Polynômes et fractions rationnelles.

Le calcul polynomial et décomposition en éléments simples.

Table des matières

Notations

On désignera par A l'un des ensembles de nombre $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \Big\{0,1\Big\} = \Big\{\text{pair}, \text{impair}\Big\}$,
les *entiers relatifs, nombres rationnels, nombres réels, nombres complexes, parités*
chacun munis de ses $0, 1 \in A$ son addition $+$ et sa multiplication $\cdot$ usuelles. [1)]

[1)] On utilisera les propriétés suivantes de ces opérations $+, \cdot$:
pour tout $a, b, c \in A$ on a :
$(a+b)+c = a+(b+c), \qquad (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
$a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c), \quad (a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c)$
$a+0 = a = 0+a, \quad a\cdot 1 = a = 1\cdot a$
il y a $-a$ tel que $a+(-a) = 0 = (-a)+a$
$a+b = b+a, \qquad a\cdot b = b\cdot c$

De cette première liste propriétés, pour tout $a \in A$, il suit :

$a\cdot 0 = 0 = 0\cdot a \quad (-1)\cdot a = -a = a\cdot(-1)$

De plus, dans les cinq cas considérés ci-dessus on a :

si $a\cdot b = 0$ alors, soit$a = 0$, soit $b = 0$

et pour les quatre cas $A = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \Big\{0,1\Big\}$ on a de plus :

et si $a \neq 0$ il y a a^{-1}, noté aussi $\frac{1}{a}$, tel que : $a\cdot a^{-1} = 1 = a^{-1}\cdot a$

[Quand $A = \{0,1\} = \{\text{pair}, \text{impair}\}$, on a par définition

$$0+0 = 0 = 1+1, \quad 0+1 = 1 = 1+0 \qquad 0\cdot 0 = 0\cdot 1 = 1\cdot 0 = 0, \quad 1\cdot 1 = 1$$

qui correspond bien avec les règles de parité pour les opérations dans les entiers.]

Présentation

L'étude systématique des ensembles munis d'opérations ayant les propriétés rappelées en marge ci-dessus occupera une autre partie du cours. Ici on se propose seulement, utilisant [1] ces

« propriétés [qui ne sont pas si] évidentes [[que çà]»

de manière automatique[2] dans le but de pouvoir :

1. Définir les fractions rationelles et déterminer leurs primitives.
2. Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.

deux morceaux de la partie d'analyse du programme de Mat122 où on ne peut faire l'économie d'un peu d'algèbre, algèbre que l'on préfère ici exposer de cette manière pragmatique pour ne pas avoir à attendre la fin du cours pour s'entrainer sur ces deux points, importants pour la physique notamment.

[1]comme Monsieur Jourdain, ou il a été fait au Lycée.
[2]comme on apprend les quatre opérations et le calcul des fractions à l'école.

1 Polynômes à coefficients dans A.

1.1 Définitions et opérations des polynômes.

1.1.1 Définitions (et notations)**.** Un *polynôme P à coefficient dans A* est une suite

$$P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in A^{\mathbb{N}}$$

d'éléments $a_k \in A$ de A indicée par les entiers naturels et qui est nulle à partir d'un certain rang :
Il y a un entier [2] $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k > N$ on a $a_k = 0$.
Si N est un tel entier, P est dit de *degré au plus* N et, plutôt que $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on note [3]

$$P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k + \cdots + a_N X^N$$

Le $k^{ième}$ *coefficient* [ou *coefficient de degré k*] du polynôme $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est $c_k(P) = a_k$.
Si P est de degré au plus N de $N^{\text{ième}}$ coefficient $a_N \neq 0$ non nul P est alors dit de *degré N* on écrit alors $\deg(P) = N$. Par convention $\deg(P) = -\infty$ si $P = 0$ est le polynôme nul.
On note $A[X]$ l'ensemble des polynômes.

[2] non unique, si N a cette propriété alors tout $N' \geq N$ l'a aussi. ainsi si $a, b, c \in A$ on a l'égalité des polynômes
$a = a + 0X = a + 0X + 0X^2$, $\quad a + bX = a + bX + 0X^2 + 0X^3$,
$a + bX + cX^2 = a + bX + cX^2 + 0X^3, \ldots$

[3] Ce n'est qu'une notation, si $P = \sum_{k=0}^{M} a_k X^k, Q = \sum_{l=0}^{N} b_k X^k$ sont deux polynômes, l'égalité $P = Q$ signifie [d'après la définition originale, comme suite] que pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $a_j = b_j$.

1.1.2 Remarques. 1. Quand certains des coefficients sont nuls où valent un ($a_k = 0$ ou $a_k = 1$) les abus de notations suivant sont fréquent (et bien pratiques !) :
X pour $0 + 1X$, plus généralement X^k pour $0 + 0X + \cdots + 0X^{k-1} + 1X^k$.

2. Ainsi $X \in A[X]$ est un polynôme [4] qui jouera un rôle particulier.
3. Certains livres écrivent $P(X)$ au lieu de P, ce (pour l'instant **1.3.61.**) n'est justifié que si il y a ambiguité,
   la lettre P pouvant représenter autre chose qu'un polynôme ou [5] pour préciser qui désigne ce «polynôme de base» de **2.** [dont le coefficient de degré un est un et tous les autres sont nuls]
4. Même quand on utilise la notation usuelle $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ pour un polynôme,
   ses coefficients de degré $k > N$ sont définis (ils valent $a_k = 0$) et
   il peut être pratique [6] de changer N en $N' = M > N$ et d'écrire $P = \sum_{k=0}^{M} a_k X^k$.
5. Il est aussi pratique [7] de définir les a_k pour tout entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ en posant, si $k < 0, a_k = 0$.

[4] celui dont le coefficient $a_1 = 1$ de degré un vaut un et les coefficients de degré $k \neq 1$ différent de un sont nuls.

[5] comme plus tard, une fois $A[X]$ muni de $+$ et $\cdot$, on recommencera le même jeu avec $A[X]$ au lieu de A il y aurait ambiguité si on écrivait alors $A[X][X]$, la solution serait alors d'introduire une nouvelle lettre et d'écrire $A[X][Y]$ ou, si on ne veut pas s'arrêter en si bon chememin numéroter ces lettres : $A[X_1][X_2]$

[6] comme ci-dessous pour définir les opérations $+$ et $\cdot$ dans $A[X]$.

[7] voir ci-dessous la définition du produit de deux polynômes.

1.1.3 Définition. Soit $P = \sum_{k=0}^{M} a_k, Q = \sum_{l=0}^{N} b_l \in A[X]$ deux polynômes.

Les *somme* et *produit* de P et Q sont [8] : $P + Q = \sum_{i=0}^{M+N} s_i X^i, \qquad P \cdot Q = \sum_{j=0}^{M+N} p_j X^j$

où pour $0 \leq i, j \leq M + N$ on a : $s_i = a_i + b_i$ et $p_j = \sum_{k=0}^{j} a_k \cdot b_{j-k}$

[8] En fait $P + Q$ est une somme de $\max(M, N)$ termes, mais $\max(M, N)$ est une notation plus lourde que $M + N$.

