1 Colles2 (02/04/2009)

1.1 Questions de cours.

1) Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k, Q = \sum_{l=0}^{n} b_l X^l \in \mathbb{Z}[X]$ deux polynômes à coefficients entiers.

(a) Donner la définition du produit $P \cdot Q$ de P et de Q

(b) Enoncer la formule de Leibniz calculant la dérivée de $P \cdot Q$.

(c) Démontrer cette formule de Leibniz.

2) (a) Donner la définition du produit de deux polynômes.

(b) Soit $P = 1 + X^2$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^{2k}$.

i. Dans le cas $n = 5$, expliciter Q et calculer $P \cdot Q$

ii. Dans le cas général calculer $P \cdot Q$.

3) Enoncer et démonter la formule de Taylor pour les polynômes.

4) (a) Donner la dérivée de la fonction logarithme Log $:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

(b) En déduire la dérivée de la fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ définie comme fonction réciproque de la fonction logarithme.

5) (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner la dérivée de la fonction

$$p_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, p_\alpha(t) = t^\alpha$$

puissance d'ordre α et calculer sa dérivée.

(b) Dans le cas où $\alpha = m \in \mathbb{Z}$ démontrer par récurrence sur la valeur absolue $|m|$ de m la formule donnant la dérivée de p_m.

6) (a) Définir la fonction Arctg arctangente.

(b) Donner la dérivée de Arctg et démontrer ce résultat.

(c) Pour tout $t \in]-1, 1[$ prouver : $\cos^2(\mathrm{Arctg}(t)) = \frac{1}{1+t^2}$

7) (a) Définir le degré d'un polynôme.

(b) Soit P et Q deux polynômes

i. Quelle relation il y a-t-il entre les degrés de P, Q et $P \cdot Q$

ii. Démontrer cette relation.

8) Enoncer et démontrer la règle de Leibnitz pour la dérivée du produit de deux polynômes.

9) Soit $k, n \in \mathbb{N}$. Donner et démontrer les formules donnant la dérivée $D(X^n)$ et la dérivée $k^{\text{ième}}$ $D^k(X^n)$ du polynôme X^n.

10) Soit $k \in \mathbb{N}$. Définir l'application $\frac{1}{k!} D^k : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$

11) Soit n un entier positif. Enoncer et démontrer la formule de Leibniz pour le produit de deux fonctions admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n.

12) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(3) = 0$. Démontrer qu'il y a $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P = (X - 3) \cdot Q$.

13) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $P(m) = 0$. Prouver que $P = 0$

14) (a) énoncer le théorème de factorisation des polynômes à coefficients complexes.

(b) Démontrer ce théorème à partir du théorème de D'Alembert.

15) (a) énoncer le théorème de factorisation des polynômes à coefficients réels.

(b) Démontrer ce théorème à partir du théorème de D'Alembert.

1.2 Exercices.

1) Soit $P = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$.

(a) Calculer pour $0 \le k \le 4$ les valeurs $P^{(k)}(3)$ en 3 des dérivées $k^{\text{ièmes}}$ de P.

(b) En déduire qu'il y a $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P = (X-3)^2 \cdot Q$ et déterminer ce polynôme Q.

(c) En effectuant la division euclidienne de P par $X^2 - 6X + 9$ retrouver le résultat précédent.

2) Soit $B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k, A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[[X]]$ deux séries formelles à coefficients dans $\mathbb{R}$.

(a) Déterminer la série entière $A' - B \cdot A$.

(b) Prouver que si $b_0 \neq 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ il y a une unique série entière $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[[X]]$ telle que $A' = B \cdot A$ et $a_0 = a$.

(c) Prouver que si $B \neq 0$ et k_0 est le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $b_k \neq 0$ et $A \in \mathbb{R}[[X]]$ vérifie $A' = B \cdot A$ alors il y a $C \in \mathbb{R}[[X]]$ tels que $A = X^{k_0} \cdot C$.

