$.

Comme X et $\frac{1}{X}$[1]sont racines de $P=T^2v-Tu+v\in\mathbf{L}[T]$ ce polynôme est irréductible et le polynôme minimal de X sur $\mathbf{L}$ est $M=T^2-T\frac{u}{v}+1$.

D'aprés Lűroth (théorème de **1.2**) $\mathbf{L}$ est engendré par $\mu=-\frac{u}{v}=-|X+\frac{1}{X}]$, effectivement :

$$u=\frac{(X+\frac{1}{X})^2}{(X+\frac{1}{X})^2+1}=\frac{\mu^2}{\mu^2+1}=u_1(\mu),\quad v=\frac{X+\frac{1}{X}}{(X+\frac{1}{X})^2+1}=-\frac{\mu}{\mu^2+1}=v_1(\mu)$$

Cette *factorisation de Lűroth* induit sur la *droite projective réelle* $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})=\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ une application $\gamma_{1,\mathbf{R}}:\mathbf{P_1}(\mathbf{R})\to\mathbf{P_1}(\mathbf{R})^2$ injective, mais l'application induite $\gamma_1:\mathbf{P_1}\to\mathbf{P_1}^2$ sur toute la droite projective n'est injective que dans le complémentaire de $\gamma_1{}^{-1}((\infty,\infty))=\{-i,i\}$, c'est conforme au corollaire de **1.2**, puisque $\{-i,i\}$ est image par τ de l'ensemble des pôles[2]w du numérateur $n=-u$ et du dénominateur $d=v$ de l'expression $\tau=\frac{-u}{v}$ en fonction de $f=u,g=v$.

En éliminant[3]le paramètre μ entre les coordonnées affines centrés en $(0,0)$ (resp. (∞,∞)) (u,v) (resp. $(s=\frac{1}{u},t=\frac{1}{v}$) du *carré projectif* $\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1$, on obtient les équations affines :

$$v^2+u^2-u=0,\quad st^2-s^2-t^2=0$$

de l'image de γ_1, équations que l'on peut globaliser en l'équation bi-homogène :

$$T^2V^2+U^2W^2-TUW^2=0$$

en les *coordonnées homogènes* $[T:U]$ et $[V:W]$ des *axes horizontal et vertical* du carré projectif. De même $c:\mathbf{P}_1\to\mathbf{P}_2, c(\lambda)=[u:v:1]$ de la droite projective dans le *plan projectif complexe*, définie par les deux fractions rationnelles u et v paramétre injectivement[4]la conique déquation :

$$U^2+W^2-UW=0$$

Définition. Une courbe est *unicursale* si on peut la paramétrer par des fractions rationnelles.

Exemple 2. — La cubique d'équation homogène $U^2W=V^3+VW^1$ n'est pas unicursale.

Démonstration. — Sinon la paramétrisation $[u:v:1]$ aurait une factorisation de Lűroth $[u_1:v_1:1]$. Comme $(u_1)^2=(v_1-i)v_1(v_1+i)$ la seconde coordonnée v_1 serait de degré deux et prendrait les valeurs $-i,0,i$ avec multipicité au moins deux, ce qui n'est pas puisque $\frac{\lambda^2a+\lambda 2b+c}{\lambda^2d+\lambda 2e+f}$ prend la valeur μ multiplement que si $(b-\mu e)^2=(a-\mu d)(c-\mu e)$. ∎

Commentaires bibliographiques

L'exemple 1 est copillé dans **[Lű]**. Pour plan projectif et courbes algébriques voir[5]**[Wk]**, des prolongements sur l'exemple 2 voir **[Si-Ta]**, **[Sl] I** et **[Jo]** I VII.

---

[1] image de X par le $\mathbf{L}$-isomorphisme non trivial σ^*_∞ de $\mathbf{K}$.
[2] car $0=w^4+3w^2+1=w^2(w^2+\frac{1}{w^2}+3)=w^2[(w+\frac{1}{w})^2-2+3]=w^2[\tau(w)^2+1]$ et $w\neq 0$.
[3] $\mu^2=\frac{u}{1-u}=\frac{1}{1-s}$, d'où $\mu^2+1=\frac{1}{1-u}=\frac{s}{1-s}$ et $v^2=\frac{\mu^2}{(\mu^2+1)^2}=u(1-u)$ et $t^2=\frac{(\mu^2+1)^2}{\mu^2}=\frac{s^2}{1-s}$.

[4] contrairement à γ, ce n'est pas toujours le cas : $d=(x:y:1):\mathbf{P}_1\to\mathbf{P}_2, x(\lambda)=\lambda^2-1, y(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2$ ne l'est pas ($d(-1)=[0:0:1]=d(1)$), c'est une paramétrisation rationelle de la cubique d'équation $U^3+U^2W-V^2W=0$ (elle a été obtenue en posant $\lambda=\frac{Y}{Y}$, pente de la droite joignant ce *point double* à un point de la courbe qui en est distinct).
[5] dont le chapitre IV, paramétre les courbes algébriques par des fractions formelles.

1.3 *Branches analytiques, définition et sorites des surfaces de Riemann.*

1.3.1 *Branches analytiques d'une courbe.*

Rappels : fonctions définies en intégrant un paramètre et principe de l'argument.

Soit $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbf{C}$ deux ouverts du plan complexe $\Gamma \subset \mathcal{U}$ un disque fermé inclus dans le premier.
A *Soit* $\phi : \partial\Gamma \times \mathcal{V} \to \mathbf{C}$ *de sections à gauche et à droite* ${}_u\phi : \{u\} \times \mathcal{V} \to \mathbf{C}, \phi_v : \partial\Gamma \times \{v\} \to \mathbf{C}$, *avec* ϕ *continue et les* ${}_u\phi, u \in \partial\Gamma$ *holomorphes alors* $\Phi : \mathcal{V} \to \mathbf{C}, \Phi(v) = \int_{\partial\Gamma} \phi_v$ *est holomorphe.*
B Soit $g : \mathcal{U} \to \mathbf{C}$ holomorphe. La *multiplicité en* $u \in \mathcal{U}$ de f est $\nu(g; u) = v_u(g - g(u))$:

$\nu(g; u) = \infty$ si f est constante près de u, sinon $\nu(g; u) = 1 + v_u(g') = 1 + \min(\{n \in \mathbf{N} \mid g^{(n+1)}(u) \neq 0\}$

C *Si* $0 \notin g(\partial\Gamma)$, *alors pour tout* $h : \mathcal{U} \to \mathbf{C}$ *holomorphe on a :*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \frac{g'}{g} h = \sum_{u \in g^{-1}(0) \cap D} \nu(g; u) h(u)$$

D *Si il y a* $k : h(\mathcal{U}) \to \mathbf{C}$ *tel que* $g = k \circ h$ *(pour tout* $u \in \mathcal{U}$ *la valeur de* g *en* u *ne dépend que de celle* h*) alors soit* g *est constante soit* $h(\mathcal{U})$ *est un ouvert et* k *est holomorphe sur* $h(\mathcal{U})$.

Définitions. L'*ensemble algébrique du plan complexe affine* associé au polynôme non nul $f \in \mathbf{C}[U, V] \setminus \{0\}$ à coefficients complexes en deux variables est :

$$\mathcal{Z}(f) = (Z(f), f) \quad \text{où} \quad Z(f) = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid f(u, v) = 0\}$$

Il est coupé par $\mathbf{C} \times \{v\}$, l'*horizontale d'ordonnée* v, en l'ensemble algébrique $(f_v^{-1}(0), f_v)$ des zéros du *spécialisé à droite*[1] $f_v = f(U, v) \in \mathbf{C}[V]$ en v.

Définitions. La *forme horizonlement homogène associée au* un polynôme en deux variables $f = \sum_{i=0}^{d} U^i a_i \in \mathbf{C}[U, V], a_i \in \mathbf{C}[V], a_d \neq 0$ de U*-degré* d est :

$$F = \sum_{i=0} T^{d-i} U^i a_i \in \mathbf{C}[V][T, U], \text{ on a } F(T, U, V) = T^d f(\frac{U}{T}, V)$$

Si le V-degré de f est e, la *forme bi-himogène associée à* f est :

$$\overline{F} = T^d f(\frac{U}{T}, \frac{V}{W}) W^e \quad [= F(T, U, \frac{V}{W}) W^e]$$

La *fermeture dans* le carré projectif $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ de l'ensemble algébrique $\mathcal{Z}(f)$ est :

$$\overline{\mathcal{Z}}(f) = (\overline{Z}(f), \overline{F}) \quad \text{où} \quad \overline{Z}(f) = \{([t : u], [v : w]) \in \mathbf{C} \times \mathbf{P}_1 \mid \overline{F}(t, u, v, w) = 0\}$$

On note $\pi = \mathrm{pr}_2 : \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_1$ la projection du carré projectif sur la droite verticale.