1.1.4 Exemples. 1. On a $X^k \cdot X^l = X^{k+l}$ donc [une fois connu somme et produits dans ce nouvel «ensemble de nombres» $A[X]$, celui des polynômes], la notation $P = \sum_{k=0}^{M} a_k X^k$ correspond, à l'emploi du signe $\sum_{k=a}^{b}$ que l'on a l'habitude d'utiliser dans $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

2. Une identité remarquable connue : si $P = 1 - X$ et $Q = 1 + X + X^2$ alors $P + Q = (1 + 1) + (1 + (-1))X + (0 + 1)X^2 = 2 + 0X + X^2 = 2 + X^2$ et $PQ = 1 \cdot 1 + [(1 \cdot 1) + ((-1) \cdot 1)]X + [(1 \cdot 1) + [(-1) \cdot 1) + (0 \cdot 1)]X^2 + [(1 \cdot 0) + ((-1) \cdot 1) + (0 \cdot 1) + (0 \cdot 1)]X^3 = 1 + [1 - 1X] + [1 - 1 + 0]X^2 + [0 - 1 + 0]X^3 = 1 - X^3$

3. Si $P = a + bX + cX^2$ et $Q = u + vX + wX^2$ alors, en allant un peu plus vite :
$P \cdot Q = [au] + [av + bu]X + [aw + bv + cu]X^2 + [a0 + bw + cv + 0u]X^3 + [a0 + b0 + cw + 0v + 0u]X^4 = [au] + [av + bu]X + [aw + bv + cu]X^2 + [bw + cv]X^3 + [cw]X^4.$
c'est le résultat que l'on aurait obtenu en «dévellopant à gauche», «faisant sauter les X^k au dessus de Q et regroupant» ;
$P \cdot Q = \big[a + bX + cX^2\big]\big[u + vX + wX^2\big] = a\big[u + vX + wX^2\big] + bX\big[u + vX + wX^2\big] + cX^2\big[u + vX + wX^2\big] =$
$a\big[u + vX + wX^2\big] + b\big[u + vX + wX^2\big]XcX^2\big[u + vX + wX^2\big]X^2 =$

$$\begin{array}{cccccccc} = a & + & avX & + & awX^2 & & & \\ & + & buX & + & bvX^2 & + & bwX^3 & \\ & & & + & cuX^2 & + & cvX^3 & + \; cwX^4 \end{array}$$

$= au + (av + bu)X + (aw + bv + cu)X^2 + (bw + cv)X^3 + cwX^4$

1.1.5 Exercices. 1. Comme dans l'exemple **1.1.4. 2.** calculer, si $P = 1 + X$ et $Q = 1 - X + X^2 - X^3$ le produit $P \cdot Q$.

2. Comme en **3.**, si $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ et $Q = u + vX + wX^2$, calculer en «dévellopant à doite», «faisant sauter les nombres au dessus de P» et regroupant :
$P \cdot Q = \big[a + bX + cX^2\big]u + \big[a + bX + cX^2\big]vX + \big[a + bX + cX^2\big]wX^2 = u\big[a + bX + cX^2\big] + \big[a + bX + cX^2\big]X + w\big[a + bX + cX^2\big]X^2 = \cdots$

1.1.6 Remarques. Si $P = \sum_{k=0}^{M} a_k X^k, Q = \sum_{l=0}^{N} b_l X^l \in A[X]$ sont deux polynômes.

Comme pour $k > N$ ou $k < 0$, et $l > M$ ou $l < 0$ on a $a_k = 0$ et $b_l = 0$
on peut [9] re-écrire la formule donnant le $j^{\text{ième}}$ coefficient p_j du produit $P \cdot Q$ en

$$p_j = \sum_{k=0}^{M} a_k \cdot b_{j-k} = \sum_{l=0}^{N} a_{j-l} \cdot b_l$$

[9] Cela est particulièrement pratique si l'un des polynôme est de degré petit par rapport à l'autre, voir l'exemple ci-dessous.

1.1.7 Exemple. Si $P = 1 - X$ et $Q = 1 + X + X^2$ alors :
$PQ = 1 \cdot 1 + [(1 \cdot 1) + ((-1) \cdot 1)]X + [(1 \cdot 1) + [(-1) \cdot 1)]X^2 + [(1 \cdot 0) + ((-1) \cdot 1)]X^3 = 1 + [1 - 1X] + [1 - 1]X^2 + [0 - 1]X^3 = 1 - X^3.$

1.1.8 Remarque. Dans cette définition la condition que les coefficients a_k, b_l des polynômes P et Q soit nuls à partir d'un certain rang [si $k > M$ ou $l > N$] n'a été (implicitement) utilisée que pour assurer que les coefficients s_j, p_j des polynômes $P+Q$ et $P \cdot Q$ sont nuls à partir d'un certain rang [pour $i, j > M+N$]. Les formules définissant les coeficients s_i et p_j gardent un sens sans ces conditions :

1.1.9 Définitions. Une *série formelle* à coefficients dans A est une suite

$$S = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in A^{\mathbb{N}}$$

d'éléments $a_k \in A$ de A indicée par les entiers naturels. On note [10)]

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k + \cdots + a_N X^N$$

Le $k^{ième}$ *coefficient* [ou *coefficient de degré* k] de la série formelle $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est $c_k(S) = a_k$.
On note $A[[X]]$ l'ensemble de ces séries formelles.
Si $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k, T = \sum_{l=0}^{\infty} b_k X^k$ sont deux séries formelles
leur *somme* $S+T = \sum_{i=0}^{\infty} s_i^i$ et leur *produit* $S \cdot T = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^j$ sont les séries entières dont les coefficients s_i et p_j sont donnés par les mêmes formules **1.1.3** que pour les polynômes.

10) Ce n'est qu'une notation, si $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k, T = \sum_{l=0}^{\infty} b_k X^k$ sont deux séries formelles, l'égalité $S = T$ signifie [d'après la définition originale, comme suite] que pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $a_j = b_j$.

1.1.10 Exemple. Si $S = 1 - X$ et $T = \sum_{l=0}^{\infty} X^l$ on a $S \cdot T = 1$ en effet $c_0(S \cdot T) = 1\cdot = 1$ et si $j > 0, c_j(S \cdot T) = \sum_{k=0}^{1} c_k(S) \cdot c_{j-k}(T) = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 1 - 1 = 0$.
Un résultat et un calcul plus simple que pour l'exemple **1.1.4. 2.** $\left[1 - X\right] \cdot \left[1 + X + X^2\right] = 1 - X^3$

1.1.11 Exercice. Soit $S = \sum_{l=0}^{\infty} X^l$ et $T = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) X^l$. Calculer $S \cdot S, S \cdot T$ et $T \cdot T$.

1.1.12 Remarque. Pour une série formelle $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ on peut avoir $a_k \neq 0$ pour des k arbitrairement grands, son degré n'est pas défini. Par contre si $S \neq 0$ il y a $k_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k \neq 0$, c'est la *valuation de* la série formelle S, on la note $\mathrm{val}(S) = k_0$.
Si $S = 0$ on convient que S est de *valuation infinie* et note $\mathrm{val}(S) = +\infty$.
Un polynôme étant une série formelle, on peut parler de sa valuation.

