Integration 2.

Intégrale inférieure des fonctions bornées, fonctions intégrables au sens de Riemann.

Table des matières

Notations

Un intervalle réel fermé borné $I = [a, b]$ est fixé, on note $\mathring{I} =]a, b[$ l'intervalle ouvert correspondant.

Présentation

Dans le cas d'une fonction $f : I \to [0, M]$ bornée à valeurs positives ou nulles pour définir l'intégrale $\int_a^b f$ (si cette dernière peut se définir !) une approche est de majorer (resp. minorer) l'aire de son *épigraphe* $e\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq y,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$, par l'aire d'unions finies de rectangles $\cup_{k=1}^N [a_{k-1}, a_k] \times [0, l_k] \supset e\Gamma(f)$ contenants (resp. $\cup_{k=1}^N [a_{k-1}, a_k] \times [0, \lambda_k] \subset e\Gamma(f)$ contenues dans) cet épigraphe.

Dans le cas d'une fonction $f : I \to [m, M]$ bornée, mais pouvant changer de signe, sans référence à l'épigraphe (qui n'est plus défini), les formules calculant les aires précédentes d'union de rectangles gardent un sens, ce sont des *sommes de Darboux supérieures et inférieures* de la fonction f.

La majoration a été obtenue dans les notes intégration 1 (primitives des fonctions continues et intégrale de Riemann) par $L(f)$, l'intégrale supérieure sur I de la fonction. Ici on va obtenir la minoration définissant $\Lambda(f)$, l'*intégrale inférieure sur I de* la même fonction et dira que la fonction f est *intégrable au sens de Riemann* si $\Lambda(f) = L(f)$.

Cette valeur commune sera $\int_a^b f$ l'*intégrale de Riemann de la fonction f.*

On verra que les fonctions continues et les fonctions monotones vérifient cette condition et donnera une condition caractérisant les fonctions intégrables au sens de Riemann la *condition de Riemann* qui permettra d'établir les propriétés de l'intégrale de Riemann.

1 Fonctions intégrables au sens de Riemann sur $I = [a, b]$ et leur intégrale.

1.1 Intégrale inférieure d'une fonction bornée sur un intervalle $I = [a, b]$ fermé borné.

Soit $m \leq M, x < y \in \mathbb{R}$ et $f : [x, y] \to \mathbb{R}$ une fonction *bornée*[1] *par* m *et* M *sur* l'intervalle $[x, y]$. [1] pour tout $t \in [x, y]$ on a : $m \leq f(t) \leq M$
Soit $x \leq a < b \leq y$ et $\alpha : a = a_0 < \cdots < a_N = b$ une subdivision d'un sous-intervalle $[a, b] \subset [x, y]$.

1.1.1 Notations. Pour $1 \leq k \leq N$ on pose ;

$$m \leq \lambda = \inf\{f(t) \,|\, a \leq t \leq b\} \leq \lambda_k = \inf\{f(t) \,|\, a_{k-1} < t < a_k\} \leq l_k = \sup\{f(t) \,|\, a_{k-1} < t < a_k\} \leq l = \sup\{f(t) \,|\, a \leq t \leq b\}$$

1.1.2 Exemple. Si f est continue croissante $\lambda_k = f(a_{k-1}), l_k = f(a_k)$, si f est continue décroissante $\lambda_k = f(a_k), l_k = f(a_{k-1})$.

1.1.3 Exercice. Soit $\emptyset \neq X \subset [-M, M] \subset \mathbb{R}$ une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Prouver :

$$\sup_{x\in X}(-x) = -\inf_{x\in X}(x) \quad \text{puis} \quad \inf_{x\in X}(x) = -\sup_{x\in X}(-x)$$

1.1.4 Corollaire et Définition. (i) $\lambda_k(f) = -l_k(-f)$

(ii) La *somme de Darboux inférieure de la fonction* f *associée à la subdivision* α est :

$$\Lambda_\alpha(a, b) \left[= \Lambda_\alpha(a, b; f)\right] = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^{N} \inf\{f(t) \,|\, a_{k-1} < t < a_k\} \cdot (a_k - a_{k-1}) = -L_\alpha(a, b; -f)$$

En particulier si f est continue croissante $\Lambda_\alpha(a, b) = \sum_{k=1}^{N} f(a_{k-1}) \cdot e_k$