Définitions. La *multiplicité (horizontale) de* $\overline{\mathcal{Z}}(f)$ *en* un point $M \in \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ de coordonnées $M = (p, q), p = [t : u], q = [v : w] \in \mathbf{P}_1$ est $\mu_{\overline{\mathcal{Z}}(f)}(M) = v_M(F_q)$, l'ordre

[1] image de f par le morphisme d'anneau $\rho_v : \mathbf{C}[U, V] \to \mathbf{C}[V], \rho_v(U) = U, \rho_v(V) = v$.

de $Tu-Ut$ comme facteur de la forme F_q, elle est nulle si et seulement si $M\notin\overline{Z}(f)$. Si $t\neq 0$, $\mu_M(\overline{Z}(f))=\nu_0(z\mapsto F_q(t,u+z))$, et si $u\neq 0$ on a : $\mu_M(\overline{Z}(f))=\nu_0(z\mapsto F_q(t+z,u))$, en particulier si $tu\neq 0, \nu_0(z\mapsto F_q(t,u+z))=\nu_0(z\mapsto F_q(u+z,t))$.

D'où une fonction *multiplicité*[2] $\mu:\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1\to\{\infty\}\cup\mathbf{N}, M\mapsto\mu_M(\mathcal{Z}(f))$.

La *partie horizontalement* (ou *h-*) *réguliere*[3] $\overline{Z}(f)_{hr}$ de $\overline{Z}(f)$ est le plus grand ouvert de de cet ensemble algébrique sur lequel la multiplicité μ est finie et localement constante.

Si $f=g\prod_{[v:1]\in\Upsilon_\infty}(V-v)^{\nu_v}, g_v\neq 0$ alors $\overline{Z}(g)\subset\overline{Z}(f)=\overline{Z}(g)\cup_{q\in\Upsilon_\infty}\mathbf{P}_1\times\{q\}$ et si $M\in\overline{Z}(f)\backslash\cup_{q\in\Upsilon_\infty}\mathbf{P}_1\times\{q\}\subset\overline{Z}(g)$ alors : $\mu_M(\overline{Z}(f))=\mu_M(\overline{Z}(f))<\infty$.

Hypothèse SCV. — On suppose désormais[4] $\overline{Z}(f)$ de multiplicité partout finie.

Soient $\check{f}_1=U^d f(\frac{1}{U},V), \check{f}_2=f(U,\frac{1}{V})V^e, \check{f}_3=U^d f(\frac{1}{U},\frac{1}{V})V^e\in\mathbf{C}[U,V]$, les trois polynômes aux inverses de f. Les involutions $\tau_1,\tau_3,\tau_3=\tau_1\circ\tau_2$ de $\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1$:

$$\tau_1:([t:u],q)\mapsto([u:t],q), \tau_2:(p,[v:w])\mapsto(p,[w:v])$$

étant holomorphes et échangeant les multiplicité de $\overline{Z}(f),\overline{Z}(\check{f}_i)\subset\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1$, on peut pour étudier la multiplicité au voisinage d'un point $M=(p,q)\in\overline{Z}(f)$, supposer de plus que $(p,q)=(u,v)\in Z(f)$ $[=\overline{Z}(f)\cap\mathbf{C}^2]$ est dans le plan affine.

Proposition. — *Soit $\Gamma\times\Delta\ni M_0=(u_0,v_0)\in Z(f)$ un bidisque vérifiant :*

$$\big(\Gamma\times\{v_0\}\big)\cap Z(f)=\{M\}\quad\text{et}\quad\big(\partial\Gamma\times\Delta\big)\cap Z(f)=\emptyset$$

et dont le centre M_0 est de multiplicité $\mu_0=\mu_{M_0}(Z(f))>0$ positive alors :

(i) Les points du disque horizontal $\Gamma\times\{v\}, v\in\Delta$ qui sont dans $Z(f)$ sont en nombre, compté avec multiplicité, $N_\Gamma:\Delta\to\mathbf{N}, N_\Gamma(v)=\sum_{(u,v)\in\Gamma\times\{v\}}\mu(u,v)=\mu_0$ ne dépendant pas de $v\in\Delta$. Ainsi μ est semi continue supérieurement.

(ii) La fonction $h:\Delta\to\mathbf{C}, h(v)=\sum_{(u,v)\in\Gamma\times\{v\}}\frac{\mu(u,v)}{\mu_0}u$, moyenne pondérée par multiplicité des points de $Z(f)\cap\big(\Gamma\times\{v\}\big)$ est holomorphe sur Δ.

Démonstration. — Le $\mathbf{C}$ des rappels pour $g=f_v$ et $h=1$ la fonction « constante 1 », puis $h=\frac{1}{\mu_0}\mathrm{Id}_{\mathcal{U}}=\frac{1}{\mu_0}\mathrm{pr}_{1|\mathcal{U}\times\{v\}}$ donne : $N_\Gamma(v)=\int_{\partial\Gamma}\frac{f'_v}{f_v}$ et $h(v)=\int_{\partial\Gamma}\frac{1}{\mu_0}\frac{f'_v}{f_v h}$.

Le $\mathbf{A}$ des rappels avec $\phi=\frac{f'_v}{f_v}$, puis $\phi=\frac{1}{\mu_0}\frac{f'_v}{f_v}h$, établit alors (i) et (ii). ∎

Corrolaire et **définition**. — *Si, avec les notations de la proposition, ce point M_0 est limite de points $M_i\neq M_0$ de multiplicité $\mu(M_i)=\mu_0$, le « graphe couché » :*

$$\mathcal{V}^h=\{(h(v),v)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}\,|\,v\in\Delta\}$$

est un voisinage de M dans $Z(f)$. Ainsi $M_0\in Z(f)_{hr}$ est dans la partie régulière et $\mathbf{t}=\pi_|:\mathcal{V}^h\to\Delta$ est un homéomorphisme, dit uniformisante en M de $Z(f)_{hr}$.

---

[2] (*horizontale*), de valeur ∞ en $M=(p,q)$ si $q=[v,1]$ et l'horizontale $\mathbf{P}_1\times\{q\}\subset\overline{Z}(f)$ d'ordonnée q est incluse dans $\overline{Z}(f)$, *c. a d.* si $f=g\cdot(V-v)^{\nu_v}, g\in\mathbf{C}[U,V], \nu_v>0, g_v\neq 0$.

[3] ou l'*ensemble de ses points h-réguliers*.

[4] Quite à remplaçer f par g. Le sigle **SCV** est pour pour *sans composantes verticales*.

Démonstration. — Par hypothèse et le **B** des rappels le point M_0 et les points $M_i, i>0$ dont il est limite anullent les μ_0 polynômes $f_k = \frac{\partial f}{\partial U^k}, 0 \leq k < \mu_0$.

D'autre part, supposant que tous les $M_i \in \Gamma \times \Delta$ sont dans le bidisque $\Gamma \times \Delta$, les deux parties (i) et (ii) de la proposition donnent, pour $i \in \mathbf{N}, M_i = (h(\pi(M_i)), \pi(M_i))$.

Ainsi $v_0 = \pi(M_0)$ est zéro non isolé des μ_0 fonctions holomorphes $\varphi_k : v \mapsto f_k(h(v), v)$. Ces fonctions sont donc identiquement nulle et par le **B** des rappels tous les points du « graphe couché » $\mathcal{V}^h$ sont de multiplicité μ_0. Ainsi, par (i) de la proposition, $\mathcal{V}^h = Z(f) \cap \Gamma \times \Delta$. ▮

Par contraposé du corollaire les points de $\Sigma = \overline{Z}(f) \setminus \overline{Z}(f)_{hr}$ sont isolés. Par compacité de $\overline{Z}(f)$, l'ensemble Σ et $\Upsilon = \pi(\Sigma)$ sont finis.

Définitions. Un *disque* Δ de la droite projective $\mathbf{P}_1$ est un disque ouvert soit de $\mathbf{C}_\infty = \{\infty\} \cup \mathbf{C} \setminus \{0\} \subset \mathbf{P}_1$, soit de $\mathbf{C}_0 = \mathbf{P}_1 \setminus \{\infty\} \subset \mathbf{P}_1$.

Les homographies agissant transitivement sur les « cercles droite » de $\mathbf{P}_1$,
Pour tout $q \in \Delta$ *et tout* $r \in]0,1]$ *il y a* $q' \notin \Delta$ *,tel que :* $\Delta = \{p \in \mathbf{P}_1 \mid \left|\frac{p-q}{p-q'}\right| < r\}$.

Le *disque unité* est $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$, son bord $\partial \mathbf{D} = \mathbf{U}$ est le *cercle unité*[5]. L'application $\mathfrak{u} : \Delta \to \mathbf{D}, \mathfrak{u}(p) = \frac{p-q}{p-q'}$ est dite *uniformisante centrée au point* $q \in \Delta$ du disque Δ.