1.1.13 Proposition (Propriétés de + et $\cdot$ dans les polynômes). [11)]

[11)] Elles sont aussi vraies dans les séries formelles

Soit $P = \sum_{k=0}^{D} a_k X^k, Q \sum_{l=0}^{E} b_l X^l$ *et* $R = \sum_{m=0}^{F} c_m X^m \in A[X]$ *trois polynômes à coefficients dans A alors :*

1. $(P+Q)+R = P+(Q+R)$ $\qquad (P\cdot Q)\cdot R = P\cdot(Q\cdot R)$

(ii) $((P\cdot(Q+R) = (P\cdot R)+(Q\cdot R)$ $\qquad (P+Q)\cdot R = (P\cdot R)+(Q\cdot R)$

(iii) $P+0 = P = 0+P$ $\qquad P\cdot 1 = P = 1\cdot P$

(iv) *Si* $-P = (-1)\cdot P = \sum_{k=0}^{D}(-a_k)X^k$ *alors :* $P+(-P) = 0 = (-P)+P$

(v) $P+Q = Q+P$ $\qquad P\cdot Q = Q\cdot P$

Démonstration : [de $(P\cdot Q)\cdot R = P\cdot(Q\cdot R)$] On a $P\cdot Q = \sum_{i=0}^{D+E}\Big(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\Big)X^i$ donc $(P\cdot Q)\cdot R = \sum_{j=0}^{(D+E)+F}\Big[\sum_{i=0}^{j}\Big(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\Big)c_{j-i}\Big]X^j$.

Pour $l, m < 0$ on a $b_l = 0 = c_m$ on peut pousser les indices i et k des deux dernières sommes, jusqu'à $D+E+F$ et échanger ces sommes :

$$P\cdot Q = \sum_{j=0}^{D+E+F}\Big[\sum_{i=0}^{D+E+F}\Big(\sum_{k=0}^{D+E+F} a_k(b_{i-k}c_{j-i})\Big)\Big]X^j = \sum_{j=0}^{D+E+F}\Big[\sum_{k=0}^{D+E+F}\Big(\sum_{i=0}^{D+E+F} a_k(b_{i-k}c_{j-i})\Big)\Big]X^j = \sum_{j=0}^{D+E+F}\Big[\sum_{k=0}^{j} a_k\Big(\sum_{l=i-k}^{j-k} b_l c_{j-l}\Big)\Big]X^j = P\cdot(Q\cdot R)$$

□

1.1.14 Proposition (degré et valuation d'un produit). [12)] *Soit* $P = \sum_{k=0}^{D} a_k X^k, Q = \sum_{l=0}^{E} b_l X^l$ *deux polynômes à coefficients dans A alors*

[12)] $\deg(P\cdot Q) = \deg(P)+\deg(Q)$ n'a pas de sens pour les séries formelles, mais si $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k, T = \sum_{l=0}^{\infty} b_l X^l$ sont deux séries formelles on a aussi $\mathrm{val}(S\cdot T) = \mathrm{val}(S)+\mathrm{val}(T)$

$$\deg(P\cdot Q) = \deg(P)+\deg(Q) \qquad \mathrm{val}(P\cdot Q) = \mathrm{val}(P)+\mathrm{val}(Q)$$

Démonstration : [de $\deg(P\cdot Q) = \deg(P)+\deg(Q)$]. Si P ou Q est nul alors $P\cdot Q$ est nul et les deux membres de légalité valent $-\infty$. Sinon on peut supposer P de degré D, *c. a d.* $a_D \neq 0$, et Q de degré E, *c. a d.* $b_E \neq 0$. Comme la formule définissant $P\cdot Q$ assure que $P\cdot Q$ est de degré au plus $D+E$ et que son coefficient de degré $D+E$ est $a_D\cdot b_E \neq 0$ donc $\deg(P\cdot Q) = D+E = \deg(P)+\deg(Q)$. □

1.1.15 Exercice. Ecrire la démonstration de $\mathrm{val}(P\cdot Q) = \mathrm{val}(P)+\mathrm{val}(Q)$

1.1.16 Corollaire. *Si* $P, Q \in A[X]$ *sont tels que* $P\cdot Q = 0$, *alors soit* $P = 0$ *soit* $Q = 0$.

Démonstration : On a $-\infty = \deg(P\cdot Q) = \deg(P)+\deg(Q)$ donc soit $\deg(P) = -\infty$ soit $\deg(Q) = -\infty$, *c. a d.* soit $P = 0$ soit $Q = 0$. □

1.2 Dérivation des polynômes.

1.2.1 Définition. La *dérivation* est l'application $D : A[X] \to A[X]$ qui au polynôme $P = \sum_{k=0}^{D} a_k X^k$ associe son *polynôme dérivé* [ou sa *dérivée*]

$$D(P) = P' = \sum_{k=0}^{D} k a_k X^{k-1} = \sum_{l=0}^{D-1} (l+1) a_{l+1} X^l$$

Si $k \in \mathbb{N}$ la *dérivation* $k^{ième}$ $D^k : A[X] \to A[X], D^k(P) = P^{[k]}$ est définie par

$$D^0 = \mathrm{Id}\,\text{et}\; D^{k+1} = D \circ D^k$$

les mêmes formules définissent $D, D^k : A[[X]] \to A[[X]]$

1.2.2 Remarque. Si $P = a \in A \subset A[X]$ est un polynôme de degré au plus 0 alors [13] $D(P) = 0$.

1.2.3 Rappel. Si $k, n \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$ le coefficient binômial $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ est entier, puisque $\binom{n}{0} = 1$ et, si $1 \leq k$, $\binom{n}{k} = \dfrac{1}{k!} \prod_{h=0}^{k-1} (n-h)$ se généralise en k *parmi* X, *le polynôme coefficient binomial* $\binom{X}{k}$: $\binom{X}{0} = 1$ et si $1 \leq k$, $\binom{X}{k} = \dfrac{1}{k!} \prod_{h=0}^{k-1} (X-h)$

[en particulier si $m \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$) avec $m < k$ on a $\binom{n}{k} = 0$]

1.2.4 Lemme. *Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a : $D(X^n) = nX^{n-1}$.*
Plus généralement si $k \in \mathbb{N}$ on a $D^k(X^n) = \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} = k! \binom{n}{k} X^{n-k} \Big[= n \cdots (n+1-k) X^{n-k}$, si $k \geq 1\Big]$
donc $\dfrac{1}{k!} D^k(X^n) = \binom{n}{k} X^{n-k}$ et dans tous les cas [14] on peut définir $\dfrac{1}{k!} D^k : A[X] \to A[X], P \mapsto \dfrac{1}{k!} P^{[k]}$

[13] La réciproque [Si $D(P) = 0$ alors P est de degré au plus 0] est vraie dans les quatre cas usuels $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ où si $a \in A$ est tel que, un entier positif $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$0 = na \; (= \underbrace{n + \cdots + n}_{n-1 \text{signes}+}) \text{alors} a = 0$$

mais pas pour $A = \{0, 1\} = \{\text{pair}, \text{impair}\}$, puisque $P = X^2$ est de degré 2 donc non nul, mais $D(P) = 2X = (1+1)X = 0X = 0$.

