TD 0

Calcul des primitives, intégrales des fonctions élémentaires.

1) Soit $E = \{f_{a,b,c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_{a,b,c}(t) = [at^2 + bt + c]e^{-t} \,|\, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$
et $u_1 = f_{0,0,1}, u_2 = f_{0,1,0}, u_3 = f_{1,0,0}, u_4 = f_{1,0,0}$.

(a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des aplications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que la dérivation induit une application linéaire
$D : E \to E, D(f) = f'$ dont on donnera la matrice :

i. M_u dans la base (u_1, u_2, u_3)

ii. M_v dans la base $(v_1 = u_1, v_2 = u_2, v_3 = \frac{1}{2}u_3)$. On note $N = M_v + I$.

(b) Calculer N^2, N^3 puis $M_v \cdot [1 + N + N^2] = [N - 1] \cdot [1 + N + N^2]$. En déduire :

(c) que D est un isomorphisme linéaire et donner la matrice de D^{-1}

i. M_v^{-1} dans la base (v_1, v_2, v_3)

ii. M_u^{-1} dans la base (u_1, u_2, u_3)

2) Calculer les dérivées des fonctions qui à $t \in \mathbb{R}$ associent :

(a) $\frac{1}{4}[3 + 2t - 3\,\mathrm{Log}(3 + 2t)]$

(b) $\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(8t + 3 + 4\sqrt{5 + 3t + 4t^2})$

(c) $\frac{1}{243}\,\mathrm{Log}(\frac{t^3}{t^3 + 81})$

(d) $\sqrt{(3 + t)(2 + t)} + \mathrm{Log}(\sqrt{3 + t} + \sqrt{2 + t})$

3) Soit $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$. Calculer les dérivées des fonctions qui à $t \in \mathbb{R}$ associent :

(a) $b\,\mathrm{Log}(\frac{a + bt}{t}) - \frac{a}{t}$

(b) $\frac{a}{2(a + bt)^2} - \frac{1}{a + bt}$

(c) $\mathrm{Log}(\frac{\sqrt{bt + a^4} - a^2}{\sqrt{bt + a^4} + a^2})$

(d) $2\,\mathrm{Arctg}(\sqrt{\frac{bt - a^4}{a^4}})$

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = (2t + 1)(t + 3)(t - 3)$

(a) Développer $(2t + 1)(t + 3)(t - 3)$, en déduire $f'(t)$.

(b) Par dérivation logarithmique donner une autre expression pour $f'(t)$.

(c) Vérifier la cohérence des deux résultats.

5) Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \mathrm{Log}(\sqrt{t^2 + 1} + t),\ g(t) = \mathrm{Log}(\sqrt{t^2 + 1} - t)$

(a) Prouver que ces applications sont bien définies.

(b) Calculer les dérivées f' et g'.

(c) Que vaut $f' + g'$? Aurait-on pu prévoir ce dernier résultat ?

6) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ un entier non nul et $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f_n(t) = nt^{\frac{1}{n}}$

(a) Calculer f'_n et si $t \geq 1$ et comparer $f'_n(t)$ et $\mathrm{Log}'(t) = \frac{1}{t}$.

(b) En déduire, toujours si $t \geq 1$, l'encadrement :

$$|n|[t^{\frac{1}{|n|}} - 1]t^{-\frac{1}{|n|}} = -|n|[t^{-\frac{1}{|n|}} - 1] \leq \mathrm{Log}(t) \leq |n|[t^{\frac{1}{|n|}} - 1]$$

(c) Donner un encadrement analogue de $\mathrm{Log}(t)$ si $0 < t \leq 1$.

7) On rappelle les formules d'Euler $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

(a) Linéariser $\cos^3(t)\sin^2(t)$.

(b) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^2(t)\,dt$

(c) Retrouver 7b par intégration par partie.

8) Dans le plan $\mathbb{R}^2$ soit le cercle $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2=1\}$ et le point $B=(-1,0)$.

(a) Donner l'équation de la droite D_t de pente $t \in \mathbb{R}$ et passant par B.

(b) Déterminer, en fonction de t l'intersection $D_t \cap \mathcal{C}$ de la droite D_t avec le cercle $\mathcal{C}$.

(c) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont tels que $t = \mathrm{tg}(\alpha)$ et $B \neq (\cos(\beta), \sin(\beta)) \in D_t \cap \mathcal{C}$.
Quelle relation a-t-on entre α et β ?

(d) Déduire de ce qui précède, si $\theta \in \mathbb{R}$, des relations exprimant les fonctions trigonométriques $\cos(\theta), \sin(\theta), \mathrm{tg}(\theta)$ en fonction de la tangente de l'arc moitié $\mathrm{tg}(\frac{\theta}{2})$.

9) Trigonométrie hyperbolique [Un petit problème à rendre le Mardi 10 février 2009]

Les fonctions de trigonométrie hyperbolique sont :

$$\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(a) Vérifier qu'elles sont dérivables, calculer leurs dérivées et tracer leurs graphes.

(b) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ l'expression : $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)$.

(c) Prouver que th induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et que la bijection réciproque arcth : $]-1,1[\to \mathbb{R}$ est dérivable, de dérivée :

$$\mathrm{arcth}' :]-1,1[\to \mathbb{R},\ \mathrm{arcth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

(d) Du calcul, pour $x \in]-1,1[$, de $\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$ déduire la valeur de $\mathrm{arcth}(x)$.

(e) Calculer la dérivée de $f :]-1,1[\to \mathbf{R},\ f(x) = \mathrm{th}(\frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x}))$, retrouver **9d)**.

(f) Déterminer directement, pour $y \in]-1,1[$, pour quels $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{th}(x) = y$, comparer le résultat obtenu avec ceux de **9d)** et **9e)**.

(g) Prouver que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ de bijection réciproque dérivable :

$$\mathrm{arcsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{de dérivée} \quad \mathrm{arcsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(h) Reprendre, avec sh au lieu de th la question **9f)**, puis comparer le résultat obtenu et celui de **9g)** avec ceux de l'exercice **5b)**.