1 Fractions rationnelles à coefficients dans A.

1.1 Définitions opérations et dérivation des fractions rationnelles.

1.1.1 Définitions. Une *fraction de polynômes à coefficients dans A* est un couple de polynômes $(P, Q) \in A[X] \times (A[X] \setminus \{0\}$ dont le second élément [le premier élément P de la fraction (P, Q) est son *numérateur*] , dit *dénominateur* $Q \neq 0$ est non nul.

La *somme* et le *produit* de deux fractions de polynômes $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2)$ sont :

$$(P_1, Q_1) + (P_2, Q_2) = (P_1 \cdot Q_2 + P_2 \cdot Q_1,\ Q_1 \cdot Q_2), \quad (P_1, Q_1) \cdot (P_2, Q_2) = (P_1 \cdot P_2,\ Q_1 \cdot Q_2)$$

1.1.2 Définition et Proposition (sera montrée dans les parties relation d'équivalence et opération du cours)**.**

(i) Deux fractions de polynômes $(P, Q), (P_1, Q_1)$ à coefficients dans A définissent la même *fraction rationnelle* $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P_1}{Q_1}$ *à coefficients dans A* si

$$P \cdot Q_1 = Q \cdot P_1$$

Cet *ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans A* est noté $A(X)$.

(ii) Les opérations $+$ et $\cdot$ sur les fractions de polynômes définissent $+$ et $\cdot$ sur $A(X)$:

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot Q_2 + Q_1 \cdot P_2}{Q_1 \cdot Q_2}, \quad \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot P_2}{Q_1 \cdot Q_2}$$

Pour tout $a = \frac{P}{Q}, b = \frac{R}{S}, c = \frac{T}{U} \in A(X)$, si $0 = \frac{0}{1}, 1 = \frac{1}{1}, -a = \frac{-P}{Q}$ et si $a \neq 0, a^{-1} = \frac{Q}{P}$ on a :

(a) $(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(b) $a + 0 = a = 0 + a, \quad a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$

(c) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

(d) $a + (-a) = 0 = (-a) + a$, et si $a \neq 0$, $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$

(e) $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$

(iii) $i : A[X] \to A(X), P \mapsto \frac{P}{1}$ est injective [Si $P \in A[X]$ est un polynôme on le considère comme fraction rationnelle, abrègeant $i(P)\ (= \frac{P}{1}) \in A(X)$ en $P \in A(X)$.] , $i(0) = 0, i(1) = 1$ et pour tout $P_1, P_2 \in A[X]$ on a :

$$i(P_1 + P_2) = i(P_1) + i(P_2) \quad \text{et} \quad i(P_1 \cdot P_2) = i(P_1) \cdot i(P_2)$$

1.1.3 Proposition. *Il y a une unique application $D : A(X) \to A(X)$ prolongeant la dérivation des polynômes telle que pour toutes fraction rationnelle $a, b \in A(X)$ et tout polynôme $P \in A[X]$ on a*

$$D(\frac{P}{1}) = \frac{D(P)}{1}, \quad D(a + b) = D(a) + D(b), \quad D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$$

elle est définie par $D(\dfrac{P}{Q}) = \dfrac{D(P) \cdot Q - P \cdot D(Q)}{Q^2}$

1.1.4 Application (Dérivées successives de Arctg)**.** Comme $\mathrm{Arctg}'(t) = \dfrac{1}{1 + t^2} = \dfrac{1}{2}\Big[\dfrac{1}{1 - it} + \dfrac{1}{1 + it}\Big]$ il vient pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(n+1)!} \mathrm{Arctg}^{(n+1)}(t) = \frac{1}{2(n+1)} (i)^n \Big[\frac{1}{(1 - it)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(1 + it)^{n+1}}\Big] = \frac{\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n+1}{n-2k} (-1)^{n-k} t^{n-2k}}{(n+1)(1 + t^2)^{n+1}}$$

En particulier $\dfrac{1}{(2m + 1)!} \mathrm{Arctg}^{(2m+1)}(0) = \dfrac{1}{2m + 1}$ et $\dfrac{1}{(2m + 2)!} \mathrm{Arctg}^{(2m+2)}(0) = 0$.

1.1.5 Exercice. Vérifier par récurrence sur n que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1 + X^2}$ est

$$D^n(\frac{1}{1 + X^2}) = \frac{\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} n! \binom{n+1}{n-2k} (-1)^{n-k} X^{n-2k}}{(1 + X^2)^{n+1}}$$

1.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

1.2.1 THÉORÈME. *Soit* $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ *une fraction rationnelle à coeficients complexes de dénominateur de degré q, de factorisation réduite*

c. a d. *où* $0 \neq a_q \in \mathbb{C}$ *et soit* $q = 0, Q = a_0$, *soit pour* $1 \leq i \leq p$ *il y a* $z_i \in \mathbb{C}$ *et* $1 \leq m_i \in \mathbb{N}$ *avec si* $i \neq j, z_i \neq z_j$

si $q \geq 1$ $Q = a_q \prod_{k=1}^{p} (X - z_k)^{m_k}$ *ou* $Q = a_0$ *alors il y a un polynôme* $E \in \mathbb{C}[X]$ *et pour* $1 \leq k \leq p$ *et* $1 \leq l \leq m_k$ *des* $\lambda_{k,l} \in \mathbb{C}$ *tels que :*