(d) En déduire que si $B \neq 0$ et pour $i = 1, 2$ les séries formelles $A_i \in \mathbb{R}[[X]]$ vérifient $A_i' = B \cdot A_i$ alors A_1 et A_2 sont linéairement dépendants dans $\mathbb{R}[[X]]$.

3) (a) Prouver que si $\alpha \in \mathbb{R}$ il y a une unique série entière $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[[X]]$ telle que $a_0 = 1$ et $(1+X) \cdot A' = \alpha \cdot A$ et déterminer cette série entière $A = A_\alpha$.

(b) Prouver que si $\beta \in \mathbb{R}$ alors $A_{\alpha+\beta} = A_\alpha \cdot A_\beta$

(c) En déduire, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ la relation

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \cdot \binom{\beta}{n-k}$$

(d) Si $n \le \alpha = p, \beta = q \in \mathbb{N}$ établir, par un argument de dénombrement, **3c.**

(e) Déduire de **3d.** la relation **3c.** dans le cas $n \le \beta = q \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$, puis dans le cas général.

4) Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X], m, n \in \mathbb{N}, R, S \in \mathbb{C}[X]$, avec $P = X^m \cdot R, Q = X^n \cdot S$ et $R(0) \neq 0 \neq S(0)$ et

$$H = X \cdot [D(P) \cdot Q - P \cdot D(Q)]$$

(a) On suppose $m \neq n$. En le déterminant prouver qu'il y a $K \in \mathbb{C}[X]$ avec $K(0) \neq 0$ tel que

$$H = X^{m+n} \cdot K$$

(b) Prouver que si $m = n$ alors il y a $L \in \mathbb{C}[X]$ tel que $H = X^{m+n+1} \cdot L$

(c) En déduire que $\frac{1}{X}$ n'est pas la dérivée d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$.

5) (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{1-X^2}$.

(b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $D^n(\frac{1}{1-X^2})$.

6) Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ avec $Q \neq 0$.

(a) En utilisant la décomposition en éléments simples prouver qu'il y a $R, S \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes tels que $D(\frac{P}{Q}) = \frac{R}{S}$ et si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $S(z) = 0$ alors $R(z) \neq 0$ et $S'(z) = 0$

(b) En déduire qu'il n'y a pas de fraction rationnelle $\frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ telle que $D(\frac{P}{Q}) = \frac{1}{1+X^2}$.

7) Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$) les fractions rationnelles suivantes :

(a) $\dfrac{X^2+1}{X(X^2-1)}$ $\qquad$ $\dfrac{4X^3}{(X^2+1)^2}$

(b) $\dfrac{2}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ $\qquad$ $\dfrac{X^6-X^2+1}{X^4-2X^2+1}$

(c) $\dfrac{X^5-X^3-X^2}{X^2-1}$ $\qquad$ $\dfrac{3X^2+3}{X^3-3X-2}$

8) (a) Prouver qu'il y a une unique série formelle $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ telle que

$$(1-X^2)(1-X^3)S = 1$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ expliciter a_n et vérifier que a_n est le nombre des solutions $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ de

$$2a + 3b = n$$

[le nombre de manière de payer n avec des pièces de 2 et de 3]

(c) Pour $n = 0, 1, 3, 3, 4, 5$ calculer le nombre des solutions $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ de $2a + 3b = n$.

(d) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-X)^2(1+X)(1+X+X^2)}$$

(e) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de a_n

(f) Vérifier que la formule trouvée en **8e.** coïncide avec celle trouvée en **8c.**, puis si $k, r \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq r \leq 6$ exprimer a_{6k+r} en fonction de k et r, retrouver que pour $n \in \mathbb{N}$ le nombre a_n est entier et vérifier, si $n = 6k + r$ qu'il s'exprime en fonction de k et a_r.

9) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.

