TD 5

Polynômes, primitives des fractions rationnelles, relations.

1) Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$) les fractions rationnelles suivantes :

(a) $\dfrac{X^2+1}{X(X^2-1)}$ (c) $\dfrac{X^5+X^3-X^2}{X^2+1}$ (e) $\dfrac{X^6+X^2+4}{X^4+2X^2+1}$

(b) $\dfrac{2}{(X+1)(X+2)(X+3)}$ (d) $\dfrac{4X^3}{(X^2-1)^2}$ (f) $\dfrac{3X^2+3}{X^3+3X-2}$

2) Soit A et B deux points distincts du plan $\Pi = \mathbf{R}^2$. On considère dans le plan les relations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{Q}$ définies par $P\,\mathcal{T}\,Q$ si et seulement si il y a un cercle passant par A, P et Q et $P\,\mathcal{Q}\,Q$ si et seulement si il y a un cercle passant par A, B, P et Q.

(a) Prouver que pour tout $(P,Q) \in \Pi^2$, il y a un point $R \in \Pi$ tel que $P\,\mathcal{T}\,R$ et $R\,\mathcal{T}\,Q$. Peut-on en déduire que $\mathcal{T}$ a une seule classe ?

(b) Prouver que la relation induite par $\mathcal{Q}$ sur le complémentaire $\Pi \setminus (AB)$ de la droite (AB) dans Π est une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalence.

(c) Dans le cas $A = (-1,0)$ et $B = (1,0)$ déterminer en fonction des coordonnées u et v du point $M = (u,v) \in \mathbf{R}^2$ une équation [*c.a.d.* une fonction $f_M : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ telle que $f_M(x,y) = f(u,v)$ si et seulement si $(x,y)\,\mathcal{Q}\,(u,v)$.] de la classe d'équivalence de M pour la relation d'équivalence $\mathcal{Q}$.

(d) Reprendre les questions précédentes pour les relations $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{Q}'$ obtenues en remplaçant dans les définitions de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{Q}$ les mots « il y a un cercle » par :

i. «il y a une droite»,

ii.) « il y a un cercle ou il y a une droite».

3) Dans $\mathbf{R}^2$ soit d_1, d_2, d_3 les droites vectorielles engendrées par $e_1 = (0,1), e_2 = (1,1), e_3 = (1,0)$.

(a) Soit $f, f' : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ deuxS isomorphismes linéaires tels que pour $i = 1,2,3,\ f(d_i) = f'(d_i)$.

i. Prouver que l'isomorphisme $g = f^{-1} \circ f'$ est tel que pour $i = 1,2,3$ on a $g(d_i) = d_i$.

ii. En déduire qu'il y a $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ tel que la matrice de g est $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

(b) Soit $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sont trois droites vectorielles deux à deux distinctes et, pour $i = 1,2,3$, un vecteur $f_i = (x_i, y_i)$ engendrant δ_i. Prouver que (f_1, f_3) est une base de $\mathbf{R}^2$ et $f_2 \notin \delta_1 \cup \delta_3$. En déduire que l'application linéaire f' de matrice $F' = \begin{pmatrix} y_1 & -x_1 \\ -y_3 & x_3 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ envoyant les droites δ_1 et δ_3 sur d_1 et d_3 respectivement (pour $i = 1,3$ on a $f(\delta_i) = d_i$), puis que : Il y a un isomorphisme f'' de $\mathbf{R}^2$de matrice $F'' = \begin{pmatrix} \omega' & 0 \\ 0 & \omega'' \end{pmatrix}$ diagonale tel que l'isomorphisme composé $f = f'' \circ f'$ envoie chaque droite $\delta_j, j = 1,2,3$ sur la droite d_j de même indice $(f(\delta_j) = d_j)$. Il y a-t-il unicité de (ω', ω'') ? Expliciter des (ω', ω'') possibles.

4) On rappelle que l'ensemble des droites vectorielles d'un espace vectoriel V s'identifie au quotient de l'ensemble $V \setminus \{0\}$ des vecteurs non nuls de V par la relation induite $\mathcal{L}_|$ par la colinéarité $\mathcal{L}$ [Si $u, v \in V$ alors $u\,\mathcal{L}\,v$ si et seulement si il y a $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ tels que $\lambda u + \mu v = 0$] et que dans le cas $V = \mathbf{R}^2$ on note $P^1(\mathbf{R}) = (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})/\mathcal{L}_|$, qui est nommé *droite projective réelle* et a pour système de représentant $\{\overline{(x,1)}; x \in \mathbf{R}\} \cup \{\overline{(1,0)}\}$ abrégé en $P^1(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

(a) i. Prouver que $\mathcal{L}_|$ est une relation d'équivalence sur $V \setminus \{0\}$

ii. La relation $\mathcal{L}$ est-elle une relation d'équivalence sur V ?