Pour tout $r \in [0,1]$ on note $\mathfrak{H}_r = \{z \in \mathbf{C} \mid \left|\frac{z+1}{z-1}\right| < r\}$. Si $r < 1$ ce sont des disques d'uniformisantes centrées en -1 d'union croissante le *demi-plan à gauche*

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) < 0\} = \exp^{-1}(\mathbf{D})$$

pré-image du disque unité $\mathbf{D}$ par l'exponentielle. On note $\mathfrak{e} = \exp_{|\mathfrak{H}}$ et, si $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $\mathfrak{e}_n : \mathfrak{H} \to \mathbf{D}, \mathfrak{e}_n(z) = \mathfrak{e}(\frac{z}{n}); \mathfrak{p}_n : \mathbf{D} \to \mathbf{D}, \mathfrak{p}_n(v) = v^n$, on a la factorisation $\mathfrak{e} = \mathfrak{p}_n \circ \mathfrak{e}_n$.

Définition. Une *branche de* $\overline{Z}(f)$ au dessus[6]de $q \in \mathbf{P}_1$ est $b = (\mathcal{B}, \mathfrak{u})$ pour :

(1) $\mathfrak{u}$ une uniformisante centrée en $q \in \Delta \subset \mathbf{P}_1$ d'un disque contenant q, de disque pointé correspondant $\Delta' = (\Delta \setminus \{p\}), \Delta' \cap \Upsilon = \emptyset$ disjoint de $\Upsilon = \pi(\Sigma)$.

(2) $\mathcal{B}$, le *support* de b, composante connexe de $\overline{Z}(f) \cap \pi^{-1}(\Delta')$ $[= \overline{Z}(f)_{hr} \cap \Delta']$. Elle est dite *régulière* s'il y a $M \in \overline{Z}(f)_{hr}$ dont $\{M\} \cup \mathcal{B}$ est voisinage dans $\overline{Z}(f)$.

THÉORÈME et **définitions**. — *Soit* $b = (\mathcal{B}, \mathfrak{u})$ *branche de* $\overline{Z}(f)$ *au dessus de* $q \in \mathbf{P}_1$. *Alors il y a un entier positif* $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ *dit degré (horizontal) de la branche et un homéomorphisme* $\mathfrak{t}' : \mathcal{B} \to \mathbf{D}' = \mathbf{D} \setminus \{0\}$ *dit uniformisante de la branche* b *tels que :*

$$\pi_{\mathcal{B}} \stackrel{Def}{=} \mathfrak{u} \circ \pi_{|\mathcal{B}} = \mathfrak{p}_n \circ \mathfrak{t}'$$

Démonstration. — Par proposition et corrollaire pour tout $M \in \mathcal{B}$ il y a $h_\delta : \delta \to \mathbf{P}_1$ holomorphe sur un disque $\delta = \delta_M \subset \Delta'$ et de graphe couché voisinage de M dans $\overline{Z}(f)$ (donc dans $\mathcal{B}$).
On note $s_\delta : \delta \to \mathcal{B}, s_\delta(z) = (h_\delta(z), z)$ la *section de* $\pi_{\mathcal{B}}$ ainsi définie, de δ sur l'ouvert $s_\delta(\delta)$ de $\mathcal{B}$.

Affirmation 1. — Soit $s, s' : \mathfrak{O} \to \mathcal{B}$ continues sur un ouvert de $\mathfrak{H}$ avec $\pi_{\mathcal{B}} \circ s = \mathfrak{e} = \pi_{\mathcal{B}} \circ s'$alors $\{z \in \mathfrak{O} \mid s(z) = s'(z)\}$ est ouvert-fermé de $\mathfrak{O}$. Ainsi si $\mathfrak{O}$ est connexe, soit il est vide, soit $s = s'$.

Démonstration. — Fermé car $s - s'$ est continue[7], et ouvert car, si $\tilde{\delta}_z$ est la composante de z dans $\mathfrak{e}^{-1}(\delta_{s(z)})$, le corrollaire donne $\pi_{\mathcal{B}} \circ s_{|\tilde{\delta}} = \mathrm{pr}_2 \circ s_\delta \circ \mathfrak{e}_{|\tilde{\delta}} = \pi_{\mathcal{B}} \circ s'_{|\tilde{\delta}} : \tilde{\delta} \to \mathbf{P}_1$. □

[5] stable par multiplication on note de même $\mathbf{U} \subset \mathbf{C}^\times$, le *sous-groupe du cercle* correspondant.

[6] ou *d'ordonnée, à l'étage,... q.*

[7] et $\mathcal{B}$ séparé!

Affirmation 2. — Si $M_0 \in \mathcal{B} \cap \pi_{\mathcal{B}}^{-1}(e^{-1})$ il y a $s = s_1$, *relèvement à* $\pi_{\mathcal{B}}$ *de* $\mathfrak{e}$ *tel que* $s(-1) = M_0$:

Si $I_{M_0} = \{r \in [0,1] \,|\,$ t. q. il y a $s_r : \mathfrak{H}_r \to \mathcal{B};\ \pi_{\mathcal{B}} \circ s_r = \exp_{|\mathfrak{H}_r};\ s(-1) = M_0\}$ alors $I_{M_0} = [0,1[$

Démonstration. — Soit $r \in \overline{I_{M_0}}$ limite de $r_i \in I_{M_0}$. Par l'affirmation 1 les s_{r_i} sont uniquement déterminé, ils se recollent donc en un s_r, ainsi I_{M_0} est fermé. □

Si $r \neq 1, z \in \{-1\} \cup \mathrm{Fr}(\mathfrak{H}_r)$ et $z \in \delta_z = \delta \subset \overline{\delta} \subset \Delta' = \pi(\mathcal{B})$ est un disque le contenant et de fermeture incluse dans l'image verticale de la branche et sur lequel une section $s_\delta = s_{\delta_z}$ est définie. La compacité de $\mathcal{B} \cap \mathfrak{u}^{-1}(\overline{\delta})$ produit un point $N \in \mathcal{B} \cap \overline{s_r(\mathfrak{H}_r)}$ limite de points $N_i \in s_{r_i}(\mathfrak{H}_{r_i})$.

Comme si $z, z' \in \mathrm{Fr}(\mathfrak{H}_r)$ et $\pi_{\mathcal{B}}(N_i) \in \delta_z \cap \delta_{z'}$ on a $s_{\delta_z}(\pi_{\mathcal{B}}(N_i)) = s_r(\pi_{\mathcal{B}}(N_i)) = s_{\delta_{z'}}(\pi_{\mathcal{B}}(N_i))$ et les intersections $\delta_z \cap \delta_{z'}$ et $\delta_z \cap \mathfrak{H}_r$ sont connexes, l'affirmation 1 produit une section recollant les s_{δ_z} avec s_r sur un voisinage de $\overline{\mathfrak{H}_r}$ dans $\mathfrak{H}$, qui par compacité de $\overline{\mathfrak{H}_r}$, contient $\mathfrak{H}_{r'}$ où $r' > r$.

Ainsi le fermé I_{M_0} est ouvert dans l'intervalle connexe $[0,1]$, contenant 0, il lui est égal.□□

Les $s_\delta(\delta)$ étant ouverts dans $\mathcal{B}$, la section s est ouverte et fermée donc[8]surjective.

Soit $v \in \Delta'$, comme $\mathrm{card}(\mathcal{B} \cap \pi^{-1}(v)) \leq d$, les $s(z + 2\pi i n), n \in \mathbf{Z}$ ne sont pas distinct.

Il y a donc un plus petit entier positif $n \in \mathbf{N} \backslash \{0\}$ tel que pour un $z \in \mathfrak{H}$ on a $s_1(z + 2\pi i n) = s(z)$. Par l'affirmation 1 ceci a lieu en tout $z \in \mathfrak{H}$ et $s = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{e}_n$ se factorise par $\mathfrak{e}_n$. Par minimalité de n, cette surjection ouverte $\mathfrak{s}$ est injective donc un homéomorphisme et $\mathfrak{t} = \mathfrak{s}^{-1}$ convient. ▮

On note $\widehat{\Sigma}$ l'ensemble des branches non régulières, de quotient $\widetilde{\Sigma}$ en identifiant deux branches $(\mathcal{B}', \mathfrak{u}'), (\mathcal{B}'', \mathfrak{u}'')$ si il y a une branche b de support $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}''$.

On choisit une branche $(\mathcal{B}_{\tilde{b}}, \mathfrak{u}_{\tilde{b}}), \tilde{b} \in \widetilde{\Sigma}$ par classe d'équivalence.