Les sommes de Darboux inférieures et supérieures s'encadrent en fonction des bornes de la fonction et sont, relativement au raffinement des subdivisions, décroissantes :

1.1.5 Proposition. *(i)* $\lambda \cdot (b - a) \leq \Lambda_\alpha(a, b) \leq L_\alpha(a, b) \leq l \cdot (b - a)$
(ii) si $\alpha' < \alpha$ *alors* $\Lambda_\alpha(a, b) \leq \Lambda_{\alpha'}(a, b) \leq L_{\alpha'}(a, b) \leq L_\alpha(a, b)$

Démonstration : Le premier point suit des encadrements **1.1.1**.
Pour le second, d'après le fait que $L_{\alpha'}(a, b; -f) \leq L_\alpha(a, b; -f)$ et le premier point, on a : $\Lambda_\alpha(a, b; f) = -L_\alpha(a, b; -f) \leq -L_{\alpha'}(a, b; -f) = \Lambda_{\alpha'}(a, b; f)$ $\square$

1.1.6 Exercice. En reprenant les arguments de Intégration 1 prouver la proposition **1.1.5** directement sans ramener les inf à des sup comme dans l'exercice **1.1.3**

1.1.7 Exercice. Soit N un entier positif, α_N la subdivision régulière d'ordre N de l'intervalle $[a,b]$ et $f = i : [a,b] \to \mathbb{R}, f(t) = t$. Calculer $\Lambda_{\alpha_N}(a,b;f)$.

1.1.8 Exercice. Soit $1 < x \in \mathbf{R}$ et $h : [1,x] \to \mathbf{R}, h(t) = \frac{1}{t}$.

1. Prouver, en notant pour $1 \leq u < w \leq x$ et $v \in]u,w[$ $\alpha(v)$, la subdivision $\alpha(v) : u = u_0 < u_1 = v < u_2 = w$ de $[u,w]$:

$$\Lambda_{\alpha(v)}(u,w;h) = \frac{1}{v}(v-u) + \frac{1}{w}(w-v) = 2 - \frac{u}{v} - \frac{v}{w} \leq 2 - \frac{u}{\sqrt{uw}} - \frac{\sqrt{uw}}{w} = \Lambda_{\alpha(\sqrt{uw})}(u,w,h)$$

2. Admettant que parmi les subdivisions α d'ordre N de $[a,b]$ il y en a une qui maximise la somme de Darboux inférieure $\Lambda_\alpha(a,b;h)$, en déduire que c'est la subdivision géométriquement régulière $\gamma_N : 1 = x^{\frac{0}{N}} < \cdots < x^{\frac{k}{N}} < \cdots < x^{\frac{N}{N}} = x$, qu'elle est de k ième pas $e_k = (x^{\frac{1}{N}} - 1)\, x^{\frac{k-1}{N}}$ et, pour toute α d'ordre N :

$$\Lambda_\alpha(1,x;h) \leq \Lambda_{\gamma_N}(1,x;h) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x^{\frac{k}{N}}}\,(x^{\frac{1}{N}} - 1)x^{\frac{k-1}{N}} = \sum_{k=1}^{N}(1 - x^{\frac{-1}{N}}) = N(1 - x^{\frac{-1}{N}})$$

D'après 1.1.5 l'ensemble $\{\Lambda_\alpha(a,b) \,|\, \alpha \in A(a,b)\}$ est un ensemble borné de nombres réels. Comme il est non vide il a une borne supérieure[2)] et on peut poser la

[2)] La *borne supérieure* $\sup(X)$ d'une partie $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ non vide majorée de $\mathbb{R}$ est le plus petit de ses majorants, caractérisée par :
1. Pour tout $x \in X$ on a $x \leq \sup(X)$
2. Si $y < \sup(X) \in \mathbb{R}$ il y a $x \in X$ tel que $y < x$.