(a) En utilisant, si $\theta \in \mathbb{R}$, la formule $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$ prouver qu'il y a un polynôme $Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on ait $\cos(n\theta) = Q_n(\cos(\theta))$ et calculer ainsi Q_0, Q_1, Q_2, Q_3

(b) Déterminer $Q_n(0)$, le coefficient de degré 0 du polynôme Q_n.

(c) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes Q_0, Q_1, Q_2, Q_3.

(d) Calculer les produits : $\cos(\frac{\pi}{2})$, $\quad 2\cos(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{3\pi}{4})$, $\quad 4\cos(\frac{\pi}{6})\cos(\frac{3\pi}{6})\cos(\frac{5\pi}{6})$.

(e) Prouver que si un polynôme polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ la relation $\cos(n\theta) = Q(\cos(\theta))$ alors $Q = Q_n$ est le polynôme déterminé en **9a.**

(f) Si $n > 0$ calculer $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)$. En déduire une autre preuve de **9a.** et, toujours si $n > 0$, la relation de récurrence

$$Q_{n+1} + Q_{n-1} = 2XQ_n$$

A l'aide de cette relation, retrouver le calcul de Q_n fait pour $0 \leq n \leq 3$ en **9a.** et donner les valeurs de Q_n pour $n = 4, 5, 6$.

(g) Prouver que pour $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n-1$ les nombres $\cos(\frac{\pi(1+2k}{2n})$ sont deux à deux distincts : si $0 \leq k \neq l \leq n-1$ alors $\cos(\frac{\pi(1+2k}{2n}) \neq \cos(\frac{\pi(1+2l}{2n})$.

(h) Déduire de **9g.** la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de Q_n.

(i) Déduire de ce qui précède que $2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\cos(\frac{\pi(1+2k}{2n})$ est un entier, déterminer cet entier et retrouver **9d.**

(j) Soit $m, n \in \mathbb{N}$. En faisant le changement de variable $t = \cos(\theta)$ prouver que la fonction

$$f_{m,n} :]-1,1[\to \mathbb{R}, f_{m,n}(t) = Q_m(t)Q_n(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

admet une primitive qui est restriction d'une fonction continue $F_{m,n} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.
En déduire, en distinguant les cas $m = n$ et $m \neq n$, la valeur de :

$$\int_{-1}^{1} Q_m(t)Q_n(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

10) Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine simple du polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.
Prouver que si $\dfrac{\lambda}{X-a}$ est le terme correspondant à a dans la décomposition en élément simples de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ alors $\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$

11) Calculer une primitive des fonctions qui (si $a, b \in \mathbb{R}$) à t associent :

$\dfrac{t}{3+2t}$ $\dfrac{a}{t(a+bt)}$

$\dfrac{1}{t(t^3+81)}$ $\dfrac{2a}{t(a+bt^2)}$

$\dfrac{a^2}{t^2(a+bt)}$ $\dfrac{2a}{a^2-t^2}$

$\dfrac{b^2t}{(a+bt)^3}$ $\dfrac{2ab}{a^2-b^2t^2}$

$\dfrac{2t^2}{(t^2+a^2)^2}$ $\dfrac{1}{a^2+b^2t^2}$

$\dfrac{a^2}{t(a+bt)^2}$ $\dfrac{2t^3}{(t^2+a^2)^2}$

12) Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$) les fractions rationnelles suivantes :

$\dfrac{X^2+1}{X(X^2-1)}$ $\dfrac{4X^3}{(X^2-1)^2}$

$\dfrac{2}{(X+1)(X+2)(X+3)}$ $\dfrac{X^6+X^2+4}{X^4+2X^2+1}$

$\dfrac{X^5+X^3-X^2}{X^2+1}$ $\dfrac{3X^2+3}{X^3+3X-2}$

Dans les exercices suivants on ne demande pas de justifier la dérivabilité des fonctions considérées, mais de calculer leurs dérivées à l'aide des propriétés algébriques de la dérivation et la formule dérivation de fonctions composées.