Définitions. Les ouverts de $\overline{Z}(f)_{hr}$ et les $\widehat{\mathcal{B}} \overset{Def}{=} \mathcal{B} \cup \{\tilde{b}\}, \tilde{b} \in \widetilde{\Sigma}, (\mathcal{B}, \mathfrak{u}) \in \tilde{b}$ sont les *ouvert de* la *courbe* $\widehat{\overline{Z}(f)} \overset{Def}{=} \overline{Z}(f)_{hr} \amalg \widetilde{\Sigma}$, *normale*[9] *associée au polynôme* $f \in \mathbf{C}[U,V]$.

La *branche complétée* de $b = (\mathcal{B}, \mathfrak{u})$ est $\hat{b} = (\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathfrak{u}})$ où :

$$\widehat{\mathfrak{u}} : \widehat{\mathcal{B}} \to \mathbf{D}, \hat{\mathfrak{u}}(\tilde{b}) = 0 \text{ et si } M \in \mathcal{B}, \hat{\mathfrak{u}}(M) = \mathfrak{u}(M)$$

Complément. — *La branche $\mathcal{B}$ est holomorphiquement paramétrée par :*

$$\mathfrak{s} = \iota \circ \mathfrak{t}^{-1} : \Delta' \to \mathcal{B} \hookrightarrow \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$$

qui s'étend en $\hat{\mathfrak{s}} : \widehat{\mathcal{B}} \to \overline{Z}(f) \subset \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ injective telle que, pour toute branche $b' = (\mathcal{B}, \mathfrak{u}')$ de même support $\mathcal{B}$, la composée $\hat{s} \circ \hat{\mathfrak{u}}^{-1} : \mathbf{D} \to \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ est holomorphe.

Démonstration. — La première partie suit de $\mathbf{D}$ des rappels puisque $s = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{e}_n$ et $s, \mathfrak{e}_n$ sont holomorphes, la seconde partie, comme $\overline{\mathcal{B}} \backslash \mathcal{B} \subset \overline{Z}(f) \cap \pi^{-1}(\hat{\mathfrak{u}}'(\tilde{b}))$ est fini, suit alors du théorème de Riemann, dit des singularités inexistentes. ▮

Commentaires bibliographiques

Le passage d'un polynôme f à sa forme verticalement homogène F est à la base de l'élimination, voir **[Mu]** 2§2C, **[vW]** §**34-35** et §**130**, et **[Wb]** §53 à 57.

Pour les courbes algébriques planes voir **[Gi]** chap I §3 à 5 p. 5-14. (et **[Wk]**).

Pour plus de détails sur leur étude locale voir **[Wl]** (et **[Wk]**).

---

[8] puisque $\mathcal{B}$ est connexe.

[9] Sous **SCV**, sans **SCV** avec les notation du haut de la p. 8 $\widehat{\overline{Z}(f)} = \widehat{\overline{Z}(g)} \amalg_{q \in \Upsilon_\infty} \mathbf{P}_1 \times \{q\}$.

1.3.2 *Applications holomorphes entre surfaces de Riemann.*

Définitions. Une *carte (complexe)* sur un espace topologique X est la donnée de $\underline{\varphi}=(\mathcal{U},\varphi)$ où $\varphi:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ est homéomorphisme, la *coordonnée de la carte*, de source un ouvert $\overline{\mathcal{U}}\subset X$ de X, l'*ouvert de la carte*, et but un ouvert $\mathcal{V}\subset\mathbf{P}_1$ de la droite projective.

Soit $(\mathcal{U}_1,\varphi_1),(\mathcal{U}_2,\varphi_2)$ deux cartes sur X, d'intersection notée $\mathcal{U}_{1,2}=\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\mathcal{U}_2\cap\mathcal{U}_1=\mathcal{U}_{2,1}$. Ces deux cartes sont *(holomorphiquement) compatibles* si l'application :

$$\psi_{2,1}=\varphi_{2|\mathcal{U}_{1,2}}\circ({\varphi_1}^{-1})_{|\varphi_1(\mathcal{U}_{2,1})}:\varphi_1(\mathcal{U}_{2,1})\to\varphi_2(\mathcal{U}_{1,2})$$

dite *de transition de la carte* $\underline{\varphi}_2$ *à la carte* $\underline{\varphi}_1$ est holomorphe. Un *Atlas* de X est une famille $\Phi=\left(\underline{\varphi}_i=(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\right)_{i\in I}$ de cartes deux à deux compatibles dont les ouverts couvrent $X=\cup_{i\in I}\mathcal{U}_i$.

Définition. Une *surface de Riemann* est un atlas Φ sur un espace topologique séparé X. Par abus on sous-entend l'atlas et plutôt que $\mathcal{X}=(\Phi,X)$, on la note X .

Exemples 1 : surfaces de Riemann. — (i) *surface de Riemann vide* $\emptyset$.

(ii) *Droite projective* $\mathbf{P}_1$, dite aussi *sphère de Riemann*[1].

(iii) *Union disjointe de surfaces de Riemann.*

(iv) *Courbe normale* $\widehat{\overline{Z}(f)}$ *associée à un polynôme non nul* $f\in\mathbf{C}[U,V]\backslash\{0\}$.

Si $f=g\prod_{[v:1]\in\Upsilon_\infty}(V-v)^{\nu_v},g_v\neq 0$. Si $g\in\mathbf{C}$, alors $\widehat{\overline{Z}(g)}=\emptyset$.

Sinon par théorème, corollaire et rappel **D** de **1.3.1**, un atlas de $\widehat{\overline{Z}(g)}$ est formé des uniformisantes de $\overline{Z}(g)_{hr}$ et de celles complétées de ses branches non régulières. Donc, d'après $(i),(ii)$ et (iii), la courbe normale $\widehat{\overline{Z}(f)}=\widehat{\overline{Z}(g)}\amalg_{q\in\Upsilon_\infty}\mathbf{P}_1\times\{q\}$, associée à f est munie d'une structure de surface de Riemann. ∎

(v) *Surface de Riemann quotient d'un groupe Kleinien.* Soit $G\subset\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ un groupe d'homographies respectant un ouvert $\mathcal{X}\subset\mathbf{P}_1$ de la droite projective de sorte que[2]tout $\tilde{x}\in\mathcal{X}$ a un voisinage $\tilde{x}\in\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{x}}\subset\mathcal{X}$ tel que pour $\mathrm{Id}\neq g\in G, g(\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{x}})\cap\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{x}}=\emptyset$, l'application quotient $\rho:\mathcal{X}\to G\backslash\mathcal{X}\overset{Def}{=}X$ induit des homéomorphismes :

$$\rho_{|\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{x}}}:\tilde{\mathcal{U}}_{|\tilde{x}}\to G\backslash\rho^{-1}(\rho(\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{x}}))\overset{Def}{=}\mathcal{U}_x\subset X$$

sur des voisinages des $x=\rho(\tilde{x})\in X$, inverses des coordonnées $\varphi_x:\mathcal{U}_x\to\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{x}}\subset\mathbf{P}_1$ de la *surface de Riemann associée au groupe Kleinien* G *agissant sur* $\mathcal{X}\subset\mathbf{P}_1$.

a) Translations, cycliques et réseaux. Soit $\omega\in\mathbf{C}\backslash\{0\},\omega'\in\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$. Le groupe $\Pi=\mathbf{Z}\omega$ et le *réseau* $\Lambda=<\omega',\omega'>=\{m\omega+n\omega'\mid m,n\in\mathbf{Z}\}$ agissent discrètement librement[3]sur $\mathcal{X}=\mathbf{C}$.

b) Groupe multiplicatif cyclique $\mathbf{U}\underset{\neq}{\subset}\Lambda_{\lambda,m}=\{\lambda^{2n}\mid n\in\mathbf{Z}\}\subset\mathbf{C}^\times$ agissant sur $\mathcal{X}=\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

---

[1] Un atlas à une seule carte l'identité de $\mathbf{P}_1$!

[2] On dit alors que l'action de G sur $\mathcal{X}$ est *discrète libre*.

[3] Soit δ la plus petite valeur non nulle de la forme quadratique (définie positive, car $\overline{\omega}\omega'\notin\mathbf{R}$) $|\omega m+\omega' n|^2=|\omega|^2m^2+2\Re(\overline{\omega}\omega')mn+|\omega'|^2n^2$. Les ouverts $\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{x}}=\{4|\tilde{u}-\tilde{x}|^2<\delta\}$ conviennent.

c) Groupe de congruence $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid a \equiv 1 \equiv d\ (4), b \equiv 0 \equiv c\ (2)\right\}$ sur $\mathbf{H} = -i\mathfrak{H}$.