[14] même $A = \mathbb{Z}, A = \{0, 1\}$

1.2.5 PROPOSITION. *Pour tout polynômes* $P = \sum_{k=0}^{M} a_k X^k, Q = \sum_{l=0}^{M} b_l X^l \in A[X]$ *et* $a, b \in A$ *on a :* [Linéarité de la dérivation et règle de Leibniz]

$$D(aP + cQ) = aD(P) + bD(Q) \qquad D(P \cdot Q) = D(P) \cdot Q + P \cdot D(Q)$$

Démonstration : [de Leibniz] $D(P) \cdot Q + P \cdot D(Q) = \left[\sum_{k=0}^{M} k a_k X^{k-1}\right] \cdot \left[\sum_{l=0}^{N} b_l X^l\right] + \left[\sum_{k=0}^{M} a_k X^k\right] \cdot \left[\sum_{l=0}^{N} l b_l X^{l-1}\right] =$

$$= \left[\sum_{i=0}^{M+N} \Big(\sum_{k=0}^{i} k a_k b_{i-k}\Big) X^{i-1}\right] + \left[\sum_{i=0}^{M+N} \Big(\sum_{k=0}^{i} a_k (i-k) b_{i-k}\Big) X^{i-1}\right] = \sum_{i=0}^{M+N} \Big(\sum_{k=0}^{i} (k a_k b_{i-k} + a_k (i-k) b_{i-k})\Big) X^{i-1} = \sum_{i=0}^{M+N} i \Big(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\Big) X^{i-1} = D(P \cdot Q) \quad \square$$

1.2.6 Exercice. Pour $S = 1 - X$ et $T = \sum_{k=0}^{\infty} X^k$ Calculer par Leibniz $D(S \cdot T)$. En déduire une autre solution de l'exercice **1.1.11.**.

1.2.7 THÉORÈME. *Soit* $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ *un polynôme de degré au plus* N *et* $a \in A$ *alors :* [Formule de Taylor pour les polynômes]

$$P = \sum_{k=0}^{N} (X - a)^k \frac{1}{k!} P^{(k)}(a)$$

où [15]*, pour* $\frac{1}{k!} P^{[k)} = Q = \sum_{l=0}^{M} b_l X^l \in A[X]$ *et* $a \in A$*, l'*évaluation de Q en a *est* $Q(a) = \sum_{l=0}^{M} b_l a^l \in A$

[15] voir la secion suivante évaluation et racines des polynômes

Démonstration : Comme $X = (X - a) + a$, la formule du binôme, que pour $i < k$, $\binom{i}{k} = 0$ et le lemme **1.2.4.** donnent :

$$P = \sum_{i=0}^{N} a_k \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (X - a)^k a^{i-k} = \sum_{i=0}^{N} a_k \sum_{k=0}^{N} \binom{i}{k} (X - a)^k a^{i-k} = \sum_{k=0}^{N} (X - a)^k \sum_{i=0}^{N} a_k \binom{i}{k} a^{i-k} = \sum_{k=0}^{N} (X - a)^k \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) \qquad \square$$

1.2.8 Exercice. Dans le cas $P = 2 - 5 + 6X^2 - 4X^3 + X^4$ et $a = 1$, dérouler la preuve de **1.2.7** [poser $X = (X - 1) + 1$], puis calculer, pour $1 \leq k \leq 4$, $\frac{1}{k!} P^{[k)}(1)$ et vérifier que votre résultat est celui prédit par la formule **1.2.7.** de Taylor pour les polynômes.

1.3 Evalualuation en un point, composition et racines.

Comme la notation $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ pour écrire les polynômes obéit aux mêmes règles de manipulation calculatoire que le signe somme pour les éléments de A on a la :

1.3.1 Définition et Proposition. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in A[X]$ et $b \in A$.

L'*évaluation des polynômes à coefficients dans A au point b* [16] est :

$$\mathrm{ev}_b : A[X] \to A, P \mapsto P(b) = \sum_{k=0}^{n} a_k b^k$$

On dit que $\mathrm{ev}_b(P) = P(b)$ est la *valeur en b du polynôme P.*

Si $Q \in A[X]$ et $c, d \in A$ on a :

$$(c \cdot P + d \cdot Q)(b) = c \cdot P(b) + d \cdot Q(b) \qquad (P \cdot Q)(b) = P(b) \cdot Q(b)$$

L'*appliction (polynomiale) associée au polynôme P* est :

$$P : A \to A, b \mapsto P(b)$$

1.3.2 Remarque. Par définition deux polynômes $P = Q \in A[X]$ égaux ont même application polynomiale associée. Nous verrons que dans les «cas habituels» $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (où l'ensemble de nombres A est infini) la réciproque est vraie, ce n'est pas toujours le cas :

1.3.3 Exemple. Si $A = \{0,1\} = \{\text{pair, impair}\}$ et $P = X^2 - X, Q = 0 \in A[X]$. On a $P(0) = 0 - 0 = 0 = Q(0)$ et $P(1) = 1 - 1 = 0 = Q(0)$ Ce sont deux polynômes distincts $P \neq Q$ de même application polynômiale associée.

Bien que (dans ces cas habituels) cela soit souvent fait, il convient donc de ne pas confondre un polynôme $P \in A[X]$ et sont application polynomiale $P : A \to A$ associée.

1.3.4 Rappel. On peut [17], puisque les opérations d'addition $+$ et de multiplication $\cdot$ dans $A[X]$ gardent les propriétés [18] qu'elles avaient dans A, répéter la contruction des polynômes et considérer $A[X,Y] = (A[X])[Y]$ les polynômes à coefficients dans $A[X]$. On a donc $(A \subset)\, A[X] \subset A[X,Y]$ (un polynôme à coefficients dans A est un polynôme [de $(A[X])[Y]$, de degré 0] à coefficients dans $A[X]$et, en considérant ses coefficients dans $A[X] \supset A$, être aussi considéré comme polynôme [de $(A[X])[Y]$, de degré $\deg(P)$] à coefficients dans $A[X]$.)

[16] Il est essentiel pour cette définition que P soit un polynôme et non une série formelle (car dans A on ne peut définir la somme d'une infinité de termes !)

[17] en prenant la nouvelle lettre Y, notant $Q = \sum_{k=0}^{n} P_k Y^k$ pour ne pas confondre avec X apparaissant dans les coefficients $P_k \in A[X]$

[18] pour tout $a, b, c \in A$ on a :
$(a+b)+c = a+(b+c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \quad (a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
$a + 0 = a = 0 + a, \quad a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
il y a $-a$ tel que $a + (-a) = 0 = (-a) + a$
$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot c$

1.3.5 Définition. Soit $P, Q \in A[X]$ deux polynômes à coefficients dans A. Le *polynôme composé* $P \circ Q$ est $P \circ Q = \mathrm{ev}_Q(P) \in A[X]$ l'image par l'évaluation en $Q \in A[X]$, $\mathrm{ev}_Q : (A[X])[Y] \to A[X]$ du polynôme $P \in A[X] \subset (A[X])[Y]$ considéré comme polynôme à coefficients dans $A[X]$. Ainsi si $P = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j, Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ on a $P \circ Q = P(Q) = \sum_{j=0}^{m} a_j Q^j = \sum_{j=0}^{m} a_j \Big(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\Big)^j \in A[X]$.