13) Calculer les dérivées des fonctions qui à $t \in \mathbb{R}$ associent :

(a) $\dfrac{1}{4}[3+2t-3\operatorname{Log}(3+2t)]$

(b) $\dfrac{1}{2}\operatorname{Log}(8t+3+4\sqrt{5+3t+4t^2})$

(c) $\dfrac{1}{243}\operatorname{Log}(\dfrac{t^3}{t^3+81})$

(d) $\sqrt{(3+t)(2+t)}$
$+\operatorname{Log}(\sqrt{3+t}+\sqrt{2+t})$

(e) $\dfrac{e^{7t}}{50}(7\cos(t)+\sin(t))$

(f) $\dfrac{e^{7t}}{50}(7\sin(t)-\cos(t))$

14) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ des réels non tous deux nuls ($a^2+b^2 \neq 0$).
Calculer les dérivées des fonctions qui à $t \in \mathbb{R}$ associent :

(a) $b\,\mathrm{Log}(\frac{a+bt}{t}) - \frac{a}{t}$

(b) $\frac{a}{2(a+bt)^2} - \frac{1}{a+bt}$

(c) $\mathrm{Log}(\frac{\sqrt{bt+a^4}-a^2}{\sqrt{bt+a^4}+a^2})$

(d) $2\,\mathrm{Arctg}(\sqrt{\frac{bt-a^4}{a^4}})$

(e) $\mathrm{Log}(t+\sqrt{t^2+a^2}) - \frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}$

(f) $t\sqrt{t^2+a^2}$
$- a^2\,\mathrm{Log}(t+\sqrt{t^2+a^2})$

(g) $\frac{a}{a+bt)} - \mathrm{Log}(\frac{a+bt}{t})$

(h) $\mathrm{Log}(\frac{a+bt}{t})$

(i) $\mathrm{Log}(\frac{t^2}{a+bt^2})$

(j) $\mathrm{Log}(|\frac{a+t}{a-t}|)$

(k) $\mathrm{Log}(|\frac{a+bt}{a-bt}|)$

(l) $\frac{1}{ab}\,\mathrm{Arctg}(\frac{a}{b}t)$

(m) $\frac{2}{a}\,\mathrm{Arctg}(\sqrt{\frac{bt-a^2}{a^2}})$

(n) $\mathrm{Log}(t+\sqrt{t^2+a^2})$

(o) $(t^2-2a^2)\sqrt{t^2+a^2}$

(p) $(t^2+2a^2)\sqrt{t^2+a^2}$

(q) $\mathrm{Log}(\frac{t}{a+\sqrt{t^2+a^2}})$

(r) $\mathrm{Log}(t+\sqrt{t^2+a^2}) - \frac{\sqrt{t^2+a^2}}{t}$

(s) $\sqrt{t^2+a^2} - a\,\mathrm{Log}(\frac{a+\sqrt{t^2+a^2}}{t})$

(t) $\mathrm{Log}(\frac{a+\sqrt{t^2+a^2}}{t}) - \frac{a\sqrt{t^2+a^2}}{t^2}$

15) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ un entier non nul et $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f_n(t) = nt^{\frac{1}{n}}$

(a) Calculer f_n' et si $t \geq 1$ et comparer $f_n'(t)$ et $\mathrm{Log}'(t) = \frac{1}{t}$.

(b) En déduire, toujours si $t \geq 1$, l'encadrement :

$$|n|[t^{\frac{1}{|n|}} - 1]t^{-\frac{1}{|n|}} = -|n|[t^{-\frac{1}{|n|}} - 1] \leq \mathrm{Log}(t) \leq |n|[t^{\frac{1}{|n|}} - 1]$$

(c) Donner un encadrement analogue de $\mathrm{Log}(t)$ si $0 < t \leq 1$.