1.1.9 Définition et Proposition. L'*intégrale inférieure de f sur* $[a,b]$ est

$$\Lambda(a,b)\ (= \Lambda(a,b;f))\ =\ \sup_{\alpha \in A(a,b)} \Lambda_\alpha(a,b)$$

On a $\Lambda(a,b;f) = -L(a,b;-f)$ et $\Lambda(a,b;f) \leq L(a,b;f)$

Démonstration : Soit $\alpha, \beta \in A(a,b)$ deux subdivisions de l'intervalle $[a,b]$ et $\alpha' = \alpha \cup \beta$. On a $\alpha' < \alpha$ et $\alpha' < \beta$ donc d'après la proposition **1.1.5** on a $\Lambda_\alpha(a,b) \leq \Lambda_{\alpha'}(a,b) \leq L_{\alpha'}(a,b) \leq L_\beta(a,b)$ et $\Lambda(a,b) = \sup_{\alpha \in A(a,b)} \Lambda_\alpha(a,b) \leq L_\beta(a,b)$, puis $\Lambda(a,b) \leq \inf_{\beta \in A(a,b)} L_\beta(a,b) = L(a,b)$ □

1.1.10 Remarque. En général il n'y a pas égalité dans cette proposition.

1.1.11 Exemple. Soit $f = \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R}$ la *fonction caractéristique des irrationnels de* $[0,1]$, si $t \in \mathbb{Q} \cap [0,1], f(t) = 0$ et si $t \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, f(t) = 1$. Alors, chacun des intervalles $[a_{k-1}, a_k]$ d'une subdivision α contenant des rationnels et des irrationnels on a $\lambda_k = 0$ et $l_k = 1$ d'où $\Lambda(0,1) = \Lambda_\alpha(0,1) = 0 < 1 = L_\alpha(0,1) = L(0,1)$.

1.1.12 Théorème. *(i)* $\lambda \cdot (b-a) \leq \Lambda(a,b) \leq L(a,b) \leq l \cdot (b-a)$ (encadrement des intégrales inférieure et supérieure)

(ii) Si $x \leq a < b < c \leq y$ alors $\Lambda(a,c) = \Lambda(a,b) + \Lambda(b,c)$ (relation de Chasles pour l'intégrale inférieure)

Démonstration : Le premier point suit de la proposition 1.1.5.

Pour le second, par la relation de Chasles pour l'intégrale supérieure de $-f$ on a :

$$\Lambda(a,c;f) = -L(a,c;-f) = -\Big[L(a,b;-f) + L(b,c;-f)\Big] = -L(a,b;-f) + (-L(b,c;-f)) = \Lambda(a,b;f) + \Lambda(b,c;f)$$

□

1.1.13 COMPLÉMENT. *En posant, si* $d \in [x,y]$, $\int_d^d f = 0$ *les relations de Chasles pour les intégrales supérieures et inférieures ont lieu si* $x \leq a \leq b \leq c \leq y$

1.1.14 Exercice. Démonter directement (sans utiliser $\Lambda(a,c;f) = -L(a,c;-f)$) la formule de Chasles pour l'intégrale inférieure en se souvenant [sans réouvrir intégration1 !] de la preuve de la relation de Chasles pour l'intégrale supérieure .

1.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann, première définition.

1.2.1 Définition. Une fonction bornée $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ est *intégrable au sens de Riemann* (ou *Riemann intégrable*, ou $\mathcal{R}$*-intégrable*) si $\Lambda(x,y;f) = L(x,y;f)$. Son *intégrale* est $\int_x^y \underset{\text{Déf}}{=} \Lambda(x,y;f)(= L(x,y;f))$

1.2.2 Exemple. D'après **1.1.11** la fonction $f = \chi_{[0,1]\setminus[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}$, si $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $f(t) = 0$ et sinon $f(t) = 1$ n'est pas $\mathcal{R}$-intégrable.

1.2.3 PROPOSITION. *Une fonction continue* $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ *est* $\mathcal{R}$*-intégrable.*

Démonstration : Soit $F_1, F_2 : [x,y] \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = 0 = F_2(x)$ et si $x < t \leq y$, $F_1(t) = L(x,t;f)$, $F_2(t) = \Lambda(x,t;f) = -L(x,t;-f)$.
On a vu que F_1 et $-F_2$ sont dérivables de dérivées $F_1' = f$ et $-F_2' = -f$ donc F_1 et F_2 étant deux primitives de f s'annulant en x sont égales, en particulier $\Lambda(x,y;f) = F_2(y) = F_1(y) = L(x,y;f)$. □