Scolie et **Défnition**. — Soit $\underline{\varphi} = (\mathcal{U}, \varphi)$ une carte sur un espace X, compatible avec chaque carte d'une famille $\Phi = (\underline{\varphi}_i = (\mathcal{U}_i, \varphi_i))_{i \in I}$ de carte sur X. Alors pour toute homographie $h \in PGL_2(\mathbf{C})$ et ouvert $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ de l'ouvert de $\underline{\varphi}$, le couple $h(\underline{\varphi})_{|\mathcal{U}'} = (\mathcal{U}', h \circ \varphi_{|\mathcal{U}'})$ est une carte, dite *sous-carte projective de* $\underline{\varphi}$ qui est compatible avec toutes les sous-cartes projectives de Φ. ▮

Ainsi supposant désormais les atlas projectivement locaux :

D'une part tout point $x \in X$ d'une surface de Riemann est $x \in \mathcal{U}$ dans l'ouvert d'un carte $\underline{u}_x = (\mathcal{U}, u_x)$ dont la coordonnée $u_x : \mathcal{U} \to \mathbf{D}$, de but le disque unité, l'envoit $u_x(x) = 0$ au centre. Une telle coordonnée $u = u_x$ est dite *uniformisante (locale)*[4] *en* x *de* X *(définie sur l'ouvert* $\mathcal{U}$*).*

D'autre part si $f : X \to Y$ est continue entre surfaces de Riemann, pour tout point $x \in X$ il y a des uniformisantes $v_{f(x)} : \mathcal{V} \to \mathbf{D}, v(f(x)) = 0, u_x : \mathcal{U} \to \mathbf{D}, u(x) = 0$ en $f(x) \in Y$ et $x \in X$ de Y et X respectivement, dites *paire* (v, u) *adaptée à* f *en* $f(x)$ *et* x telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.

L'application $f_{v,u} = v_{f(x)} \circ f_{|\mathcal{U}} \circ u_x^{-1} : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ du disque unité dans lui même, vérifiant :

$$v_{f(x)} \circ f_{|\mathcal{U}} = f_{v,u} \circ u_x$$

est dénommée *expression de* f *pour la paire* (v, u) *d'uniformisantes adaptées pour* $x \in X$.

coScolie et **Définition**. — *Soit* $f : X \to Y$ *continue entre surfaces de Riemann et munie d'une famille* $(v_i, u_i)_{i \in I}$ *de paires adaptées dont les expressions* f_{v_i, u_i} *sont holomorphes et telles que* $X = \cup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ *est recouverte par les ouverts source des* u_i.

Alors, pour toute paire (v, u) *adaptée, l'expression* $f_{v,u}$ *est holomorphe.* □
L'application $f : X \to Y$ *est alors dite holomorphe (ou morphisme) de* X *vers* Y.

Exemples 2 : morphismes. — (i) Si X est surface de Riemann $\emptyset \to X$.

(ii) Les morphismes $\phi : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ sont[5] les fractions rationnelles $f \in \mathbf{K}$.

(iii) L'union disjointe $\amalg_{i \in I} f_i : \amalg_{i \in I} X_i \to Y$ d'une famille d'applications holomorphes de même but $(f_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ est holomorphe.

(iv) Les projections $\pi, \eta : \widehat{\widehat{Z}}(f) \to \mathbf{P}_1$ verticale et horizontale sur la droite projective de la courbe normale associée à $0 \neq f \in \mathbf{C}[U, V]$ sont holomorphe.

(v) Soit un ouvert de la droite projective $\mathcal{X} \subset \mathbf{P}_1$ muni d'une action discrète libre d'un groupe d'homographies G alors une application de son quotient $f : G \backslash \mathcal{X} \to Y$ vers une surface de Riemann Y est holomorphe si et seulement si la composée $f \circ \rho : \mathcal{X} \to Y$ est holomorphe.

$a1)$ L'application $E : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}, E(z) = \exp(2\pi i z)$ induit sur la surface de Riemann quotient une application holomorphe $e : \mathbf{Z} \backslash \mathbf{C} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ qui est bijective[6].

$a2)$ Pour tout réseau $\Lambda = < \omega, \omega' >$ muni d'une base (ω, ω'), soit $\lambda = \lambda_\Lambda = e(\frac{\omega'}{2\omega}) \in \mathbf{C}^\times$. L'application $z \mapsto e(\frac{z}{\omega})$ induit une application holomorphe $e_\Lambda : \Lambda \backslash \mathbf{C}^+ \to \Lambda_{\lambda_\Lambda, m} \backslash \mathbf{C}^\times$ bijective.

---

[4] ou *(centrée)* pour « Ortuniformisierende » de **[We]**

[5] Si $0 \neq a_0 \in \mathbf{C}[X]$ tel que $f \cdot a_0 = a_1 \in \mathbf{C}[X], d = \max(\deg(a_i))$ et $A_i = T^d a_i(\frac{X}{T}) \in \mathbf{C}[T, X]$ sont les polynômes homogènes de degré d associés, pour tout $p = [t : x] \in \mathbf{P}_1, \phi(p) = [A_0(t, x) : A_1(t, x)]$

[6] Aussi un isomorphisme du groupe additif quotient $\mathbf{Z} \backslash \mathbf{C}^+$ sur le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^\times$.

*a*3) Comme[7] $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y-y^3}} = \int_1^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{s^3-s}} = K$, $G : \mathfrak{H} \to \mathbf{C}, G(v) = \displaystyle\int_\infty^v \frac{dz}{\sqrt{z^3+z}}$ est isomorphisme holomorphe sur *carré sud* Q_S, s'étendant à la fermeture de $\mathfrak{H}$, envoyant $\infty, 0, -i, i$ sur respectivement les sommets haut 0, bas $-K\sqrt{2}i$, gauche $-K\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et droite $K\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ de Q_S. L'isomorphisme inverse $v_S = G^{-1}$ se relève, si $F = u^2 - v^3 - v \in \mathbf{C}[u, v]$, en une paramétrisation :

$$f_S = (u_S, v_S) : Q_S \to \widehat{\overline{Z}(F)} = \widehat{\mathcal{C}} \subset \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$$

par ce carré sud d'une[8] des deux composantes de $\pi^{-1}(\mathfrak{H})$ la préimage du demiplan à gauche par la projection verticale dans la normalisée[9], $\widehat{\mathcal{C}}$ de la cubique de l'exemple 2 de **1.2.2**.

Par symétrie[10], on étend v_S en l'injection holomorphe $v_S \cup v_E, v_E(z) = -\overline{v_S(i\overline{z})}$ du rectangle $R_{ES} = Q_S \cup Q_E$ union du carré sud et est $Q_E = -iQ_S$ se relevant[11] en une paramétrisation $f_S \cup f_E = (u_S \cup u_E, v_S \cup v_E) : R_{ES} \to \widehat{\mathcal{C}}$ d'une des deux composantes de $\pi_{\hat{\mathcal{C}}}^{-1}(\mathbf{C} \backslash [-i, +i\infty[)$. Elle est injective et, par *symétrie de Schwarz*, holomorphe.

Reprenant la construction le long du côté $[-K\frac{1-i}{\sqrt{2}}, K\frac{1-i}{\sqrt{2}}]$ de R_{ES}, on prolonge cette paramétrisation à $R_{NO} = -R_{ES}$, rectangle nord-ouest, donnant sur le carré union $Q = R_{ES} \cup R_{NO}$ une surjection holomorphe, injective sur l'union de l'intérieur et de deux côtés adjacents puis, l'âne trottant en spirale dans le réseau $\Lambda_K = 2K < \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}} >$, un morphisme $\tilde{f} : \mathbf{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ invariant par Λ_K, d'où une bijection holomorphe $f : \Lambda_K \backslash \mathbf{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ de la surface de Riemann quotient du groupe additif complexe $\mathbf{C}^+$ par ce *réseau en diamants* Λ_K sur la cubique $\widehat{\mathcal{C}}$.

b) Soit $\lambda, \mu \in \mathbf{C}^\times, |\lambda| > 1$ et, pour $n \in \mathbf{Z}, T_n(z) = \frac{(z-\mu\lambda^{2n})(z-\mu^{-1}\lambda^{2n})}{(z-\lambda^{2n})^2} \in \mathbf{C}(z)$.