16) On rapelle que le graphe de la fonction exponentielle est au dessus de sa tangente en son point d'abscisse 0 *c. a d.* pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\exp(t) \geq 1 + t$.

(a) On suppose $t \geq 0$

i. En comparant les dérivées de exp et $s \mapsto 1 + s + \frac{s^2}{2}$ établir :

$$1 + t + \frac{t^2}{2} \leq \exp(t)$$

ii. En général prouver que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \leq \exp(t)$$

(b) On suppose $t \leq 0$

i. En comparant les dérivées de exp et $s \mapsto 1 + s + \frac{s^2}{2}$ établir :

$$\exp(t) \leq 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

ii. En déduire pour tout $t \leq 0$ la minoration :

$$1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \leq \exp(t)$$

iii. En général prouver que pour tout entier naturel $m \in \mathbb{N}$ on a l'encadrement

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \frac{t^k}{k!} \leq \exp(t) \leq \sum_{k=0}^{2m} \frac{t^k}{k!}$$

17) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f = f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{-t} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.

(a) Dans le cas $n = 3$ expliciter f_3 et calculer sa dérivée. En déduire :

i. Si $t \geq 0$ on a $-\frac{t^4}{4!} \leq f_3(t) - 1$, puis la majoration :

$$e^t \leq 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}e^t$$

ii. Si $t \leq 0$ on a $\frac{t^4}{4!}e^{-t} \geq 1 - f_3(t)$, puis la majoration :

$$e^t \leq 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}$$

(b) Dans le cas général calculer la dérivée de f_n. En déduire :

i. Si $t \geq 0$ que $-\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leq f_n(t) - 1$, puis la majoration

$$e^t \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^t$$

ii. Si $t \leq 0$ et $n = 2m - 1$ est impair que $\frac{t^{2m}}{(2m)!}e^{-t} \geq 1 - f_{2m-1}(t)$, puis la majoration

$$e^t \leq \sum_{k=0}^{2m} \frac{t^k}{k!}$$

iii. Si $t \leq 0$ et $n = 2m$ est pair que $\frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}e^{-t} \leq 1 - f_{2m}(t)$, puis la minoration

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \frac{t^k}{k!} \leq e^t$$

18) Des encadrements de sin et cos analogues à (**1.2)** et **1.2)**).

(a) Expliquer géométriquement pour tout $t \geq 0$, les majorations :

$$\cos(t) \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \sin(t) \leq t$$

(b) Ces majorations ont-elle lieu pour tout $t \in \mathbb{R}$?

(c) Déduire de **18a)** que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a : $-\dfrac{t^2}{2} \leq \cos(t) - 1 \leq 0$ [supposer d'abord $t \geq 0$], soit $1 - \dfrac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$.

(d) En déduire que pour tout $t \geq 0$ on a : $t - \dfrac{t^3}{6} \leq \sin(t) \leq t$ et pour tout $t \leq 0$ on a : $t \leq \sin(t) \leq t - \dfrac{t^3}{6}$

(e) Pour tout $t \geq 0, m \in \mathbb{N}$ établir par récurence les encadrements :

$$\sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \cos(t) \leq \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \sin(t) \leq \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ces encadrements sont-ils valables pour tout $t \in \mathbb{R}$?

"Résultats numériques"(ou indications) pour quelques exercices

7a $\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1)}-\frac{1}{X}$

7b $\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X-2}1+\frac{1}{X-3}$

?? $X^3-1+\frac{1}{2X-2}-\frac{1}{2X+2}$

7c $\frac{i}{X+i}-\frac{i}{X-i}+\frac{i}{(X-i)^2}-\frac{i}{(X+i)^2}=\frac{4X}{X^2+1}-\frac{4X}{(X^2+1)^2}$

7c $X^2+2+\frac{\frac{3}{4}}{X-1}-\frac{\frac{3}{4}}{X+1}+\frac{\frac{1}{4}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{(X+1)^2}$