(b) i. A quelle condition une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ induit $\overline{f} = P^1(f) : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$?

ii. Prouver que f linéaire induit $\overline{f} : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ ssi f est un isomorphisme.

iii. Déduire de **3b** que deux isomorphismes linéaires $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ induisent la même application $\overline{f} = \overline{g} : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ si et seulement si elles sont colinéaires : il y a $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tel que $g = \lambda f$. que deux isomorphismes linéaires $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ induisent la même application $\overline{f} = \overline{g} : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ si et seulement si elles sont colinéaires : il y a $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tel que $g = \lambda f$.

5) On rappelle qu'une *homographie* est une classe d'équivalence $\overline{M}$ pour la relation de colinéarité de matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{R}), ad - bc \neq 0$ inversibles 2×2, d'après **4(b)iii** on peut l'identifier à $\overline{f} : P^1(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \cup \{\infty\} \ni x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \in P^1(\mathbf{R})$ induite par l'application linéaire f de matrice M.
a) Déduire de **3b**, et **4(b)iii** que si $Y \subset P^1(\mathbf{R})$ est une partie finie de $P^1(\mathbf{R})$ à au moins trois points ($\mathrm{card}(Y) \geq 3$) alors l'ensemble $H(Y)$ des homographies $\overline{f}$ tel que $\overline{f}(Y) \subset Y$ est fini.
b) Déterminer cet ensemble $H(Y)$ quand b1) $Y = \{0, \infty\} \subset \mathbf{R} \cup \{\infty\} = P^1(\mathbf{R})$
b2) $Y = \{0, 1, \infty\} \subset \mathbf{R} \cup \{\infty\} = P^1(\mathbf{R})$ b3) $Y = \{-1, 0, 1, \infty\} \subset \mathbf{R} \cup \{\infty\} = P^1(\mathbf{R})$

6) Sur l'ensemble $P = \mathbf{N}\backslash\{0\}$ des entiers positifs et sa partie $U = \{m \in P \,|\, \exists k \in \mathbb{N} m = 1 + 4 \cdot k\}$ de ceux qui ont 1 pour reste de la division par 4 on considère les relations de divisibilité $|_P$ et $|_U$ définies dans les deux cas $X = P, U$ par $m \,|_X\, n$ si et seulement si il y a $k \in X$ tel que $n = mk$. Prouver que :

(a) Si $X = P, U$ la divisibilité $|_X$ est une relation d'ordre et pour tout $u, v \in X$ l'ensemble $D_X(u, v) = \{d \in X; d|_X u \text{ et } d|_X v\}$ des éléments $|_X$ majorés par u et v (les diviseurs communs) est non vide et fini. L'ensemble $M_X(u, v) = \{m \in X; u|_X m \text{ et } v|_X m\}$ des éléments $|_X$ minorés par u et v (les multiples communs) est-il aussi non vide, fini ? Suit-il de vos réponses que :

(b) $D_X(u, v)$ (resp. $M_X(u, v)$) a un plus grand (resp. petit) élément

i. pour l'ordre $|_X$?,

ii. pour l'ordre induit de l'ordre usuel $\leq$ de $\mathbf{N}$?

(c) Déterminer $M_U(9, 21)$ et $D_U(693, 441)$. Le premier $M_U(9, 21)$ (resp. second $D_U(693, 441)$) a-t-il, pour l'ordre de divisibilité $|_U$, un plus petit (resp. grand) élément ?

(d) Montrer que $D_P(u, v)$ (resp. $M_P(u, v)$) a un plus grand (resp. petit) élément pour l'ordre $|_P$.

7) Le *milieu de* deux point $A, B \in \mathbf{R}^n$ de l'espace $\mathbf{R}^n$ est le point $M(A, B) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.
Dans l'ensemble $(\mathbf{R}^n)^2$des couples de points de $\mathbf{R}^n$ (les *bipoints*) on définit l'*équipolence* $\mathcal{E}$ par $(A, B)\,\mathcal{E}\,(A', B')$ si et seulement si le milieu de A et B' coincide avec celui de A' et B :

$$(A, B)\,\mathcal{E}\,(A', B') \quad \Longleftrightarrow \quad M(A, B') = M(A', B) \; (\Longleftrightarrow \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B' = \tfrac{1}{2}A' + \tfrac{1}{2}B)$$

Prouver que l'équipolence $\mathcal{E}$ est une relation d'équivalence a) En calculant dans $\mathbf{R}^n$, puis
b) Après s'être aidé de figures (n=2, 3), en utilisant les seules propriétés :
pour tout $C, D, E, F \in \mathbf{R}^n$ on a : (i) $M(C) = M(C)$ (ii) $M(C, D) = M(D, C)$
(iii) $M(C, D) = M(C, E) \Rightarrow E = D$ (iv) $M(M(C, D), M(E, F)) = M(M(C, E), M(D, F))$