TD 1

Trigonométrie-suite, calculs de primitives.

1) On rappelle les formules d'Euler $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

(a) Linéariser $\cos^3(t)\sin^2(t)$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^2(t)\,dt$

(c) Retrouver **1b)** par intégration par partie.

2) Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(t) = \mathrm{Arcsin}(\sqrt{1-t^2})$.

(a) Prouver que la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ et, si $t \in]0,1[$ calculer $f'(t)$.
En déduire, pour $t \in [-1,1]$, la valeur de $f(t)$.

(b) La fonction f est-elle dérivable sur $[-1,1]$, sur $]-1,1[$?

3) Soit $0 \neq a \in \mathbb{R}$ et $f :]a^{-1}, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{Arctg}(\frac{a+x}{1-ax})$

(a) Calculer la dérivée de f. En déduire une autre expression pour f

(b) Expliquer en exprimant $\frac{a+x}{1-ax}$ en fonction de $\alpha = \mathrm{Arctg}(a)$ et $\theta = \mathrm{Arctg}(x)$.

4) Soit sur le cercle unité $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ les point, A, B, M d'affixes $1, -1, z = e^{i\theta}$.

(a) Quelle est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$? Faire la figure.

(b) Calculer $|z+1|^2$ et $\dfrac{(z+1)^2}{z}$.

(c) On note $\rho = |z+1|$ et $z+1 = \rho e^{i\alpha}$. Peut on avoir $\pi \leq |\alpha| \leq 2\pi$?

(d) Déduire de **4b)** une relation entre α et θ, puis de **4c)** la valeur de α en fonction de θ.

(e) Quel théorème de géométrie ces calculs établissent-ils ?

(f) Compléter **4b)** en exprimant $z+1$ et z en fonction de $t = \mathrm{tg}(\alpha)$.

5) Application importante de la caractérisation des fonctions monotones dérivables.
Rappel : exponentielle est au dessus de sa tangente[1] au point d'abscisse 0 $\forall t \in \mathbb{R}$ on a $\exp(t) \geq 1+t$.

(a) On suppose $t \geq 0$

i. En comparant les dérivées de exp et $s \mapsto 1 + s + \dfrac{s^2}{2}$ établir : $1 + t + \dfrac{t^2}{2} \leq \exp(t)$

ii. En général prouver que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \leq \exp(t)$$

(b) On suppose $t \leq 0$

i. En comparant les dérivées de exp et $s \mapsto 1 + s + \dfrac{s^2}{2}$ établir : $\exp(t) \leq 1 + t + \dfrac{t^2}{2}$

ii. En déduire pour tout $t \leq 0$ la minoration : $1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} \leq \exp(t)$

iii. En général prouver que pour tout entier naturel $m \in \mathbb{N}$ on a l'encadrement :

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \frac{t^k}{k!} \leq \exp(t) \leq \sum_{k=0}^{2m} \frac{t^k}{k!}$$

[1] Aussi vrai pour tout point $(t_0, \exp(t_0))$ du graphe : $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(t) \geq \exp(t_0) + (t - t_0)\exp(t_0)$.
[Une telle fonction est dite *convexe (dérivable)*.]

6) Calculer[2] des primitives des fonctions qui à $t \in \mathbb{R}$ associent :

(a) $\dfrac{1}{4t^2 + 12t + 34}$

(b) $\dfrac{1}{9t^2 + 24t + 32}$

(c) $\dfrac{1}{4t^2 + 12t - 16}$

(d) $\dfrac{1}{9t^2 + 24t + 7}$

7) Soit $c : I \to \mathbb{R}^2, c(t) = (x(t), y(t))$ une courbe plane paramétrée pas des fonctions x et y dérivables sur un intervalle I et à dérivée continue.
Si $u, v \in I$ avec $u < v$ la *longueur de l'arc de la courbe c entre les points $c(u)$ et $c(v)$* est

$$\int_u^v \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$$

(a) Expliciter cette définition dans le cas $I =]-1, 1[, u = 0, v = s, x(t) = \sqrt{1-t^2}, y(t) = t$.

(b) Quelle courbe correspond au cas **7a)** ? Quel résultat du cours retrouve-t-on ainsi ?

8) On rappelle que si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle (de temps) et la position en fonction de $t \in I$ dans le plan complexe $\mathbb{C}$ d'un point est donnée en coordonnées polaires : $M(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ où $\rho, \theta : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables (et $\forall t \in I, \rho(t) \geq 0$) alors sa vitesse $V(t) = \rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)\theta'(t)ie^{i\theta(t)}$ a $\rho'(t)$ comme composante dans la direction $e^{i\theta(t)}$ du rayon vecteur et $\theta'(t)$ dans sa direction «normale directe» $ie^{i\theta(t)}$.
Une souris[3] est à l'instant $t \in [0, +\infty[$ au point e^{it}. Un chat[4] se déplace à vitesse constante V de sorte qu'à l'instant $t \in [0, +\infty[$ il soit en $\rho(t)e^{it}$ où $\rho : I \to [0, +\infty[$ est dérivable avec $\rho(0) = 0$.

(a) Dans le cas $V = 1$ traduire l'énoncé en une relation liant la fonction ρ et sa dérivée ρ'.

(b) Déduire de **8a)** qu'au temps $t = \frac{\pi}{2}$ le chat aura rattrapé la souris.

(c) Tracer la trajectoire du chat. Pouvait-on, sans ni **8a)** ni **8b)**, par un raisonnement géométrique dire que cette trajectoire était
   i. une solution du problème ?
   ii. la solution du problème ?

(d) Reprendre le question **8a)** dans le cas général.

(e) Déterminer dans le cas général la fonction ρ. En déduire que si $V < 1$ le chat ne rattrapera jamais la souris et sinon le temps au bout duquel la souris sera rejointe.

(f) Dans le cas où $V < 1$ le chat peut-il, par une autre tactique, rattraper la souris[5] ?

[2] après, si elles ne sont pas définissables sur $\mathbb{R}$ tout entier, avoir déterminé leur «domaine de définition»
[3] se déplaçant à vitesse constante 1 sur le bord d'un enclos circulaire de rayon 1.
[4] étant à tout instant sur le même rayon que la souris et en $t = 0$ au centre de l'enclos.
[5] On suppose par exemple la souris, privée de ses sens, ne voit le chat et reste en e^{it} à l'instant $t \in [0, +\infty[$.