Comme, pour $m \in \mathbf{N}$, on a $T_{-m}(z) = \Big(1 + (1-\mu)\frac{\lambda^{-2m}}{z-\lambda^{-2m}}\Big)\Big(1 + (1-\mu^{-1})\frac{\lambda^{-2m}}{z-\lambda^{-2m}}\Big)$ et $T_m(z) = \mu\Big(1 + \frac{z(1-\mu^{-1})}{\lambda^{2m}-z}\Big)\mu^{-1}\Big(1 + \frac{z(1-\mu)}{\lambda^{2m}-z}\Big) = \Big(1 + (1-\mu^{-1})\frac{z}{\lambda^{2m}-z}\Big)\Big(1 + (1-\mu)\frac{z}{\lambda^{2m}-z}\Big)$ et tout $z_0 \in \mathbf{C}^\times$ a un voisinage sur lequel, pour M assez grand, les séries $\sum_{m \geq M} \frac{\lambda^{-2m}}{z-\lambda^{-2m}}, \sum_{m \geq M} \frac{z}{\lambda^{2m}-z}$ sont, uniformément absolument convergentes, le produit infini :

$$Q_{\lambda;\mu,\mu^{-1}} = \prod_{n \in \mathbf{Z}} \frac{(z - \mu\lambda^{2n})(z - \mu^{-1}\lambda^{2n})}{(z - \lambda^{2n})^2}$$

converge vers une application holomorphe $\tilde{q}_{\lambda;\mu,\mu^{-1}} : \mathbf{C}^\times \to \mathbf{P}_1$ invariante par le réseau multiplicatif $\Lambda_{\lambda m} = \{\lambda^{2n} \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{C}^\times$, induisant donc sur la surface de Riemann quotient :

$$q_{\lambda;\mu,\mu^{-1}} = q_{\mu,\mu^{-1}} : E_\lambda \stackrel{Def}{=} \Lambda_{\lambda m} \backslash \mathbf{C}^\times \to \mathbf{P}_1$$

De même si $\underline{\mu} = (\mu_i), \underline{\nu} = (\nu_i) \in \big(\mathbf{C}^\times\big)^N$ sont tels que $\prod_{i=1}^N \mu_i = \prod_{j=1}^N \nu_j$, le produit infini :

$$P_{\lambda;\underline{\mu},\underline{\nu}} = \prod_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\prod_{i=1}^N (z - \mu_i\lambda^{2n})}{\prod_{j=1}^N (z - \nu_j\lambda^{2n})}$$

induit sur la surface de Riemann quotient de $\mathbf{C}^\times$ par le réseau multiplicatif $\Lambda_{\lambda m}$:

$$p_{\lambda;\underline{\mu},\underline{\nu}} = p_{\underline{\mu},\underline{\nu}} : E_\lambda \to \mathbf{P}_1$$

---

[7] par le changement de variable $y = \frac{1}{s}$.

[8] par exemple celle où, au dessus de la diagonale $Q_S \cap i\mathbf{R}, \Im(u_0) > 0$.

[9] Contrairement à $\overline{Z}(f) \subset \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$, la cubique plane $\overline{Z}(U^2W^3 - VW^2 - V^3) \subset \mathbf{P}_2$ est lisse.

[10] d'axes $[0, K\frac{1-i}{\sqrt{2}}],]-i\infty, -i]$, à la source et au but respectivement.

[11] grâce à $u_Z(z) = i\overline{u_S(i\overline{z})}$.

Bien[12]des propriés des fonctions holomorphes sur $\mathbf{P}_1$ se traduisent[13]alors :

Fn *Forme normale.* — *Soit $x \in X$ et v une uniformisante en $f(x)$.*

Alors il y a uniformisante u en x et $r_x \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tels que si[14]$e_x = r_x + 1$, *on a* $v = u^{e_x}$ ∎

Hi *Corollaire.* — *Si f est bijective alors son inverse $g = f^{-1} : Y \to Y$ est holomorphe.* ∎

Définitions. Une *fonction sur X* est un morphisme $f : X \to \mathbf{P}_1$ avec $f^{-1}(\{\infty\})$ discret.
Les entiers e_x, r_x sont respectivement l'*indice* et l'*excès de ramification en x*.
Le morphisme f est *non ramifié en x* si $r_x = 0$, *non ramifié* si il est non ramifié en tout point, *isomorphisme* si il y a un morphisme $g : Y \to X$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_X, f \circ g = \mathrm{Id}_Y$.

Si *Singularités innexistantes.* — *Si $\widehat{X} \supset X$ est une surface de Riemann telle que $\widehat{X} \backslash X$ est discret et f a une extension $\widehat{f} : \widehat{X} \to Y$ continue alors f est holomorphe.* □

De plus une telle extension existe si Y est compacte et il y a $\widehat{X} \backslash X \subset \mathcal{U} \subset \widehat{X}, \widehat{f}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V} \subset Y$, ouverts de carte sans composante $\mathcal{U}_i$ de $\mathcal{U}$ d'image dense dans une composante de $\mathcal{V}$. ∎

Ao *Application ouverte.* — *On a la partition ouverte $X = X_c \amalg X_o$ en :*
$X_c = \{x \in X \mid f \text{ constante près de } x\}$ *et* $X_o = \{x \in X \mid f \text{ ouverte près de } x\}$. □

De plus si f est propre, le degré $y \mapsto \deg_f(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} e_x$ est[15]*localement constant.* ∎

Fh *Factorisation.* — *Soit W, X, Y des surfaces de Riemann, $k : X \to Y, h : W \to X$ et $g = k \circ h$. Alors si h est surjective ces applications sont holomorphes, dès que deux d'entre elles le sont.*

Démonstration. — Cela suit de la coScolie, de **Fn** et **Hi** ou **D** des rappels de **1.3.1**, suivant que l'application non supposée holomorphe est g, h ou k respectivement. ∎

Exemples 3 : Fonctions sur E_λ. — Pirater la preuve de l'**Affirmation 2** de **1.3.2** donne :

Lemme. — Soit $\mathcal{Y} \subset \mathbf{P}_1$un ouvert muni d'une action discrète libre de H, et $X \in \{\mathbf{P}_1, \mathbf{C}\}$.
Alors pour tout morphisme $f : X \to H \backslash \mathcal{Y}$, il y a un morphisme $\tilde{f} : X \to \mathcal{Y}$ tel que $f = \rho \circ \tilde{f}$. ∎

On note $M(E_\lambda)$ l'ensemble des fonction de la surface de Riemann[16]$E_\lambda = \Lambda_{\lambda m} \backslash \mathbf{C}^\times$.

Corollaire. — Tout morphisme $f : \mathbf{P}_1 \to E_\lambda$ est constant[17]. ∎

cocorollaire. — Si $f \in M(E_\lambda)$, alors $f^* : \mathbf{P}_1 \to E_\lambda, f^*(y) = \prod_{x \in f^{-1}(y)} x^{e_x}$ est constante. ∎

Ainsi la condition $\prod_{i=1}^N \mu_i = \prod_{j=1}^N \nu_j$ d'égalité du produit des zéros et de celui des pôles est satisfaite par tout $f \in M(E_\lambda)$, et d'après la fin de **Ao**, les fonctions $p_{\underline{\mu},\underline{\nu}}$ construites à la fin du b) de l'exemple 2 sont, à constante mulitplicative près, toutes les fonctions sur E_λ.De plus, si $q \in M(E_\lambda) \backslash \mathbf{C}, \deg f > 1$ et, si $\deg q_i = 2, q_i^{-1}(\infty) = \{1\}, i = 1, 2$, il y a $a, b \in \mathbf{C}$ tels que $q_1 = aq_2 + b$, donc $q_1' = aq_2'$. L'égalité des limites en 1 des produits par $(z-1)^6$ de chacun des membres de

$$\tilde{p}^2_{(\lambda,-1,-\Lambda),(1,1,1)} = \tilde{q}_{\lambda,\lambda} \tilde{q}_{-1,-1} \tilde{q}_{-\lambda,-\lambda}$$

établit pour un tel $q \in M(E_\lambda), \deg q = 2, q^{-1}(\infty) = \{1\}$ l'*équation différentielle de Weierstrass* :

$$q' = 4(q - q(\lambda)) \cdot (q - q(-1)) \cdot (q - q(-\lambda))$$

[12] en particulier tous les énoncés locaux.
[13] Sans autre précision $f : X \to Y$ est un morphisme de surface de Riemann.
[14] avec l'abus (acceptable, puisque $|u| < 1$) conventionnel $u^\infty = 0$.
[15] par **Fn** et **C** des rappels de **1.3.1**
[16] munie de sa structure de groupe multiplicatif, dont les produits $p \mapsto pq$ sont holomorphes.
[17] d'après l'exemple 2 a2, a3) et **Hi**, on retrouve que l'exemple 2 de **1.2.2** n'est pas rationnelle.

Commentaires bibliographiques

Sur l'introduction des surfaces de Riemann : **[Cn]**VI, **[We]**§4-6, **[Gi]**I, **[Do]6.1**.

Pour l'action du groupe de congruence[18](Ex. 1 (v) c)) : **[Se]**VII§1.2 et **[Ru]16.18-19**, puis **20** pour, dans ce cas du groupe de congruence, l'analogues de Ex. 2 (v) a3)).
Pour l'application G de Ex. 2 (v) a3) : **[Cn]** VI exercice 8, **[Ah]6.2.3**, puis[19]**6.2.4** et[20]**[Cy] 7**.
La fonction Γ permet de calculer l'intégrale K de Ex. 2 (v) a3)) : **[Ar]** (5.10), **[Ko-Kr]I** 4.5.