7c $\frac{\frac{4}{3}}{X+1}-\frac{2}{(X+1)^2}+\frac{\frac{5}{3}}{X-2}$

1.2 $\frac{1}{4}\big[3+2t-3\,\mathrm{Log}(3+2t)\big]$

1.2 $\frac{1}{81}\,\mathrm{Log}(\frac{t^3}{t^3+81})$

1.2 $b\,\mathrm{Log}(\frac{a+bt}{t})-\frac{a}{t}$

1.2 $\frac{a}{2(a+bt)^2}-\frac{1}{a+bt}$

1.2 $\frac{1}{a}\,\mathrm{Arctg}(\frac{t}{a})-\frac{t}{t^2+a^2}$

1.2 $\frac{a}{a+bt)}-\mathrm{Log}(\frac{a+bt}{t})$

1.2 $\mathrm{Log}(\frac{a+bt}{t})$

1.2 $\mathrm{Log}(\frac{t^2}{a+bt^2})$

1.2 $\mathrm{Log}(|\frac{a+t}{a-t}|)$

1.2 $\mathrm{Log}(|\frac{a+bt}{a-bt}|)$

1.2 $\frac{1}{ab}\,\mathrm{Arctg}(\frac{a}{b}t)$

1.2 $\mathrm{Log}(t^2+a^2+\frac{a^2}{t^2+a^2}$

1.2 $\frac{1}{X+i)}+\frac{1}{X-i)}-\frac{1}{X}=\frac{2X}{X^2+1)}-\frac{1}{X}$

1.2 $\frac{1}{X+1}-\frac{1}{X+2}+\frac{1}{X+3}$

1.2 $X^3-1+\frac{1}{X^2+1}$

1.2 $\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{2}{X-1}+\frac{2}{X+1}$

1.2 $X^2-2+\frac{2i}{X+i}-\frac{2i}{X-i}-\frac{2}{(X+i)^2}=-\frac{2}{(X-i)^2}=X^2-2+\frac{4}{X^2+1}+\frac{2}{(X^2+1)^2}$

1.2 $\frac{\frac{4}{3}}{1-X}-\frac{2}{(1-X)^2}-\frac{\frac{5}{3}}{X+2}$

13a $\frac{1}{4}\big[3+2t-3\,\mathrm{Log}(3+2t)\big]$

13b $\frac{1}{\sqrt{5+3t+4t^2}}$

13c $\frac{1}{t(t^3+81)}$

13d $\sqrt{\frac{3+t}{2+t}}$

13e $e^{7t}\cos(t)$

13f $e^{7t}\sin(t)$

14a $\frac{a^2}{t^2(a+bt)}$

14b $\frac{b^2t}{(a+bt)^3}$

14c $\frac{a^2}{t\sqrt{bt+a^4}}$

14d $\frac{a^2}{t\sqrt{bt-a^4}}$

14e $\frac{t^2}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$

14f $\frac{2t^2}{\sqrt{t^2+a^2}}$

14g $=\frac{a^2}{t(a+bt)^2}$

14h $=-\frac{a}{t(a+bt)}$

14i $=\frac{2a}{t(a+bt^2)}$

14j $=\frac{2a}{a^2-t^2}$

14k $=\frac{2ab}{a^2-b^2t^2}$

14l $=\frac{1}{a^2+b^2t^2}$

14m $=\frac{1}{t\sqrt{bt-a^2}}$

14n $=\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}$

14o $=\frac{3t^3}{\sqrt{t^2+a^2}}$

14p $=\frac{t^3}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$

14q $=\frac{a}{t\sqrt{t^2+a^2)}}$

14r $=\frac{\sqrt{t^2+a^2}}{t^2}$

14s $=\frac{\sqrt{t^2+a^2}}{t}$

14t $=\frac{2a^3}{t^3\sqrt{t^2+a^2}}$