1.3.6 Exemples.

1. Si $P = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$, et $Q = X \in A[X]$ alors $P \circ Q = P(Q) = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$ cohérent avec la notation usuelle (Cf. **1.1.23.**) $P(X)$ pour P.
2. Si $P = X^n$ et $Q = a + X$ alors $P \circ Q = (a+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} X^k$ par la formule du binôme.
3. Si $Q = X + a$ et $P \in A[X]$ comme par la formule de Taylor **1.2.7.** on a $P = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a)(X-a)^k$ il vient $P \circ Q = P(X+a) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) X^k$

1.3.7 Exercice. Soit $P \in A[X] \subset (A[X])[Y]$ et $Q = X + Y \in (A[X])[Y]$, en reprenant la preuve de **1.2.7)**, établir l'*identité remarquable de Taylor* : $P(X+Y) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} P^{(k)} Y^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} P^{(k)}(X) Y^k$

1.3.8 Exercice. Soit $P, Q \in A[X]$ deux polynômes à coefficients dans A et $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.

(a) Déduire de l'identité remarquable de Taylor **1.3.7.** la formule $\frac{1}{n!}(P \cdot Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} P^{(n-k)} \cdot \frac{1}{k!} Q^{(k)}$

(b) En déduire la formule de Leibniz $(P \cdot Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(n-k)} Q^{(k)}$ pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de polynômes.

(c) Etablir les deux résultats précédents directement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(Dérivation des polynômes composés)

1.3.9 Proposition. *Soit $P, Q \in A[X]$ alors la dérivée du polynôme composé $P \circ Q$ est :*

$$(P \circ Q)' = D(P \circ Q) = \big(D(P) \circ Q\big) \cdot D(Q) = P'(Q) \cdot Q'$$

Démonstration : Par linéarité et comme $D(X^0) = 0$ il suffit de traiter le cas $P = X^n$ avec $n \geq 1$. Comme $P' = nX^{n-1}$ il faut montrer $D(Q^n) = nQ^{n-1} \cdot Q'$: la tautologie $D(Q) = Q' = 1 \cdot 1 \cdot Q' = 1 \cdot Q^0 \cdot Q'$ pour $n = 1$ et si $n > 1$, par la formule de Leibniz **1.2.5.**, le pas de récurrence $D(Q^n) = D(Q^{n-1} \cdot Q) = D(Q^{n-1}) \cdot Q + Q^{n-1} \cdot D(Q) = \big((n-1)Q^{n-2} \cdot Q'\big) \cdot Q + Q^{n-1}) \cdot Q' = (n-1+1)Q^{n-1} \cdot Q' = nQ^{n-1} \cdot Q'$ □

1.3.10 Notation. Soit une famille $a_0, \ldots, a_n \in A$ [resp. $P_0, \ldots P_n \in A[X]$] indicés par $0 \leq k \leq n$ de $n+1$ éléments de A [resp. $A[X]$]. Pour chacun des indices k on note [19] :

$$\prod_{0 \leq j \neq k \leq n} a_j \qquad \text{resp.} \qquad \prod_{0 \leq j \neq k \leq n} P_j$$

[19] $\prod_{0 \leq j \neq 0 \leq n} a_j = \prod_{j=1}^{n} a_j$, $\prod_{0 \leq j \neq n \leq n} a_j = \prod_{j=0}^{n-1} a_j$ et si $0 < k < n$: $\prod_{0 \leq j \neq k \leq n} a_j = \big(\prod_{j=0}^{k-1} a_j\big) \cdot \big(\prod_{j=k+1}^{n} a_j\big)$

le produit dans A [resp. $A[X]$] pour les n indices j entre 0 et n qui sont distincts de k des a_j [resp P_j].

1.3.11 PROPOSITION (formule d'interpolation de Lagrange). *On suppose* $A = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \{0,1\}$ [20].

Soit $n \in \mathbb{N}$ *un entier naturel et* $a_0, \ldots, a_n \in A$ *et* $b_0, \ldots, b_n \in A$ *deux familles de* $n+1$ *éléments de* A *indicées de* 0 *à* n *telles que les* a_j *sont deux à deux distincts : si* $0 \leq i \neq j \leq n$ *alors* $a_i \neq a_j$.

Pour $0 \leq k \leq n$ *posons* $L_k = \dfrac{1}{\prod\limits_{0 \leq j \neq k \leq n} (a_k - a_j)} \cdot \prod\limits_{0 \leq j \neq k \leq n} (X - a_j)$ *alors :*

$$P = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot L_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{\prod\limits_{0 \leq j \neq k \leq n} (a_k - a_j)} \cdot \prod_{0 \leq j \neq k \leq n} (X - a_j)$$

(*polynôme d'interpolation de Lagrange* de valeurs b_i aux points a_i)

est un polynôme de degré au plus n *qui, pour* $0 \leq i \leq n$, *vérifie* $P(a_i) = b_i$.

[20] plus généralement si pour tout $0 \neq a \in A$ non nul il y a un $a' \in A$ (noté $a^{-1} = \frac{1}{a}$) tel que $a \cdot a' = 1$

Démonstration : Produit des n termes $X - a_j, j \neq k$ de degré 1 (et de $0 \neq \dfrac{1}{\prod\limits_{0 \leq j \neq k \leq n} (a_k - a_j)} \in A$), chaque L_k est de degré 1 d'où P de degré au plus n.

$L_i(a_i) = \dfrac{1}{\prod\limits_{0 \leq j \neq i \leq n} (a_i - a_j)} \cdot \prod\limits_{0 \leq j \neq i \leq n} (a_i - a_j) = 1$ et pour $0 \leq j \neq i \leq n$, le terme $(X - a_j)$ étant en facteur dans L_i on a $L_i(a_j) = 0$,

donc pour $0 \leq k \leq n$ on a : $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k L_k\right)(a_i) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k L_k(a_i) = b_i L_i(a_i) = b_i$. □

1.3.12 COMPLÉMENT. *Le polynôme d'interpolation de Lagrange de valeurs* $b_0, \ldots, b_n \in A$ *aux points* $a_0, \ldots, a_n \in A$ *est l'unique polynôme* $P \in A[X]$ *de degré au plus* n *tel que :*

$$\text{pour } \; 1 \leq i \leq n \text{ on ait } \; P(a_i) = b_i$$

Démonstration : Si P_1, P_2 sont deux tels polynômes, alors $P = P_1 - P_2$ est un polynôme de degré au plus n qui s'annulle aux $n+1$ points $a_0, \ldots, a_n$. Par le corollaire **1.3.18.** ci-dessous $P = 0$, donc $P_1 = P_2$. □

1.3.13 Exemples. dans le cas $A = \mathbb{Q}$

1. Si $n = 1$ alors $L_0 = \frac{1}{a_0 - a_1}(X - a_1), L_1 = \frac{1}{a_1 - a_0}(X - a_0)$ et

$$P = \frac{b_0}{a_0 - a_1}(X - a_1) + \frac{b_1}{a_1 - a_0}(X - a_0) = \frac{b_0 a_1 - b_1 a_0}{a_1 - a_0} + \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0} X$$

qui donne $(a_1 - a_0)Y - (b_1 - b_0)X = b_0 a_1 - b_1 a_0$ comme équation d'une droite passant par (a_0, b_0) et (a_1, b_1).