Pour Ex. 3 voir **[Ko-Kr]I** 6.9, et pour son équivalent[21]additif : **[Cn]**V**2.5**, **[Ah] 7**, **[Sl] I**, **[Ha] IV4**, **[Ko-Kr] I**, **[Jo]**IVII.

1.3.3 *Le théorème de Chow : courbes analytiques et courbes algébriques.*

Théorème. — *Soit X une surface de Riemann compacte connexe.*

Alors pour toute paire de fonctions $(u,v)\in M(X)^2$ avec v non constante, de degré d, il y a un polynôme $P\in\mathbf{Z}[U,V]$ de U-degré d tel que :

$$(u,v)(X)=\overline{Z}(P)\subset\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$$

Démonstration. — Par **1.3.2 Ao**, **Fn**, **Hi** et **Si** et Ex 2 (ii), les fonctions symétriques élémentaires de $v^{-1}(q), q\in\mathbf{C}\backslash v^{-1}(\infty)$[22]sont $\sigma_i=\frac{A_i}{A_0}, A_k\in\mathbf{C}[V], 0\le k\le d$ et $P=\sum_{k=0}^{d}U^{d-k}A_k$. ∎

Axiome[23] *de Giraud.* — Pour tout point $p\in X$ d'une surface de Riemann compacte connexe il y a $f\in M(X)$ n'ayant de pôle qu'en $\{p\}=f^{-1}(\infty)$.
Ainsi il y a, pour $\{p_0,\dots,p_d\}\subset X$ fini à $d+1$ éléments, $f_i\in M(X), f_i^{-1}(\infty)=\{p_i\}; i=0,\dots,d$. Donc si $K\notin\{-f_i(p_k)\,|\,i=1\dots,d\}$, les fonctions $g_i=f_i+K$ vérifient $g_i^{-1}(\infty)=\{p_i\}$ et $g_i(p_k)\neq 0$, ainsi les fonctions *séparent les points* : pour tout $a_1,\dots,a_d\in\mathbf{C}$ il y a une fonction $g=\sum_{i=1}^{d}a_i\prod_{i\neq k=1}^{d}\frac{g_k(p_i)}{g_k}\in M(X)$ n'ayant de pôle qu'en p_0 et telle que pour $i=1,\dots,d, g(p_i)=a_i$.

Corollaire(Chow-Lűroth). — *Soit X une surface de Riemann compacte connexe.*

Alors il y a $\mathcal{C}=\overline{Z}(f)\subset\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1, f\in\mathbf{C}[U,V]$ et une paramètrisation de cette courbe algébrique plane $\varphi: X\to\mathcal{C}\subset\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1$, de composantes holomorphes et qui, sur le complémentaire d'une partie finie de X, est injective.

Commentaires bibliographiques

Le théorème de Chow fait partie du yoga gaga de **[Se1]**. L'original **[Ch]** qui contient une

[18] il est d'indice 6 dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$, donc les union des images du domaine fondamental par $S, ST, STS, T^{-1}S=STST, T^{-1}S=STSTS$ et $T, TS, ST^{-1}S=TST, ST^{-1}=TSTS, S=TSTST$ représentées sur la figure p.128 se projettent en deux ouverts de carte recouvrant le quotient.
[19] pour les triangles euclidiens.
[20] pour les triangles à côtés arcs de cercles et des fonctions invariantes par d'autres groupes.
[21] par Ex. 2 (v) a2), les formules de Ex. 2 (v) b) s'y retrouve plus tard avec la *fonction σ*.
[22] écrite $v^{-1}(q)=\{p_1,\dots,p_d\}$, en bégayant ces points selon leur v-indice de ramification.
[23] ramené en **2** au *Lemme* (montré en **3**) *de Hilbert-Weyl* (existence pour tout p d'une *différentielle holomorphe hors de p, à périodes imaginaires pures* avec en p un pôle d'ordre 2 sans résidu).

introduction traditionnelle à la géométrie analytique, voir aussi **[Ha]** Appendice B et **[De]**.

1.4 *Constructions : petit herbier de surfaces de Riemann.*

1.4.1 *Éléments de fonctions et formes analytiques.*

Définitions. Un *élément de fonction de centre* $u \in \mathbf{C}$ est une série entière en $z-u$:

$$f_u = \sum_{n=0}^{\infty} (z-u)^n a_n$$

convergente pour $|z-u| < r_{f_u}$. L'ensemble des éléments de fonctions est noté $\mathfrak{E}$.
Si $|v-u| < r_{f_u}$, alors la série entière $f_{u_v} = \sum_{m=0}^{\infty} (z-v)^m \frac{f_u^{(m)}(v)}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-v+(v-u))^n a_n$ obtenue en réarangeant dans son disque de convergence f_u en les puissances de $z-v$ est convergente.
Le *voisinage canonique* de l'élément de fonction f_u dans $\mathfrak{E}$ est formé des f_{u_v} pour $v \in \mathrm{D}_{r_{f_u}}(u)$. Une *fonction analytique globale* est une composante connexe de $\mathfrak{E}$.

Commentaires bibliographiques

Le théorème de Chow fait partie du yoga gaga de **[Se1]**. L'original **[Ch]** qui contient une introduction traditionnelle à la géométrie analytique, voir aussi **[Ha]** Appendice B et **[De]**. Il

Compléments (non exhaustifs!) de bibliographie

[Ah] L. Ahlfors. — *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.

[Ar] E. Artin. — *Einfűrung in die Thorie der Gammafunktion*, Hamburg, 1931, Trad. Holt Rinehart and Winston 1964.

[Cy] C. Caratheodory. — *Funktionentheory*, Birkăuser, 1950, Trad. Chelsea 1954.

[Cn] H. Cartan. — *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs ariables complexes*, Hermann, 1961.

[Ch] W.L. Chow. — *On Compact Complex Analytic Varieties*, Am.J.Math. **71** 893-914 1949.

[De] J.-P.. Demailly. — *Complex Analytic and Differential Geometry*, I.F., http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf 1993, 2009.

[Do] A. et R. Douady. — *Algèbre et théories galoisiennes 2*, CEDIC-Nathen, 1979, 2° Ed. Cassini, 2005.

[Ga] P. Gabriel. — *Matrices, géométrie, algèbre linéaire*, Cassini, 2001.

[Gi] J. Giraud. — *Surfaces de Riemann compactes*, P.M.O., http://portail.mathdoc.fr/PMO/PDF/GIRAUD_1969-70.pdf 1970, 2005.

[Go] R. Godement. — *Cours d'algèbre*, Hermann, 1966.

[Go1] R. Godement. — *Analyse mathématique I*, Springer, 1998, 2001.

[Ha] R. Hartshorne. — *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.

[Jo] C. Jordann. — *Cours d'analyse*, Gauthier-Villars 1876, 1893, 1959.

[Ko-Kr] M. Koecher A. Krieg. — *Elliptische Funktionen und Modularformen*, Springer, 1998, 2007.

[Ld] E. Landau. — *Grundlagen der Analysis*, Leipzig, 1930, Trad. Chelsea 1951.

[Lű] J. Lűroth. — *Beweis eines Satz űber rationale Curven*, Math. Ann. **9** 163-165, 1876.

[Mu] D. Mumford. — *Algebraic Geometry I Complex projective vaieties*, Springer, 1976.

[Ru] W. Rudin. — *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.

[Se] J.-P. Serre. — *Cours d'arithmétique*, P.U.F, 1970.

[Se1] J.-P. Serre. — *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann.Inst.Fourier **6** 1-42, 1956.

[Sl] L. Siegel. — *Ausgewählte Fragen der Funktionentheorie I*, Gőttingen, 1954, Trad. Wiley 1969.

[Si-Ta] J.H. Silverman J. Tate. — *Rational points on elliptic curves*, Springer, 1992.

[Wk] R.J. Walker. — *Algebraic Curves*, P.U.P., 1950.

[Wl] C.T.C. Wall. — *Singular Points of plane Curvles*, C.U.P., 2004.

[vW] B. L. van der Waerden. — *Algebra*, Springer, 1936.

[Wb] H. Weber. — *Lehrbuch der Algebra I*. Braunschweig, F. Vieweg, 1894.

[We] H. Weyl. — *Die Idee der Riemannschen Flǻche*, Teubner, 1913[1], 1923, 1955

[Wi] H.S. Wilf. — *generatingfunctionology*. A.K. Peters, 2005.

[1] En 1997, R. Remmert a reproduit cette premiére édition, augmentée d'essais contemporains.

