TD 4

Polynômes, fractions rationnelles et leurs primitives.

1) Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$) les fractions rationnelles suivantes :

(a) $\dfrac{X^2+1}{X(X^2-1)}$ (c) $\dfrac{X^5-X^3-X^2}{X^2-1}$ (e) $\dfrac{X^6-X^2+1}{X^4-2X^2+1}$

(b) $\dfrac{2}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ (d) $\dfrac{4X^3}{(X^2+1)^2}$ (f) $\dfrac{3X^2+3}{X^3-3X-2}$

2) (a) Prouver qu'il y a une unique série formelle $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ telle que

$$(1-X^2)(1-X^3)S = 1$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ expliciter a_n et vérifier que a_n est le nombre des solutions $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ de

$$2a + 3b = n$$

[le nombre de manière de payer n avec des pièces de 2 et de 3]

(c) Pour $n = 0, 1, 3, 3, 4, 5$ calculer le nombre des solutions $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ de $2a + 3b = n$.

(d) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnellle

$$\frac{1}{(1-X)^2(1+X)(1+X+X^2)}$$

(e) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de a_n

(f) Vérifier que la formule trouvée en **2e.** coïncide avec celle trouvée en **2c.**, puis si $k, r \in \mathbb{N}$ avec $0 \le r \le 6$ exprimer a_{6k+r} en fonction de k et r, retrouver que pour $n \in \mathbb{N}$ le nombre a_n est entier et vérifier, si $n = 6k + r$ qu'il s'exprime en fonction de k et a_r.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.

(a) En utilisant, si $\theta \in \mathbb{R}$, la formule $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$ prouver qu'il y a un polynôme $Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on ait $\cos(n\theta) = Q_n(\cos(\theta))$ et calculer ainsi Q_0, Q_1, Q_2, Q_3

(b) Déterminer $Q_n(0)$, le coefficient de degré 0 du polynôme Q_n.

(c) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes Q_0, Q_1, Q_2, Q_3.

(d) Calculer les produits : $\cos(\frac{\pi}{2})$, $2\cos(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{3\pi}{4})$, $4\cos(\frac{\pi}{6})\cos(\frac{3\pi}{6})\cos(\frac{5\pi}{6})$.

(e) Prouver que si un polynôme polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ la relation $\cos(n\theta) = Q(\cos(\theta))$ alors $Q = Q_n$ est le polynôme déterminé en **3a.**

(f) Si $n > 0$ calculer $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)$. En déduire une autre preuve de **3a.** et, toujours si $n > 0$, la relation de récurrence

$$Q_{n+1} + Q_{n-1} = 2XQ_n$$

A l'aide de cette relation, retrouver le calcul de Q_n fait pour $0 \le n \le 3$ en **3a.** et donner les valeurs de Q_n pour $n = 4, 5, 6$.

(g) Prouver que pour $k \in \mathbb{N}$ et $0 \le k \le n-1$ les nombres $\cos(\frac{\pi(1+2k}{2n})$ sont deux à deux distincts : si $0 \le k \ne l \le n-1$ alors $\cos(\frac{\pi(1+2k}{2n}) \ne \cos(\frac{\pi(1+2l}{2n})$.

(h) Déduire de **3g.** la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de Q_n.

(i) Déduire de ce qui précède que $2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\cos(\frac{\pi(1+2k}{2n})$ est un entier, déterminer cet entier et retrouver **3d.**

(j) Soit $m,n\in\mathbb{N}$. En faisant le changement de variable $t=\cos(\theta)$ prouver que la fonction

$$f_{m,n} :]-1,1[\to\mathbb{R}, f_{m,n}(t)=Q_m(t)Q_n(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

admet une primitive qui est restriction d'une fonction continue $F_{m,n}:[-1,1]\to\mathbb{R}$.
En déduire, en distinguant les cas $m=n$ et $m\neq n$, la valeur de :

$$\int_{-1}^{1} Q_m(t)Q_n(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

4) Soit $a\in\mathbb{C}$ une racine simple du polynôme $Q\in\mathbb{C}[X]$ et $P\in\mathbb{C}[X]$.
Prouver que si $\frac{\lambda}{X-a}$ est le terme correspondant à a dans la décomposition en élément simples de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}\in\mathbb{C}(X)$ alors $\lambda=\frac{P(a)}{Q'(a)}$

5) Calculer une primitive des fonctions qui (si $a,b\in\mathbb{R}$) à t associent :

(a) $\frac{t}{3+2t}$

(b) $\frac{1}{t(t^3+81)}$

(c) $\frac{a^2}{t^2(a+bt)}$

(d) $\frac{b^2t}{(a+bt)^3}$

(e) $\frac{t^2}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$

(f) $\frac{a^2}{t(a+bt)^2}$

(g) $\frac{a}{t(a+bt)}$

(h) $\frac{2a}{t(a+bt^2)}$

(i) $\frac{2a}{a^2-t^2}$

(j) $\frac{2ab}{a^2-b^2t^2}$

(k) $\frac{1}{a^2+b^2t^2}$

(l) $\frac{2t^3}{(t^2+a^2)^2}$