TD 7

Relations d'ordre, passage au quotient, bons ordre.

1) (a) Prouver si $<_X$ est une relation d'ordre total alors toute partie finie non vide $\emptyset \neq Y \subset X$ de X a un un plus grand et un plus petit élément. Donner un contre-exemple si la partie Y est infinie.

(b) En déduire que si X est fini non vide à n éléments, et $<_X$ est total alors $(X, <_X)$ est isomorphe à l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ des n premiers entiers positifs muni de l'ordre induit de celui de $\mathbb{N}$.

2) Soit X un ensemble. On note $\sigma : X \times X \to X \times X, \sigma(x, y) = (y, x)$ et $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$.

(a) Soit $R \subset X \times X$ tel que $\sigma(R) \cap R = \emptyset$ et $\Gamma = R \cup \Delta_X$. Prouver que :
soit Γ est graphe d'un ordre sur X soit il y a $x, y, z \in X$ tels que $(x, y), (y, z), (z, x) \in R$
Les deux cas ci-dessus peuvent-ils avoir lieu simultanément ?

(b) $R \subset X \times X$ est un *résultat de tournoi sans perdants sur* X si $\sigma(R) \cap R = \emptyset$ et $\sigma(R) \cup R = X \times X \setminus \Delta_X$ et pour tout $x \in X$ il y a $y \in X$ tel que $(x, y) \in R$ (on dit x *l'emporte sur* y).

i. Déduire de ce qui précède que si R est un résultat de tournoi sans perdant sur un ensemble fini X alors il y a trois éléments $x, y, z \in X$ dont chacun l'emporte sur les deux autres.

ii. Le résultat précédent reste-t-il vrai si :

A. l'ensemble X n'est plus supposé fini ?

B. on suppose seulement $\sigma(R) \cap R = \emptyset$ (et plus $\sigma(R) \cup R = X \times X \setminus \Delta_X$) ?

iii. Traduire l'exercice 4 du concours du mois de septembre donné par C. Kazantsev dans les termes ci-dessus et comparez avec la solution que vous aviez (éventuellement) donnée en septembre.

3) Soit $<_E$ une relation d'ordre sur un ensemble E.
Une partie $X \subset E$ est *convexe* si pour tout $x, y \in X$ et $z \in E$ vérifiant $x <_E z$ et $z <_E y$ on a $z \in X$.
Si $x, y \in E$ les quatre *intervalles* (resp. *demi-droites*) d'*origine* x et (resp. ou) *extrémité* y sont :
$[x, y] = \{z \in X \mid x <_X z \text{ et } z <_X y\}$, $[x, y[= \{z \in X \mid x <_X z \text{ et } z <_X y \text{ et } z \neq y\}$,
$]x, y] = \{z \in X \mid x \neq z \text{ et } x <_X z \text{ et } z <_X y\}$, $]x, y[= \{z \in X \mid x \neq z \text{ et } x <_X z \text{ et } z <_X y \text{ et } z \neq y\}$
(resp. $[x, \ [= \{z \in X \mid x <_X z\}$, $]x, \ [= \{z \in X \mid x \neq z \text{ et } x <_X z\}$,
$] \ , y] \ [= \{z \in X \mid z <_X y\}$, $] \ , y[\ [= \{z \in X \mid z <_X y \text{ et } z \neq y\}$.

i. Prouver que si une famille $X_i \subset E, i \in I$ de paries vérifie pour tout $i \in I, X_i$ est convexe alors :

A. leur intersection $\bigcap_{i \in I} X_i = \{x \in E; \forall i \in I \text{ on a } x \in X_i\}$ est convexe.

B. Si $>_E$ est total et $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, l'union $\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \in E; \exists i \in I \text{ tel que } x \in X_i\}$ est convexe.

ii. Peut-on omettre dans l'hypothèses de **3(b)iB** « $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$» et/ou « total» ?

iii. L'énoncé **3(b)i** reste-t-il vrai si I est fini et on remplace :

A. « partie(s) convexe(s)» par « intervalle(s) ou demi-droite(s)» ?

B. et si de plus $<_X$ est un ordre total ?

iv. Une partie de E est-elle convexe si et seulement si elle est un intervalle ou une demi-droite,

A. si $<_E$ est l'ordre usuel $\leq$ sur $E \subset \mathbf{R}$ dans chacun des trois cas $E = \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$?
[Dans le cas $X = \mathbb{Q}$ considérer $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2\}$]

B. si $<_E$ est l'inclusion $\subset$ et E l'ensemble $\mathcal{P}(Z)$ des parties d'un ensemble Z ?
[Considérer $\{\{0\}, \{1\}\} \subset \mathcal{P}(\{0, 1\})$ et $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\} \subset \mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$]

4) Soit $N = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ un entier impair supérieur à 1 et, dans $\mathbb{N}$, la congruence modulo N.
On identifiera $\mathbb{N}/\text{mod}N$ à l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$ des plus petits restes positifs modulo N.

(a) Prouver que $\mathbb{N} \ni x \mapsto x^2 = x \cdot x \in \mathbb{N}$ passe au quotient :

$$c : \mathbb{N}/\text{mod}N \to \mathbb{N}/\text{mod}N, x \mapsto x^2 = xx$$

(b) Prouver que si $l = 1, \ldots, N$ alors $c(l) = c(\overline{N - l})$. En déduire que si $k = 1, \ldots, N - 1$ alors, soit $c^{-1}(k) = \emptyset$, soit $\text{card}(c^{-1}(k)) \geq 2$ (et en ce dernier cas il y a $l \in \{1, \ldots, \frac{N-1}{2}\}$ tel que $c(l) = k$).

(c) En déduire que l'image $c(\mathbf{N}/\text{mod}N)$ de c a au plus $1 + \frac{N-1}{2} = \frac{N+1}{2}$ éléments.

(d) Dans les cas $N = 3, 5, 9, 15$, déterminer pour $k = 1, \ldots, N$ les nombres $\mathrm{card}(c^{-1}(k))$. A-t-on toujours égalité dans la minoration de **4c** et la majoration de **4c** ?

(e) Prouver que si $1 \leq l \leq l' = l + h \leq \frac{N-1}{2}$ alors $l + l'$ n'est pas divisible par N. En déduire que si de plus N est premier et $c(l) = c(l')$ alors $l = l'$. [on prouvera que h est divisible par N].

(f) Déduire de ce qui précède que si N est premier impair alors $\mathrm{card}(c(\mathbb{N}/\mathrm{mod}N)) = \frac{N+1}{2}$.

5) (a) Rappeler ce que signifie pour une relation d'ordre *être totale* et *être un bon ordre*, puis prouver qu'une relation de bon ordre est totale.

(b) Prouver que si $<_X$ est une relation de bon ordre sur un ensemble X telle que toute partie non vide de X a un plus grand élément alors l'ensemble X est fini.