1.2.4 Exercice. Soit $u < v \in \mathbb{R}$ et $1 < y \in \mathbb{R}$ Déduire des exercices **1.1.7** et **1.1.8** et de leurs analogues dans intégration 1 pour les sommes de Darboux supérieures que les fonctions $i : [u,v] \to \mathbb{R}, i(t) = t$ et $h : [1,y] \to \mathbb{R}, h(t) = \frac{1}{t}$ sont $\mathcal{R}$-intégrables

1.2.5 THÉORÈME. *Soit* $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathcal{R}$*-intégrable alors pour tout* $[a,b] \subset [x,y]$ *la restriction* $f_| : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est* $\mathcal{R}$*-intégrable et :*

(i) $\lambda \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq l \cdot (b-a)$ (encadrement de l'intégrale)

En particulier si pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \geq 0$ *alors* $\int_a^b f \geq 0$ (positivivité de l'intégrale)

(ii) $x \leq a \leq b \leq c \leq y$ *on a :* $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$ (Relation de Chasles pour l'intégrale de Riemann)

Démonstration : Par la relation de Chasles pour Λ et L et le fait que f est $\mathcal{R}$-intégrable, on a :
$\Lambda(x,a) + \Lambda(a,b) + \Lambda(b,y) = \Lambda(x,y) = L(x,y) = L(x,a) + L(a,b) + L(b,y)$ d'où, puisque $L(x,y) - \Lambda(x,y) = 0$ et $L(x,a) - \Lambda(x,a), L(b,y) - \Lambda(b,y \geq 0$:
$0 = L(x,y) - \Lambda(x,y) = L(x,a) - \Lambda(x,a) + L(a,b) - \Lambda(a,b) + L(b,y) - \Lambda(b,y) \geq L(a,b) - \Lambda(a,b) \geq 0$ et donc $L(a,b) - \Lambda(a,b) = 0$ □

(Critère d'intégrabilité)

1.2.6 Lemme. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée est intégrable si et seulement si :*
Pour tout $\epsilon > 0$ il y a une subdivision $\alpha \in A(a,b)$ de $[a,b]$ telle que :

$$L_\alpha(a,b;f) - \Lambda_\alpha(a,b;f)\ \left(= \sum_{k=1}^{N(\alpha)} (l_k - \lambda_k)\cdot e_k\right)\ \leq \epsilon$$

De plus, si $\beta \in A(a,b)$ est donnée, on peut supposer $\alpha < \beta$.

Démonstration de la suffisance : Comme $\Lambda(a,b) \leq L(a,b)$ et pour tout $\alpha \in A(a,b)$ on a par définition $L(a,b) \leq L_\alpha(a,b)$ et $\Lambda_\alpha(a,b) \leq \Lambda(a,b)$, si $L_\alpha - \Lambda_\alpha \leq \epsilon$ on a $0 \leq L - \Lambda \leq L_\alpha - \Lambda_\alpha \leq \epsilon$. Ceci ayant lieu pour tout $\epsilon > 0$ il vient $0 = L - \Lambda$. □

Démonstration de la nécessité : Si $L = L(a,b;f) = \Lambda(a,b;f) = \Lambda$ et $\epsilon > 0$ soit $\alpha_-, \alpha_+ \in A(a,b)$ telles que $\Lambda(a,b) - \frac{\epsilon}{2} \leq \Lambda_{\alpha_-}(a,b)$ et $L_{\alpha_+}(a,b) \leq L(a,b) + \frac{\epsilon}{2}$. Pour $\alpha = \alpha_- \cup \beta \cup \alpha_+$ on a $\alpha < \beta$ et comme $\alpha < \alpha_-, \alpha_+$ on a $\Lambda_{\alpha_-} \leq \Lambda_\alpha \leq L_\alpha \leq L_{\alpha_+}$ d'où $0 \leq L_\alpha - \Lambda_\alpha \leq L_{\alpha_+} - \Lambda_{\alpha -} \leq L + \frac{\epsilon}{2} - (\Lambda - \frac{\epsilon}{2}) = L - \Lambda + \epsilon = \epsilon$. □

1.2.7 Corollaire. *Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées telles que $\{t \in [a,b] \,|\, f(t) \neq g(t)\}$ est fini alors f est $\mathcal{R}$-intégrable si et seulemnt si g est $\mathcal{R}$-intégrable. En ce cas $\int_a^b f = \int_a^b g$.*

