TD 6

Primitives des fonctions continues.

1) (a) Pour $\theta \in]0,\pi[$ et $N \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^{N} e^{ik2\theta}$, en déduire les valeurs de $\sum_{k=0}^{N}\cos(2k\theta), \sum_{k=0}^{N}\sin(2k\theta)$

(b) En déduire, si $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}$ et α_N est la subdivision régulière de $[0,\varphi]$ la valeur des sommes de Darboux supérieures $L_{\alpha_N}(0,\varphi;\cos)$ et $L_{\alpha_N}(0,\varphi;\sin)$

(c) Vérifier que quand N tend vers l'infini ont des limites ue l'on déterminera.

.

2) On rappelle, pour $p \in \mathbb{N}$ la notation $\binom{X}{p} \in \mathbb{Z}[X]$ pour le polynôme p parmi X

$\binom{X}{p} = 1$ et, si $p > 0$ $\binom{X}{p} = \frac{1}{p!} = \prod_{h=0}^{p-1}(X-h)$ et considère la fonction $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_p(t) = \frac{t^p}{p!}$.

(a) Prouver que si $N \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{k=0}^{N}\binom{X+k}{p} = \binom{X+N+1}{p+1} - \binom{X}{p+1}$

[on rappelera d'abord la preuve de la relation $\binom{X+1}{p+1} - \binom{X}{p+1} = \binom{X}{p}$]

(b) Pour $1 \le p \le 3$ exprimer f_p en fonction des fonctions $\binom{t}{q}$ pour $q \le p$ et en déduire, si $t > 0$ et pour $1 \le p \le 3$, la valeur de la somme de Darboux supérieure $L_{\alpha_N}(0,t;f_p)$ de la fonction f_p relativement à la subdivision régulière α_N de l'intervalle $[0,t]$.

(c) Soit $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ un entier positif, vérifier que si $1 \le k \le N$ on a l'encadrement

$$\binom{k}{p} \le N^p f_p(\frac{k}{N}) \le \binom{k+p}{p}$$

(d) En déduire, si $t > 0$ et pour tout p un encadrement de $L_{\alpha_N}(0,t;f_p)$.

(e) Prouver $L_{\alpha_N}(0,t;f_p)$ a, quand N tend vers l'infini une limite que l'on déterminera. Ce résultat, en utilisant la seule secion 1 (primitives des fonctions continues sur $I = [a,b]$) du cours d'intégration, permet-il d'en déduire la valeur de l'intégrale supérieure $L(0,t;f_p)$?

3) Soit $m,n \in \mathbb{Z}$ avec $m \le n$. Pour tout entier k compris entre m et n ($m \le k \le n$) on se donne des nombres $t_k \in \mathbf{C}$ et définit la *sommation primée des t_k pour k allant de m à n* par :

$$\sum_{k=m}^{n}{}' t_k = \sum_{k=m}^{n} t_k - \frac{1}{2}[t_m + t_n]$$

(a) Prouver que $\sum_{k=m}^{n}{}'$ vérifie la relation de Chasles : si $p\in\mathbb{Z}$ et $m\le p\le n$ on a $\sum_{k=m}^{n}{}' = \sum_{k=m}^{p}{}' + \sum_{k=p}^{n}{}'$

(b) A partir de la définition calculer les sommes primées pour k allant de 0 à n dans les cas

i. $t_k = k$ ii. $t_k = k^2$ iii. $b \notin \mathbb{Z}\pi$ et $t_k = \cos(2kb)$

[pour 3(b)iii penser à $2\cos(a)\sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$ et $\sin(c+b) = \sin(c)\cos(b) + \cos(c)\sin(b)$]
Dans les trois cas comparer les formules obtenues avec les sommes correspondantes non primées]

4) Soit $0 < X,\epsilon,\beta \in \mathbb{R}$ des réels positifs et $N \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Pour on pose $a_0 = 0$ et pour $1 \le k \le N+1, a_k = \frac{X}{(1+\epsilon)^{N+1-k}}$ et considère la fonction $f = f_\beta : [0,X] \to \mathbb{R}, f(x) = x^\beta$.

(a) Prouver que $a_{N+1} = X$ et pour $1 \le k \le N+1$ on a $a_{k-1} < a_k$ et calculer $a_k - a_{k-1}$
[on distinguera les cas $k = 1$ et (si $N > 1$) $k > 1$]

(b) Dans le cas $X = 9, \epsilon = \frac{1}{2}$ et $N = 4$ représenter sur une droite graduée les a_k.

(c) Claculer les sommes de Darboux supérieures $L_{\alpha_{\epsilon,N}}(0,X;f)$ de la fonction f relativement à la subdivision $\alpha_{\epsilon,N} : a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{N+1} = X$ de l'intervalle $[0,X]$

(d) Déterminer la borne inférieure, pour $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, des $L_{\alpha_{\epsilon,N}}(0,X;f)$.