Glossaire

Lexique

symblolique

Les rédactrices et rédacteurs[1]suggérent à tout responsable de filière de substituer ce bref manuel à d'éventuelles maquettes de M1 enseignement

[1] Marine Audra, Loup Borgna, Cindy Bouvarel, Benoit Chauvet, Audrey Chevalier, Camille Chrétien, Anthony Cogne, Sarah El-Bouazid, Aurélie Guerre, Idem Kaya, Sophie Larré, Benedicte Legastelois, Raphael Mallet, Samantha Petit-Charles, Alexandre Pimbert, Alexandre Pinel, Adrien Pomaret, Valentin Regazzoni, Foriane Robin, Lydie Terras, Hawa Traore, Camille Vulin, Adrien Allagui, Camille Cornut-Chauvin, Oumou Diallo, Eymeline Eynard, Romain Giraud, Lea Hansen, Gaetan Lagier, Kevin Merz, Emmanuel Orchanian, Mathilde Portela, Cheik Sissoko,Maxime Choquel, Nicolas Cornut, Seydou Doumbia, Elsa Kusterlé, Mathilde Morel, Solomane Nanakasse, Abdoulaye Samake, Vanessa Smanioto, Masseni Traore, Landry Curmi, Mah Konaté, Abdoulaye Maïga, Sebastien Pellurson, Brian Vautier, Rehana Yattara, Raphaël Achet, Fanny Augeri, Apollos Besse, Alix Boissiere, Anna Bonnet, Raphaël Butez, Vincent Carro, Quentin Couix, Thibault De Poyferre de Cere, Arnaud Demarais, Quentin Denoyelle, Loïc Devilliers, Ghislain Durif, Nicolas Flamarion, Adrien Fontaine, Ying Fu, Loïc Galvier, Sélim Ghazouani, Quentin Griette, Valentin Hernandez, Minh Hua,Marie Kerjean, Benoît Lasnier, Louis-Clément Lefevre, Marie Lhuissier, Hsueh-Yung Lin, Benoît Loisel, Julie Magnoux, Nicolas Martin, Alvaro Mateos Gonzales, Pierre-Alexandre Mattei, Thomas Merly-Alpa, Olivier Ozenda, Anthony Poels, Marie Rozano, Guillaume Sergent, Yan Shu.

puis, forts d'actives complicités[2]en l'utilisant largement[3], éventuellement

[2] à : VALENCE : M.-C. Darracq, F. Dupré, L. Lefevre, J.-E. Rombaldi. L'INSTITUT FOURIER : H. Abdallah, A. Aksenov, J.-F. Arnoldi, R. Bacher, M. Barbelet, C. Barbe-Zoppis, S. Baseilhac, P. Bérard, G. Berhuy, A. Bernard, J. Bertin, L. Bessiéres, G. Besson, M.-H. Biasini, R. Binder, M. Blanco, C. Blondel, M. Bordonard, A. Bosche, T. Bouche, V. Bour, C. Bouvier, M. Brion, J. Brossard, M. Brown, Y. Carrière, A. Castro-Trejo, N. Catrain, G. Catz, A. M. de Cavalcante, G. Cellier, C. Chabauty, C. Champetier, M. Charles, G. Charlot, C. w. Chen, L. Chevalier, A. Chiodo, V. Chorier, B. Claudon, Y. Colin de Verdière, F. Dahmani, C. Datry X. Colipan, A. Cocquio, I. Costerg, M.-C. Darracq, H. de Alba Casilas, C. Datry, J.-M. et M. Decauwert, E. Delaye, J.-P. Demailly, B. Demange, M. Deraux, A. Deruelle, Y. Dieng, Z. Djadli, S. Druel, J. Duchon, J. Ducoat, B. Dudin, A. Dufesnoy, É. Dumas, M. Dupraz, S. El-Garès, P. Elbaz-Vincent, P. Eyssidieux, H. Falavard, M. Falconet, F. Faure, R. Feres, M.-J. Ferton A. Fossas, L. Funar, T. Gallay, S. Gallot, L. Garcia, O. Garotta, J. Gasqui, E. Gaudron, H. Gaussier, F. Gauthier, C. Gedda, A. Gerbaud, R. Gilard, N. Giroux, P. Glenat, G. Gonzalez-Springer, P. Gosselin, C. Goutorbe, S. Gravier, R. de Graeve, D. Grenier, P. Greenberg, S. Guillermou, L. Guillou, A. Guttin-Lombard, D. Haefner, P.-J. Haug, H. Hichri, M. Huruguyen, R. Joly, J. Joukoff, A. Joye, J. Helmstetter, T. Kashiwabara, M.-N. Kassama, B. KLoeckner, S. Kobeissi, S. Kossarev, J.-L. Koszul, N. Kox, R. Ksouri, K. Kuyumzhiyan, O. Lablée, J. Lancrenon, C. et Y. Laurent, Y, B. Le Gouec, F. Leinardi, C. Lescop, C. Leuridan, M. Leyton-Alvarez, A. Liendo, B. Loiodice, F. Lontin, D. Luna, C. Maclean, G. T. Magusson, B. Malgrange, L. Manivel, ,M. Marchand, ,F. Martin, H. Maugendre, G. Maurin, G. Mcshane, D. Megy, J.-B. Meilhan, M. Michalek, G. Michel, S. Modeste, B. Mokhtari, M. Mollard, V. Monaci, M. Morales, F. Mouton, C. et N. Moser, V. Munier, D. et G. Muraz, A. Navari, M. Nguyen, H. Pajot, S. Pagelot, F. Palesi, A. Pantchichkine, J. Papin,M. Parisse, B. Parisse, Al. et An. Parreau, C. Payan, H. Pesce, C. Pech, S. Peche, C. Peters, C. Petit, E. Peyre, M Peyron, D. Piau, J. Plut, G. Rahal, G. Remond, A. Rahm, G. Robert, R. Robert, T. Richard, T. Rivoal, A. Rolland, J.-E. Rombaldi, J. Rocques, L. Rozoy, A. Sallaz, C. Sallustio, A. Savignoni, F. Sergeraert, V. Sergiescu, D. Spehner, A.-M. Strano, R. Terepereau, H. Toureille, F. Truc, N. Vasseur, J.-L. Verger-Gaudry, G. Vinel, M. Vitter, S. Vogelsberger, A. Voutier, P. Will, P. Witomski, N.H. Xuong, M. Zaïem, M. Zaidenberg. CHAMPOLION : L. Bonavero, J.-P. Heysche, R. Krust, É. Labeye-Voisin, M. Moreau. LYON : M. Bourrigan, C. Danthony, A. Fathi, E. Giroux, B. Sevennec, J.-C. Sikorav. ORSAY : F. Haglund, D. Luçon, Y.-M. Visetti. PALAISEAU : J. Barge, P. Colmez, J. Lannes. PISA : F. Aquitapace, F. Broglio, R. Benedetti, M. Galbiati. RENNES : S. Cantat, L. Moret-Bailly, C. Mourougane. TOULOUSE : M. Boileau, V. Guirardel, J.-P. Otal.

et plus robustement à :

AACHEN : Aloys Krieg. AUSTIN : John Tate. BALTIMORE : Wei-Liang Chow. BERKELEY : Robin Hartshorne. BERLIN : Edmund Landau. BITCHE : Pierre Gabriel. GŐTTINGEN : Carl Ludwig Siegal, Hermann Weyl. CHICAGO : Joseph Maclagan Wederburn. CORNELL : Isaac Herstein. GRENOBLE : Jean-Pierre Demailly. HAMBURG : Emil Artin et Ernst Witt. HARVARD : Lars Ahlfors. KARSRUHE : Jakob Lűroth. LAREN : Bartel van der Waerden, LIVERPOOL : C.T.C. Wall. MADISON : Walter Rudin. MARSEILLE : André Blanchard. U.

modifié[4], malgré les services de vigilance El'hemdiens[5], progresser dans le classement de Changai.

MICHIGAN : Paul Halmos, MŰNCHEN : Constantin Caratheodory. MŰNSTER : Max Koecher. NANCAGO : Nicolas Bourbaki, ORSAY : Adrien Douady, Jean Giraud. PALAISEAU : Pierre Colmez. PARIS : Henri Cartan, Régine Douady, Camille Jordan, Roger Godement, Jean-Louis Krivine et Jean-Pierre Serre. PITTSBURG : Robert J. Walker. PHILADELPHIA : Herbert S. Wilf. PROVIDENCE : Joseph H. Silverman. PRINCETON : André Weil. SÃO PAULO et ORSAY : Pierre Samuel. STRASSBURG : Heinrich Weber.

[3] avec l'appui logistique de Cassini, Dover, M.A.A, P.U.G., P.U.F., S.M.F, Springer. . . .

[4] voir http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~marin/sources/Avr2011

(et http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~marin/sources/texmf)

[5] Jacques Gasqui, Christine Kazantsev, Maëlle Nodet et Bernard Ycart.