Démonstration : Soit $\beta = \{t \in [a,b] \,|\, f(t) \neq g(t)\}$. Il suffit dans le critère **1.2.6** de prendre $\alpha < \beta$ puisqu'alors on a $\Lambda_\alpha(f) = \Lambda_\alpha(g)$ et $L_\alpha(f) = L_\alpha(g)$. □

1.2.8 Remarque. C'est pour avoir *gratuitement* ce corrollaire que dans les définitions des nombres $\lambda_k = \inf_{t \in]a_{k-1}, a_k[} f(t)$ et $l_k = \sup_{t \in]a_{k-1}, a_k[} f(t)$ on a pris les inf et sup sur les intervalles ouverts $]a_{k-1}, a_k[$ plutôt que dans les intervalles fermés $[a_{k-1}, a_k]$ correspondants.

1.2.9 Corollaire. *Une fonction monotone $f : [a,b]$ est intégrable au sens de Riemann.*

Démonstration : Pour tout $t \in [a,b]$ on a, suivant que f est croissante ou décroissante $f(a) \leq f(t) \leq f(b)$ ou $f(b) \leq f(t) \leq f(a)$ donc f est bornée. Soit $\epsilon > 0$ et $\alpha : a = a_0 < \cdots < a_N = b$ une subdivision de $[a,b]$ de plus grand pas e vérifiant $|f(b) - f(a)| \cdot e \leq \epsilon$. Par l'exemple **1.1.2** on a :

$$L_\alpha(f) - \Lambda_\alpha(f) = \sum_{k=1}^{N} (l_k - \lambda_k)\cdot e_k = \sum_{k=1}^{N} |f(a_k) - f(a_{k-1})| \cdot e_k \leq \sum_{k=1}^{N} |f(a_k) - f(a_{k-1})| \cdot e = \left|\sum_{k=1}^{N} f(a_k) - f(a_{k-1})\right| \cdot e = |f(b) - f(a)| \cdot e \leq \epsilon.$$ □

(linéarité de l'intégrale)

1.2.10 Corollaire. *Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables au sens de Riemann et $x \in \mathbb{R}$ alors :*

(i) xf *est* $\mathcal{R}$*-intégrable et* $\int_a^b xf = x \int_a^b f$

(ii) $f+g$ *est* $\mathcal{R}$*-intégrable et* $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

Démonstration de (i) : Si $x=0$ alors $xf=0$ est $\mathcal{R}$-intégrable et $\displaystyle\int_a^b xf = 0 = x\int_a^b f$. Sinon soit $\epsilon>0$ et $\alpha\in A(a,b)$ tel que $L_\alpha - \Lambda_\alpha \le \frac{\epsilon}{|x|}$.
Si $x>0$ comme $t\mapsto xt$ est un isomrphisme de $(\mathbb{R},<)$ sur lui même, pour $1\le k\le N=N(\alpha)$ on a $l_k(xf)=xl_k(f)$ et $\lambda_k(xf)=x\lambda_k(f)$, donc $\displaystyle L_\alpha(xf)=\sum_{k=1}^N l_k(xf)\cdot e_k=\sum_{k=1}^N xl_k(f)\cdot e_k = x\sum_{k=1}^N l_k(f)\cdot e_k = xL_\alpha(f)$ et $\displaystyle\Lambda_\alpha(xf)=\sum_{k=1}^N \lambda_k(xf)\cdot e_k=\sum_{k=1}^N x\lambda_k(f)\cdot e_k = x\sum_{k=1}^N \lambda_k(f)\cdot e_k = x\Lambda_\alpha(f)$.
Si $x<0$ comme $t\mapsto xt$ est un isomrphisme de $(\mathbb{R},<)$ sur $(\mathbb{R},>)$, pour $1\le k\le N=N(\alpha)$ on a $l_k(xf)=x\lambda_k(f)$ et $\lambda_k(xf)=xl_k(f)$, donc $\displaystyle L_\alpha(xf)=\sum_{k=1}^N l_k(xf)\cdot e_k = x\sum_{k=1}^N x\lambda_k(f)\cdot e_k = x\Lambda_\alpha(f)$ et $\displaystyle\Lambda_\alpha(xf)=\sum_{k=1}^N \lambda_k(xf)\cdot e_k=\sum_{k=1}^N xl_k(f)\cdot e_k = x\sum_{k=1}^N l_k(f)\cdot e_k = xL_\alpha(f)$.
Dans les deux cas on a $L_\alpha(xf)-\Lambda_\alpha(xf)=|x|\Big(L_\alpha(f)-\Lambda_\alpha(f)\Big)\le\epsilon$ et xf est intégrable.