2. Si $n = 2$ alors $L_0 = \frac{1}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)}(X - a_1)(X - a_2), \quad L_1 = \frac{1}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)}(X - a_1)(X - a_2), \quad L_2 = \frac{1}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)}(X - a_0)(X - a_1)$ et

$$P = \frac{b_0}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)}(X - a_1)(X - a_2) + \frac{b_1}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)}(X - a_0)(X - a_1) + \frac{b_2}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)}(X - a_0)(X - a_1) =$$

$$= \frac{1}{(a_1 - a_0)(a_2 - a_1)(a_0 - a_2)} \cdot \Big[b_0(a_1 - a_2) \cdot (X - a_1)(X - a_2) + b_1(a_2 - a_0) \cdot (X - a_2)(X - a_0) + b_2(a_0 - a_1) \cdot (X - a_0)(X - a_1) \Big]$$

3. Si pour $1 \leq k \leq n, a_k = k$, alors

$$L_n = \frac{1}{\prod\limits_{0 \leq j < n} (n - j)} \cdot \prod_{0 \leq j < n} (X - j) = \frac{1}{\prod\limits_{k=n-j=1}^{n} k} \cdot \prod_{j=0}^{n-1} (X - j) = \frac{1}{n!} \cdot \prod_{j=0}^{n-1} (X - j) = \binom{X}{n}$$

est le polynôme *coefficient binomial n parmi X.*

1.3.14 Exercice. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $P = \binom{X}{k+1}, Q = \binom{X}{k}$. Etablir la relation du triangle de Pascal polynomiale : $P(X + 1) - P = Q$.

1.3.15 THÉORÈME. *Si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k X^k \in A[X]$ et $a \in A$ il y a $Q \in A[X]$ (0 ou de degré au plus $n - 1$) avec :*

$$P - P(a) = (X - a) \cdot Q$$

Démonstration : [par factorisation de $X^k - a^k$] Supposant $n \geq 1$, $P - P(a) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k X^k - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k a^k = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k (X^k - a^k) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k (X^k - a^k) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k (X - a) \sum_{l=0}^{k-1} X^{k-1-l} a^l = (X - a) \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{m=0}^{k-1} X^m a^{k-1-m} = (X - a)Q \text{ où } Q = \sum_{m=0}^{n-1} d_m X^m \text{ avec } d_m = \sum_{k=m+1}^{n} c_k a^{k-1-m}$$

□

Démonstration : [par Taylor] Si $n \geq 1$ on a : $P - P(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}}{k!}(a) (X - a)^k = (X - a)Q$ où $Q = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}}{k!}(a) (X - a)^{k-1}$ □

1.3.16 Exercice. Vérifier directement que si $n \geq 1$ et $P = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k X^k \in A[X]$ et $a \in A$ alors $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}}{k!}(a) (X - a)^{k-1} = \sum\limits_{m=0}^{n-1} \Big(\sum\limits_{k=m+1}^{n} c_k a^{k-1-m} \Big) X^m$

1.3.17 Définition et Proposition. Soit $P\in A[X]$ de degré positif et $a\in A$. Alors il y a $k\in\mathbb{N}$, la *multiplicité de P en a* notée $k=\mathrm{mult}_a(P)$, et $Q\in A[X]$ de degré $\deg(Q)=\deg(P)-k$ avec :

$$P=(X-a)^kQ \text{ et } Q(a)\neq 0$$

.

De plus et k est le plus petit $l\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{l!}P^{(l)}(a)\neq 0$.
Si $\mathrm{mult}_a(P)>0$ (c. a d. $P(a)=0$) a est dit *racine de P de multiplicité k.*

1.3.18 Corollaire. *Soit $P=\sum_{kde=0}^{n}a_kX^k\in A[X]$ et $n+1$ points $a_0,\dots,a_n\in A$ de A deux à deux distincts* (si $0\leq i\neq j\leq n$ alors $a_i\neq a_j$) *tels que pour $0\leq i\leq n$ on ait $P(a_i)=0$ alors $P=0$.*

Démonstration : Si $n=0, P=P(a_0)=0$. Si $n\geq 1$, le théorème **1.3.15.** donne $Q=\sum_{m=0}^{n-1}d_mX^m\in A[X]$ avec $P=(X-a_n)Q$.
Pour $0\leq i\leq n-1$, comme $0=P(a_i)=(a_i-a_n)Q(a_i)$ et $a_i-a_n\neq 0$, on a $Q(a_i)=0$, donc (récurrence sur n) $Q=0$ et $P=(X-a_n)0=0$. □

1.3.19 Exercice. Autre solution de **1.3.14.** : Remarquer pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq k+1, P(n+1)-P(n)-Q(n)=0$.

1.3.20 Rappel (Théorème de D'Alembert admis)**.**
Un polynôme de degré positif à coefficients complexe $0\neq P\in\mathbb{C}[X]$ a une racine $\alpha\in\mathbb{C}$.

1.3.21 Corollaire. 1. *Soit $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{C}[X], a_n\neq 0$ alors il y a $z_1\dots,z_n\in\mathbb{C}$ [resp. $\omega_1,\dots\omega_r\in\mathbb{C}$ (où si $1\leq i\neq j\leq r\leq n,\omega_i\neq\omega_j$) et $1\leq m_1,\dots,m_r\in\mathbb{N}$] tels que :*

$$P=a_n\prod_{k=0}^{n}(X-z_k)=a_n\prod_{l=0}^{r}(X-\omega_l)^{m_l}$$

2. *Soit $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$ avec $a_n\neq 0$ alors il y a $x_1\dots,x_t\in\mathbb{R}, z_1\dots,z_s\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ avec $t+2s=n$ [resp. $\lambda_1\dots,\lambda_r\in\mathbb{R},\omega_1\dots,\omega_\pi\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ (où si $1\leq i\neq j\leq r\leq t,\ 1\leq u\neq v\leq\pi\leq s$ $\lambda_i\neq\lambda_j,\omega_u\neq\omega_j$) et $1\leq m_1,\dots,m_r,\nu_1,\dots,\nu_\pi\in\mathbb{N}$] tels que :*

$$P=a_n\prod_{k=0}^{t}(X-x_k)\prod_{l=0}^{s}(X-z_l)(X-\overline{z_l})=a_n\prod_{k=0}^{t}(X-t_k)\prod_{l=0}^{s}(X^2-2\Re(z_u)X+|z_u|^2)=a_n\prod_{l=0}^{r}(X-\lambda_l)^{m_l}\prod_{u=0}^{s}(X^2-2\Re(\omega_u)X+|\omega_u|^2)^{\nu_u}$$

2 Fractions rationnelles à coefficients dans A.

2.1 Définitions opérations et dérivation des fractions rationnelles.

2.1.1 Définitions. Une *fraction de polynômes à coefficients dans* A est un couple de polynômes $(P,Q)\in A[X]\times(A[X]\setminus\{0\}$ dont le second élément [21], dit *dénominateur* $Q\neq 0$ est non nul.

