TD 2

Calculs de primitives suite, polynômes.

1) Par intégration par partie, calculer les intégrales

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,dt$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\,dt$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)\,dt$

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t)\,dt$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6(t)\,dt$

2) On se propose pour tout $n \in \mathbb{N}$ de calculer la $n^{\text{ième}}$ *intégrale de Wallis :*

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt,$$

(a) Par un changement de variable établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $I_n = J_n$

(b) Calculer I_0 et I_1.

(c) Si $n > 0$, par une intégration par partie dans I_{n+1}, donner une relation entre I_{n+1} et I_{n-1}.

(d) Donner, en utilisant des signes $\prod$ la valeur de I_n [distinguer les cas $n = 2m$ pair et $n = 2m+1$ impair]

(e) Exprimer, en distinguant toujours les cas $n = 2m$ pair et $n = 2m + 1$ impair, la $n^{\text{ième}}$ intégrale de Wallis I_n à l'aide de factorielles, puis de coefficients binomiaux.

(f) Etablir pour tout entier positif m l'encadrement $I_{2m+1} < I_{2m} < I_{2m-1}$

(g) En déduire un encadrement de π.

3) (a) Expliciter les polynômes $P = \sum_{i=0}^{3} \frac{2^i}{i!} X^i, Q = \sum_{i=0}^{3} \frac{3^i}{i!} X^i, R = \sum_{i=0}^{6} \frac{2^i}{i!} X^i, P \cdot Q$.
Que remarquez-vous ?

(b) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Effectuer le produit $S \cdot T$ des séries fromelles $S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} X^i, T = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i}{i!} X^i$.
Si la formulle obtenue est $S \cdot T = S \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i$, que vaut $i! \cdot c_i$?

4) (a) Soit $P = X^3+12X^2+50X+80$. En posant $X = X+4-4$, (prouver qu'il y a et) déterminer, pour $0 \leq i \leq 3$, des $a_i \in \mathbb{Z}$ tels que $P = a_3(X + 4)^3 + a_2(X + 4)^2 + a_1(X + 4) + a_0$

(b) Retrouver votre résultat, en écrivant la formule de Taylor en $-4 \in \mathbb{Z}$ pour

$$P = 80 + 50X + 12X^2 + X^3 \in \mathbb{Z}[X]$$

5) Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier naturel.

(a) Rappeler la définition du polynôme dit k *parmi* X et noté $\binom{X}{k}$.

(b) Quel est le degré de $\binom{X}{k}$?

(c) Pour quels k a-t-on $\binom{X}{k} \in \mathbb{Z}[X]$? $\binom{X}{k} \in \mathbb{R}[X]$? $\binom{X}{k} \in \mathbb{Q}[X]$?

(d) Vérifier $\binom{X}{1} + \binom{X}{2} = \frac{1}{2}(X + 1)\binom{X}{1}$

(e) Etablir en général la relation $\binom{X}{k} + \binom{X}{k+1} = \frac{1}{k+1}(1 + X)\binom{X}{k}$

6) On considère l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, le sous ensemble de ceux dont le degré est au plus n est noté $\mathbb{R}[X]_n = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$

(a) Prouver que muni de l'addition des polynômes et de la multiplication des réels (identifiés aux polynômes de degré au plus 0) $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel.

(b) Prouver que $\mathbb{R}[X]_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$

(c) Prouver que $(X^i)_{0 \leq i \leq n} = (1, X, \dots, X^k, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}[X]_n$.

(d) Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X], P \cdot Q \neq 0$ deux polynômes non nuls avec $\deg(P) \neq \deg(Q)$. Prouver que P et Q sont linéairement indépendant.

(e) Soit $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes tels que pour $1 \leq k \neq l \leq m$ on ait $P_k \neq P_l$. Prouver que $(P_1, \dots, P_m)$ est une famille libre dans $\mathbb{R}[X]$.

(f) Prouver que $(\binom{X}{0}, \binom{X}{1}, \dots, \binom{X}{n})$ est une base de $\mathbb{R}[X]_n$

(g) Pour $0 \leq k \leq 3$ exprimer X^k dans la base $(\binom{X}{0}, \binom{X}{1}, \binom{X}{2}, \binom{X}{3})$ de $\mathbb{R}[X]_3$

7) Soit $0 \neq P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul de degré $\deg(P) = d$

(a) Prouver que, si $n \in \mathbb{N}$, la multiplication par P induit une application linéaire

$$m_n^P = m^P : \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}[X]_{n+d}$$

(b) Prouver que m^P est injective.
En déduire la dimension de son image $\mathrm{Im}(m^P) = \{m_(Q) \mid Q \in \mathbb{R}[X]_n\} \subset \mathbb{R}[X]_{n+d}$.
On suppose désormais $d > 0$, donc $0 \leq d - 1 \in \mathbb{N}$

(c) Déterminer l'intersection $\mathrm{Im}(m^P) \cap \mathbb{R}[X]_{d-1}$.

(d) Prouver que $\mathrm{Im}(m_n^P)$ et $\mathbb{R}[X]_{d-1}$ sont en somme directe dans $\mathbb{R}[X]_{n+d}$.

(e) Déduire de ce qui précède que pour tout polynôme $S \in \mathbb{R}[X]$ il y a des uniques polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}[X]_{d-1}$ tels que $S = P \cdot Q + R$

8) Soit d un entier positif et $P = a_0 + \dots + a_k X^k + \dots + a_{d-1} X^{d-1} + X^d \in \mathbb{R}[X]$un polynôme *unitaire* de degré d [le coefficient $a_d = 1$ de plus haut degré vaut 1]. On considère l'application

$$\tilde{X} : \mathbb{R}[X]_{d-1} \to \mathbb{R}[X]_{d-1}, \tilde{X}(A) = R, \exists Q \in \mathbb{R}[X] \text{ t. q. } X \cdot A = P \cdot Q + R$$

qui à un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]_{d-1}$ de degré inférieur à $d = \deg(P)$ associe le [voir l'exercice **7e)**]. *reste de la division par* P du polynôme produit $X \cdot A$

(a) Dans le cas $P = 1 + X^2$ écrire la matrice M_X de $\tilde{X}$ dans la base $1, X$ de $\mathbb{R}[X]_1$ et prouver que $\tilde{X}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]_1$

(b) Dans le cas $P = 1 + X + X^2$ écrire la matrice M_X de $\tilde{X}$ dans la base $1, X$ de $\mathbb{R}[X]_1$ et prouver que $\tilde{X}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]_1$

(c) Toujours dans le cas $P = 1 + X + X^2$, calculer M_X^2, M_X^3 et $I + M_X + M_X^2$

(d) Dans le cas $P = -1 + X^3$ écrire la matrice dM_X de $\tilde{X}$ dans la base $1, X, X^2$ de $\mathbb{R}[X]_2$ est-ce que $\tilde{X}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]_2$?

(e) Dans le cas général $P = a_0 + \dots + a_k X^k + \dots + a_{d-1} X^{d-1} + X^d \in \mathbb{R}[X]$ écrire la matrice M_X de $\tilde{X}$ dans la base $1, X, \dots, X^{d-1}$ de $\mathbb{R}[X]_{d-1}$.
Décrire l'application linéaire $f : \mathbb{R}[X]_{d-1} \to \mathbb{R}[X]_{d-1}$ de matrice

$$N = a_0 I + \dots + a_k M_X^k + \dots + a_{d-1} M_X^{d-1} + M_X^d \in \mathbb{R}[X]$$

En déduire, sans la calculer, la valeur de la matrice N.