Notations

A est $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\{0, 1\} = \{\text{pair}, \text{impair}\}$, les *entiers relatifs, nombres rationnels, nombres réels, nombres complexes, parités* chacun munis de ses $0, 1 \in A$ son addition $+$ et sa multiplication $\cdot$ usuelles.

1 Définitions et opérations des polynômes.

1.0.1 Définitions (et notations)**.** Un *polynôme P à coefficient dans A* est une suite

$$P = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} = (a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in A^{\mathbb{N}}$$

(de $a_k \in A$ indicée par les entiers naturels) nulle à partir d'un certain rang : $\exists N \in \mathbb{N}, \text{t. q. } \forall k > N, a_k = 0$.
Si N est un tel entier, le polynôme P est dit de *degré au plus* N et on note

$$P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k + \cdots + a_N X^N$$

Si $k \in \mathbb{N}$, le $k^{ième}$ *coefficient* [ou *coefficient de degré k*] du polynôme $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est $c_k(P) = a_k$.
Si P est de degré au plus N de $N^{\text{ième}}$ coefficient $a_N \neq 0$ non nul P est dit de *degré* N, on écrit alors $\deg(P) = N$.
Si $P = 0$, on fait la convention $\deg(P) = -\infty$.
On note $A[X]$ cet ensemble de polynômes à coefficients dans A.

1.0.2 Définition. Les *somme* et *produit* de deux polynômes $P = \sum_{k=0}^{M} a_k, Q = \sum_{l=0}^{N} b_l \in A[X]$

sont $P + Q = \sum_{i=0}^{M+N} s_i X^i, \qquad P \cdot Q = \sum_{j=0}^{M+N} p_j X^j$ où pour $0 \leq i, j \leq M + N$ on a :

$$s_i = a_i + b_i \qquad \text{et} \qquad p_j = \sum_{k=0}^{j} a_k \cdot b_{j-k}$$

1.0.3 Exercices.
1. Calculer, si $P = 1 + X$ et $Q = 1 - X + X^2 - X^3$ le produit $P \cdot Q$.
2. Si $P = a + bX + cX^2 + dX^3, Q = u + vX + wX^2$, en «dévellopant à doite, faisant sauter les coefficients de Q au dessus de P et regroupant», calculer : $P \cdot Q = \big[a + bX + cX^2\big]u + \big[a + bX + cX^2\big]vX + \big[a + bX + cX^2\big]wX^2 =$
$= u\big[a + bX + cX^2\big] + \big[a + bX + cX^2\big]X + w[a + bX + cX^2\big]X^2 = \cdots$

1.0.4 Définitions. Une *série formelle* à coefficients dans A est une suite

$$S = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} = (a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in A^{\mathbb{N}}$$

de $a_k \in A$ indicée par les entiers naturels. On note $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k + \cdots + a_N X^N$
Le $k^{ième}$ *coefficient* [ou *coefficient de degré k*] de la série formelle $S = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est $c_k(S) = a_k$.
On note $A[[X]]$ cet ensemble de séries formelles à coefficients dans A.
Si $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k, T = \sum_{l=0}^{\infty} b_k X^k$ sont deux séries formelles leurs *somme* $S + T = \sum_{i=0}^{\infty} s_i^i$ et leur *produit* $S \cdot T = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^j$
sont les séries entières dont les coefficients s_i et p_j sont donnés par les mêmes formules **1.0.2** que pour les polynômes.

1.0.5 Exercice. Soit $S = \sum_{l=0}^{\infty} X^l$ et $T = \sum_{l=0}^{\infty} (l + 1) X^l$. Calculer $S \cdot S, S \cdot T$ et $T \cdot T$.

1.0.6 Remarque et définition. Une série formelle $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in A[[X]] \setminus A[X]$ qui n'est pas un polynôme n'a pas de degré .
Par contre si $0 \neq S \in A[[X]]$ la *valuation de* de S, notée $\text{val}(S) = k_0$ est $k_0 \in \mathbb{N}$, le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k \neq 0$.
Si $S = 0$ on convient $\text{val}(S) = +\infty$. Un polynôme étant une série formelle, a une valuation.