La *somme* et le *produit* de deux fractions de polynômes $(P_1,Q_1),(P_2,Q_2)$ sont :

$$(P_1,Q_1)+(P_2,Q_2)=(P_1\cdot Q_2+P_2\cdot Q_1,\ Q_1\cdot Q_2),\quad (P_1,Q_1)\cdot(P_2,Q_2)=(P_1\cdot P_2,\ Q_1\cdot Q_2)$$

[21] le premier élément P de la fraction (P,Q) est son *numérateur*

2.1.2 Définition et Proposition (sera montrée dans les parties relation d'équivalence et opération du cours)**.**

(i) Deux fractions de polynômes $(P,Q),(P_1,Q_1)$ à coefficients dans A définissent la même [22] *fraction rationnelle* $\frac{P}{Q}=\frac{P_1}{Q_1}$ *à coefficients dans* A si

$$P\cdot Q_1=Q\cdot P_1$$

Cet *ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans* A est noté $A(X)$.

(ii) Les opérations $+$ et $\cdot$ sur les fractions de polynômes définissent $+$ et $\cdot$ sur $A(X)$:

$$\frac{P_1}{Q_1}+\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1\cdot Q_2+Q_1\cdot P_2}{Q_1\cdot Q_2},\quad \frac{P_1}{Q_1}\cdot\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1\cdot P_2}{Q_1\cdot Q_2}$$

Pour tout $a=\frac{P}{Q},b=\frac{R}{S},c=\frac{T}{U}\in A(X)$, si $0=\frac{0}{1},1=\frac{1}{1},-a=\frac{-P}{Q}$ et si $a\neq 0, a^{-1}=\frac{Q}{P}$ on a [23] :

(a) $(a+b)+c=a+(b+c),\quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

(b) $a+0=a=0+a,\quad a\cdot 1=a=1\cdot a$

(c) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\quad (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

(d) $a+(-a)=0=(-a)+a,\quad$ et si $a\neq 0,\ a\cdot a^{-1}=1=a^{-1}\cdot a$

(e) $a+b=b+a,\quad a\cdot b=b\cdot a$

(iii) $i:A[X]\to A(X), P\mapsto\frac{P}{1}$ est injective [24], $i(0)=0, i(1)=1$ et pour tout $P_1,P_2\in A[X]$ on a :

$$i(P_1+P_2)=i(P_1)+i(P_2)\quad\text{et}\quad i(P_1\cdot P_2)=i(P_1)\cdot i(P_2)$$

[22] Que ce soit cohérent avec ce que l'on attend du mot même demande justification. Esquissons seulement que si $\frac{P}{Q}=\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{P_2}{Q_2}$ alors $\frac{P}{Q}=\frac{P_2}{Q_2}$:
$Q_1\cdot(P\cdot Q_2-Q\cdot P_2)=(P\cdot Q_1-Q\cdot P_1)\cdot Q_2+Q\cdot(P_1\cdot Q_2-Q_1\cdot P_2)=0$
car $P\cdot Q_1=Q\cdot P_1$ et $P_1\cdot Q_2=Q_1\cdot P_2$
donc, puisque $Q_1\neq 0, P\cdot Q_2-Q\cdot P_2=0$.

[23] les mêmes propriétés que $+$ et $\cdot$ avaient dans $A=\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\{0,1\}$ avec en plus (même si $A=\mathbb{Z}$!) la possibilité de diviser par des éléments non nul comme dans $A=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\{0,1\}$ (comme on gagne, passant des entiers aux rationnels définis par les fractions, la possibilité de diviser par les éléments non nul.)

[24] Si $P\in A[X]$ est un polynôme on le considère comme fraction rationnelle, abrègeant $i(P)\,(=\frac{P}{1})\in A(X)$ en $P\in A(X)$.

2.1.3 PROPOSITION. *Il y a une unique application* $D : A(X) \to A(X)$ *prolongeant la dérivation des polynômes telle que pour toutes fraction rationnelle* $a, b \in A(X)$ *et tout polynôme* $P \in A[X]$ *on a :* (prolongement linéaire avec régle de Leibniz)

$$D(\frac{P}{1}) = \frac{D(P)}{1}, \quad D(a+b) = D(a) + D(b), \quad D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$$

elle est définie par $D(\frac{P}{Q}) = \dfrac{D(P) \cdot Q - P \cdot D(Q)}{Q^2}$

Démonstration : [de $D(\frac{P}{Q}) = \dfrac{D(P) \cdot Q - P \cdot D(Q)}{Q^2}$ ne dépend que de $\frac{P}{Q}$] Soit $P_1, Q_1, P_2, Q_2 \in A[X]$ avec $P_1 \cdot Q_2 = Q_1 \cdot P_2$ alors :
$[D(P_1) \cdot Q_1 - P_1 \cdot D(Q_1)] \cdot Q_2^2 = [D(P_1) \cdot Q_2 + P_1 \cdot D(Q_2)] \cdot Q_2 \cdot Q_1 - P_1 \cdot Q_2 [D(Q_2) \cdot Q_1 + Q_2 \cdot D(Q_1)] = D(P_1 \cdot Q_2) \cdot (Q_2 \cdot Q_1) - Q_1 \cdot P_2 \cdot D(Q_2 \cdot Q_1) = D(P_2 \cdot Q_1) \cdot Q_1 \cdot Q_2 - P_2 \cdot D(Q_2 \cdot Q_1) \cdot Q_1 = [D(P_2) \cdot Q_1 + P_2 \cdot D(Q_1)] \cdot Q_2 \cdot Q_1 - P_2 \cdot [D(Q_2) \cdot Q_1 + Q_2 \cdot D(Q_1)] \cdot Q_1 = [D(P_2) \cdot Q_2 - P_2 \cdot D(Q_2)] \cdot Q_1^2$ □

2.1.4 Application (Dérivées successives de Arctg)**.** Comme $\mathrm{Arctg}'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{1-it} + \dfrac{1}{1+it}]$ il vient pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{Arctg}^{(n+1)}(t) = \frac{1}{2(n+1)}(i)^n\Big[\frac{1}{(1-it)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(1+it)^{n+1}}\Big] = \frac{\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n+1}{n-2k} (-1)^{n-k} t^{n-2k}}{(n+1)(1+t^2)^{n+1}}$$

En particulier $\dfrac{1}{(2m+1)!}\,\mathrm{Arctg}^{(2m+1)}(0) = \dfrac{1}{2m+1}$ et $\dfrac{1}{(2m+2)!}\,\mathrm{Arctg}^{(2m+2)}(0) = 0.$