Son intégrale étant $\displaystyle\int_a^b f = L(xf)\ (=\Lambda(xf))$, la borne inférieure des $L_\alpha(xf)$ qui si $x>0$ est $xL_\alpha(f)$ et si $x<0$ est $x\Lambda_\alpha(f)$ de borne inférieure dans le premier cas [$t\mapsto xt$ croissant] $xL(f)$ et dans le second [$t\mapsto xt$ décroissant] $x\Lambda(f)$. Comme f est intégrable $L(f)=\Lambda(f)=\displaystyle\int_a^b f$ et on a bien $\displaystyle\int_a^b xf = x\int_a^b f$. □

Démonstration de (ii) : Remarquons d'abord que si $\alpha\in A(a,b)$ alors pour $1\le k\le N=N(\alpha)$ on a $\lambda_k(f)+\lambda_k(g)\le\lambda_k(f+g)$ et $l_k(f+g)\le l_k(f)+l_k(g)$ donc $\displaystyle\Lambda_\alpha(f)+\Lambda_\alpha(g)=\sum_{k=1}^N\lambda_k(f)\cdot e_k+\sum_{k=1}^N\lambda_k(g)\cdot e_k=\sum_{k=1}^N(\lambda_k(f)+\lambda_k(g))\cdot e_k\le\sum_{k=1}^N\lambda_k(f+g)\cdot e_k=\Lambda_\alpha(f+g)$ et

$$L_\alpha(f+g)=\sum_{k=1}^N l_k(f+g)\cdot e_k\le\sum_{k=1}^N(l_k(f)+l_k(g))\cdot e_k=\sum_{k=1}^N l_k(f)\cdot e_k+\sum_{k=1}^N l_k(g)\cdot e_k=L_\alpha(f)+L_\alpha(g).$$

Soit $\epsilon>0$ et $\alpha,\beta\in A(a,b)$ avec $\alpha<\beta$ et $\displaystyle\int_a^b f-\frac{\epsilon}{4}\le\Lambda_\beta(f)\ (\le\Lambda_\alpha\le L_\alpha)\le L_\beta(f)\le\int_a^b f+\frac{\epsilon}{4}$ et $\displaystyle\int_a^b g-\frac{\epsilon}{4}\le\Lambda_\alpha(g)\le L_\alpha(g)\le\int_a^b f+\frac{\epsilon}{4}$ donc $\displaystyle\int_a^b f+\int_a^b g-\frac{\epsilon}{2}\le\Lambda_\alpha(f)+\Lambda_\alpha(g)\le\Lambda_\alpha(f+g)\le L_\alpha(f+g)\le L_\alpha(f)+L_\alpha(g)\le\int_a^b f+\int_a^b g+\frac{\epsilon}{2}$ et $L_\alpha(f+g)-\Lambda_\alpha(f+g)\le\epsilon$, soit $f+g$ est $\mathcal{R}$-intégrable et pour tout $\epsilon>0$ il y a $\alpha\in A(a,b)$ tel que $\displaystyle\int_a^b f+\int_a^b g-\frac{\epsilon}{2}\le\Lambda_\alpha(f+g)\le L_\alpha(f+g)\le\int_a^b f+\int_a^b g+\frac{\epsilon}{2}$, *c. a d.* $\displaystyle\int_a^b f+g=\int_a^b f+\int_a^b g$ □

1.2.11 CO-COROLLAIRE. *Soit $h,k:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\mathcal{R}$-intégrables avec pour tout $t\in[a,b]$, $h(t)\le k(t)$ alors :* (monotonicité de l'intégrale)

$$\int_a^b h\le\int_a^b k$$

Démonstration : $f=k-h$ est $\mathcal{R}$-intégrable et vérifie pour tout $t\in[a,b] f(t)\ge 0$. Donc d'après **1.2.5**, $\displaystyle 0\le\int_a^b f=\int_a^b k-h=\int_a^b k-\int_a^b h$ d'où $\displaystyle\int_a^b h\le\int_a^b k$. □

1.2.12 Remarques. 1. Une autre formulation du corollaire **1.2.10** est que $\mathcal{R}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ est $\mathcal{R}$-intégrable$\}$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions sur $[a,b]$ et l'intégrale $\int_a^b : \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire.