1.0.7 PROPOSITION. *Soit* $P = \sum_{k=0}^{D} a_k X^k, Q \sum_{l=0}^{E} b_l X^l R = \sum_{m=0}^{F} c_m X^m \in A[X]$. *alors :*

(i) $(P+Q)+R = P+(Q+R)$ $\qquad (P\cdot Q)\cdot R = P\cdot(Q\cdot R)$

(ii) $P\cdot(Q+R) = (P\cdot R)+(Q\cdot R)$ $\qquad (P+Q)\cdot R = (P\cdot R)+(Q\cdot R)$

(iii) $P+0 = P = 0+P$ $\qquad P\cdot 1 = P = 1\cdot P$

(iv) *Si* $-P = (-1)\cdot P = \sum_{k=0}^{D}(-a_k)X^k$ *alors :* $P+(-P) = 0 = (-P)+P$

(v) $P+Q = Q+P$ $\qquad P\cdot Q = Q\cdot P$

1.0.8 PROPOSITION. *Soit* $P = \sum_{k=0}^{D} a_k X^k, Q = \sum_{l=0}^{E} b_l X^l \in A[X]$ *alors :*

$$\deg(P\cdot Q) = \deg(P)+\deg(Q) \qquad \mathrm{val}(P\cdot Q) = \mathrm{val}(P)+\mathrm{val}(Q)$$

1.0.9 COROLLAIRE. *Si* $P, Q \in A[X]$ *sont tels que* $P\cdot Q = 0$, *alors soit* $P = 0$ *soit* $Q = 0$.

2 Dérivation des polynômes.

2.0.10 Définition. La *dérivation* est $D : A[X] \to A[X]$ qui au polynôme $P = \sum_{k=0}^{D} a_k X^k$ associe son *polynôme dérivé* [ou sa *dérivée*] $\quad D(P) = P' = \sum_{k=0}^{D} k a_k X^{k-1} = \sum_{l=0}^{D-1}(l+1)a_{l+1}X^l$

Si $k \in \mathbb{N}$ la *dérivation* $k^{ième}$ $D^k : A[X] \to A[X], D^k(P) = P^{[k]}$
est définie par $D^0 = \mathrm{Id}$ et $D^{k+1} = D\circ D^k$ $\qquad$ [les mêmes formules définissent $D, D^k : A[[X]] \to A[[X]]$]

2.0.11 Remarque. Si $P = a \in A \subset A[X]$ est un polynôme de degré au plus 0 on a $D(P) = 0$.

2.0.12 Rappel. Si $k, n \in \mathbb{N}$ avec $k \le n$ le coefficient binômial $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ est entier,
$\binom{n}{0} = 1$ et, si $1 \le k$, $\binom{n}{k} = \dfrac{1}{k!}\prod_{h=0}^{k-1}(n-h)$ se généralise en k *parmi* X, *le polynôme coefficient binomial* $\binom{X}{k}$:
$\binom{X}{0} = 1$ et si $1 \le k$, $\binom{X}{k} = \dfrac{1}{k!}\prod_{h=0}^{k-1}(X-h)$ [en particulier si $m \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$) avec $m < k$ on a $\binom{n}{k} = 0$]

2.0.13 LEMME. *Pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$ *on a :* $D(X^n) = nX^{n-1}$.
Plus généralement si $k \in \mathbb{N}$ *on a* $D^k(X^n) = n\cdots(n+1-k)X^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}X^{n-k} = k!\binom{n}{k}X^{n-k}$,
donc $\dfrac{1}{k!}D^k(X^n) = \binom{n}{k}X^{n-k}$ *et dans tous les cas [même* $A = \mathbb{Z}, A = \{0,1\}$ *!] on peut définir* $\dfrac{1}{k!}D^k : A[X] \to A[X], P \mapsto \dfrac{1}{k!}P^{[k]}$

2.0.14 PROPOSITION (Linéarité et Leibnitz). *Pour tout polynômes* $P, Q \in A[X]$ *et* $a, b \in A$ *on a :*

$$D(aP+cQ) = aD(P)+bD(Q) \qquad D(P\cdot Q) = D(P)\cdot Q + P\cdot D(Q)$$

2.0.15 Exercice. Pour $S = 1-X$ et $T = \sum_{k=0}^{\infty} X^k$ Calculer par Leibnitz $D(S\cdot T)$. En déduire une autre solution de **1.0.5**.

2.0.16 THÉORÈME. *Soit* $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ *un polynôme de degré au plus* N *et* $a \in A$ *alors :*

$$P = \sum_{k=0}^{N}(X-a)^k \frac{1}{k!}P^{(k)}(a)$$

où (voir un cours ultérieur), pour $\dfrac{1}{k!}P^{[k]} = Q = \sum_{l=0}^{M} b_l X^l \in A[X]$ *et* $a \in A$, *l'*évaluation *de* Q *en* a *est* $Q(a) = \sum_{l=0}^{M} b_l a^l \in A$

2.0.17 Exercice. Dans le cas $P = 2-5+6X^2-4X^3+X^4$ et $a = 1$, dérouler la preuve de **2.0.16** [poser $X = (X-1)+1$], puis calculer, pour $1 \le k \le 4$, $\frac{1}{k!}P^{[k]}(1)$ et vérifier que votre résultat est celui prédit par **2.0.16**.