2.1.5 Exercice. Vérifier par récurrence sur n que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1+X^2}$ est $D^n(\dfrac{1}{1+X^2}) = \dfrac{\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} n! \binom{n+1}{n-2k} (-1)^{n-k} X^{n-2k}}{(1+X^2)^{n+1}}$

2.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

2.2.1 THÉORÈME. *Soit* $\frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ *une fraction rationnelle à coeficients complexes de dénominateur de degré* q, *de factorisation réduite* [25] *si* $q \geq 1$ $Q = a_q \prod_{k=1}^{p} (X - z_k)^{m_k}$ *ou* $Q = a_0$ *alors il y a un polynôme* $E \in \mathbb{C}[X]$ *et pour* $1 \leq k \leq p$ *et* $1 \leq l \leq m_k$ *des* $\lambda_{k,l} \in \mathbb{C}$ *tels que :*

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{m_l} \frac{\lambda_{k,l}}{(X - z_k)^l}$$

[25] *c. a d.* où $0 \neq a_q \in \mathbb{C}$ et soit $q = 0, Q = a_0$, soit pour $1 \leq i \leq p$ il y a $z_i \in \mathbb{C}$ et $1 \leq m_i \in \mathbb{N}$ avec si $i \neq j, z_i \neq z_j$

Démonstration : Par récurrence sur $\deg(Q) = q = \sum_{k=1}^{p} m_k$. Si $q = 0$ alors $\frac{P}{Q} = \frac{P}{a_0} = (a_0)^{-1}P \in C[X]$ est un polynôme.
Sinon on suppose $m_1 \geq \cdots \geq m_p$. Soit, si $1 < m_p, r = p, s = q - p$, sinon $r + 1 = \min\{l \mid m_l = 1\}, s = q + r - p < q, b_s = a_n$ et,
si $r = 1, S = b_0$, sinon $S = b_s \prod_{n=1}^{r}(X - z_n)^{m_{n-1}}$ et, pour $1 \leq k \leq p, Q_k = \frac{Q}{(X - z_k)^{m_k}} = \prod_{1 \leq j \neq k \leq m}(X - z_j)^{m_j} \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme tel que pour $i \neq k, Q_k(z_i) = 0$ et $Q_k(z_k) \neq 0$. Si donc, pour $1 \leq k \leq p$, on pose $\lambda_{k,m_k} = \frac{P(z_k)}{Q_k(z_z)}$, le polynôme $R_1 = P - \sum_{k=1}^{m} \lambda k, m_k Q_k$ vérifie pour $1 \leq k \leq p, R_1(z_k) = 0$.
Comme les z_k sont deux à deux distincts, il y a un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $R_1 = R \cdot \prod_{k=1}^{p}(X - z_k)$ d'où

$$\frac{P}{Q} - \sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_{k,m_k}}{(X - z_k)^{m_k}} = \frac{R}{S}$$

et le résultat par récurrence puisque $\deg(S) = s < q = \deg(Q)$.) □

2.2.2 Exemple. Appliquons l'algorithme à la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2+1} = \frac{1}{(X^-i)(X+i)}$ [dont les valeurs en $t \in \mathbb{R}$ sont celles de la dérivée de la fonction Arctg]
Ici $P = 1, m_1 = m_2 = 1, z_1 = i, z_2 = -i$ donc $\lambda_{1,1} = \frac{1}{i-(-i)} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}, \lambda_{2,1} = \frac{1}{-i-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$ et on vérifie que :
$\frac{1}{X^2+1} - [\frac{-i}{2(X^-i)} + \frac{i}{2(X^+i)} = \frac{2+i(X+i)-i(X-i}{2(X^-i)(X^+i)} = \frac{2+iX-1)-iX-1}{2(X^2+1)} = 0$

2.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

2.3.1 Théorème. *Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle à coeficients réels de dénominateur de degré q, de factorisation réduite* [26] *si $q \geq 1$ $Q = a_q \prod_{k=1}^{r}(X-t_k)^{m_k} \prod_{l=1}^{s}(X^2-2\Re(\omega_l)X+|\omega_l|^2)^{\nu_k}$ ou $Q = a_0$ alors il y a un polynôme $E \in \mathbb{R}[X]$ et pour $1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq s$ et $1 \leq m \leq m_k, 1 \leq n \leq \nu_l$ des $\lambda_{k,m}, \alpha_{l,n}, \beta_{l,n} \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,m}}{(X - t - k)^m} + \sum_{l=1}^{s} \sum_{n=1}^{\nu_l} \frac{2\alpha_{l,n}(X - \Re(\omega_l)) + \beta_{l,n}}{(X^2 - 2\Re(\omega_l)X + |\omega_l|^2)^n}$$

[26] les cas $r = 0$ ou $s = 0$ sont possibles, il faut interpréter

$$\prod_{k=1}^{0}(X - t_k)^{m_k} = 1 = \prod_{l=1}^{0}(X^2 - 2\Re(\omega_l)X + |\omega_l|^2)^{\nu_k}$$

$$\sum_{k=1}^{0} \sum_{m=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,m}}{(X - t - k)^m} = 0 = \sum_{l=1}^{0} \sum_{n=1}^{\nu_l} \frac{2\alpha_{l,n}(X - \Re(\omega_l)) + \beta_{l,n}}{(X^2 - 2\Re(\omega_l)X + |\omega_l|^2)^n}$$

2.3.2 Exemples. 1. $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{1}{X(X^2+1)} = \dfrac{1}{X(X^-i)(X+i)}$ Ici $P=1, r=1, s=1, m_1=\nu_1=1, t_1=0, \omega_1=i$ donc $\lambda_{1,1}=\frac{1}{0^2+1}=\frac{1}{1}=1$,
$2[\alpha_{1,1}(i-\Re(i))+\beta_{1,1}=\frac{1}{i}=-i$, donc $\alpha_{1,1}=-\frac{1}{2}, \beta_{1,1}=0$, *c. a d.* $2\alpha_{1,1}(X-\Re(i))+\beta_{1,1}=-X$ et on vérifie :
$\dfrac{1}{X(X^2+1)} - [\dfrac{1}{X}+\dfrac{-X}{X^2+1}] = \dfrac{1-[(X^2+1)-X\cdot X}{X(X^2+1)} = \dfrac{1-X^2-1)-X^2}{X(X^2+1)} = 0$

2. Le cas $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{1}{X(X^2+1)^2}$ se fait en deux étapes : trouver d'abord $\lambda_{1,1}=\frac{1}{(0^2+1)^2}=\frac{1}{1}=1, 2[\alpha_{1,1}(i-\Re(i))+\beta_{1,1}=\frac{1}{i}=-i$, *c. a d.* $2\alpha_{1,1}(X-\Re(i))+\beta_{1,1}=-X$,
puis : $\dfrac{1}{X(X^2+1)^2} - [\dfrac{1}{X}+\dfrac{-X}{(X^2+1)^2}] = \dfrac{1-(X^2+1)^2-X}{X(X^2+1)^2} = \dfrac{1-X^2-2X-1+X}{X(X^2+1)^2} = \dfrac{-X^2-X}{X(X^2+1)^2} = \dfrac{-X}{X^2+1}$