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{m_l} \frac{\lambda_{k,l}}{(X - z_k)^l}$$

1.2.2 Exemple. Appliquons l'algorithme à la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2+1} = \dfrac{1}{(X^-i)(X+i)}$ [dont les valeurs en $t \in \mathbb{R}$ sont celles de la dérivée de la fonction Arctg] Ici $P = 1, m_1 = m_2 = 1, z_1 = i, z_2 = -i$ donc $\lambda_{1,1} = \frac{1}{i-(-i)} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}, \lambda_{2,1} = \frac{1}{-i-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$ et on vérifie que :

$$\frac{1}{X^2+1} - [\frac{-i}{2(X^-i)} + \frac{i}{2(X^+i)} = \frac{2 + i(X+i) - i(X-i}{2(X^-i)(X^+i)} = \frac{2 + iX - 1) - iX - 1}{2(X^2+1)} = 0$$

1.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

1.3.1 THÉORÈME. *Soit* $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ *une fraction rationnelle à coeficients réels de dénominateur de degré q, de factorisation réduite*[1] *si* $q \geq 1$ $Q = a_q \prod_{k=1}^{r} (X - t_k)^{m_k} \prod_{l=1}^{s} (X^2 - 2\Re(\omega_l)X + |\omega_l|^2)^{\nu_k}$ *ou* $Q = a_0$ *alors il y a un polynôme* $E \in \mathbb{R}[X]$ *et pour* $1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq s$ *et* $1 \leq m \leq m_k, 1 \leq n \leq \nu_l$ *des* $\lambda_{k,m}, \alpha_{l,n}, \beta_{l,n} \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,m}}{(X - t - k)^m} + \sum_{l=1}^{s} \sum_{n=1}^{\nu_l} \frac{2\alpha_{l,n}(X - \Re(\omega_l)) + \beta_{l,n}}{(X^2 - 2\Re(\omega_l)X + |\omega_l|^2)^n}$$

1.3.2 Exemples.

1. $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{1}{X(X^2+1)} = \dfrac{1}{X(X^-i)(X+i)}$ Ici $P = 1, r = 1, s = 1, m_1 = \nu_1 = 1, t_1 = 0, \omega_1 = i$ donc $\lambda_{1,1} = \frac{1}{0^2+1} = \frac{1}{1} = 1, 2[\alpha_{1,1}(i - \Re(i)) + \beta_{1,1} = \frac{1}{i} = -i$, donc $\alpha_{1,1} = -\frac{1}{2}, \beta_{1,1} = 0$, *c. a d.* $2\alpha_{1,1}(X - \Re(i)) + \beta_{1,1} = -X$ et on vérifie :
$$\frac{1}{X(X^2+1)} - [\frac{1}{X} + \frac{-X}{X^2+1}] = \frac{1 - [(X^2+1) - X \cdot X}{X(X^2+1)} = \frac{1 - X^2 - 1) - X^2}{X(X^2+1)} = 0$$
2. Le cas $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{1}{X(X^2+1)^2}$ se fait en deux étapes : trouver d'abord $\lambda_{1,1} = \frac{1}{(0^2+1)^2} = \frac{1}{1} = 1$, $2[\alpha_{1,1}(i - \Re(i)) + \beta_{1,1} = \frac{1}{i} = -i$,*c. a d.* $2\alpha_{1,1}(X - \Re(i)) + \beta_{1,1} = -X$, puis :
$$\frac{1}{X(X^2+1)^2} - [\frac{1}{X} + \frac{-X}{(X^2+1)^2}] = \frac{1 - (X^2+1)^2 - X}{X(X^2+1)^2} = \frac{1 - X^2 - 2X - 1 + X}{X(X^2+1)^2} = \frac{-X^2 - X}{X(X^2+1)^2} = \frac{-X}{X^2+1}$$

[1] les cas $r = 0$ ou $s = 0$ sont possibles, il faut interpréter

$$\prod_{k=1}^{0} (X - t_k)^{m_k} = 1 = \prod_{l=1}^{0} (X^2 - 2\Re(\omega_l)X + |\omega_l|^2)^{\nu_k}$$

$$\sum_{k=1}^{0} \sum_{m=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,m}}{(X - t - k)^m} = 0 = \sum_{l=1}^{0} \sum_{n=1}^{\nu_l} \frac{2\alpha_{l,n}(X - \Re(\omega_l)) + \beta_{l,n}}{(X^2 - 2\Re(\omega_l)X + |\omega_l|^2)^n}$$