2. Cette linéarité de l'intégrale des fonctions $\mathcal{R}$-intégrables, n'a pas lieu pour les intégrales supérieures et inférieures des fonctions bornées quelconque. C'est esssentiellement pour l'obtenir que l'on s'est restreint aux fonctions $\mathcal{R}$-intégrables [et doit se battre un peu plus avec les ϵ !].

1.2.13 Exemple. Soit $f = 2\chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} - 1, g = -f : [0,1] \to \mathbb{R}$. On a $f+g = 0$ donc $\Lambda(0,1; f+g) = 0 = L(0,1; f+g)$, mais comme $\Lambda(f) = -1 = \Lambda(g), L(f) = 1 = L(g)$ on a $\Lambda(0,1; f) + \Lambda(0,1; g) = -2 \neq 0 = \Lambda(f+g), L(f+g) = 0 \neq 2 = L(f) + L(g)$

1.2.14 Exercices. Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées.

1. Prouver $\Lambda(a,b; f) + \Lambda(a,b; g) \leq \Lambda(a,b; f+g) \leq L(a,b; f+g) \leq L(a,b; f) + L(a,b; g)$
2. Si pour tout $t \in [a,b], f(t) \leq g(t)$ prouver $\Lambda(a,b; f) \leq \Lambda(a,b; g)$ et $L(a,b; f) \leq L(a,b; g)$.

1.2.15 Théorème. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{R}$-intégrable alors $|f|$ est $\mathcal{R}$-intégrable et :*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$ et $\alpha \in A(a,b)$ telle que $\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} \leq \Lambda_\alpha(f) \leq L_\alpha(f) \leq \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}$.
Pour $1 \leq k \leq N = N(\alpha)$ et $a_{k-1} < s, t < a_k$ on a d'après la seconde inégalité triangulaire $|f(t)| - |f(s)| \leq |f(t) - f(s)|$ donc :
$l_k(f) - \lambda_k(f) = \sup_{a_{k-1}<s,t<a_k} f(t) - f(s) = \sup_{a_{k-1}<s,t<a_k} |f(t) - f(s)| \geq \sup_{a_{k-1}<s,t<a_k} |f(t)| - |f(s)| = l_k(|f|) - \lambda_k(|f|)$ et
$L_\alpha(|f|) - \lambda_\alpha(|f|) = \sum_{k=1}^{N}(l_k(|f|) - \lambda_k(|f|)) \cdot e_k \leq \sum_{k=1}^{N}(l_k(f) - \lambda_k(f)) \cdot e_k = L_\alpha(f) - \lambda_\alpha(f) \leq \epsilon$. Ainsi $|f|$ est $\mathcal{R}$-intégrable.
Comme pour tout $t \in [a,b]$ on a $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ il suit de **1.2.10** et **1.2.11** $-\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$, *c. a d.* $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$ □

1.2.16 Remarque. La réciproque n'est pas vraie : la valeur absolue $|f|$ d'une fonction peut être $\mathcal{R}$-intégrable sans que la fonction f soit $\mathcal{R}$-intégrable

1.2.17 Exemple. Soit $f = 2\chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} - 1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, alors f n'est pas $\mathcal{R}$-intégrable, mais $|f| = 1$ est $\mathcal{R}$-intégrable.

1.3 La condition de Riemann et définition de Riemann de l'intégrale.

1.3.1 Deux lemmes de subdivision.

1.3.1 Rappels et définitions. Soit $\alpha : a = a_0 < \cdots < a_N = b$ une subdivision de l'intevalle $[a, b]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée : il y a B tel que pour tout $t \in [a, b]$ on a $|f(t)| \leq B$. Soit pour $1 \leq k \leq N$

$$\overline{\lambda}_k \overset{\text{Déf}}{=} \inf_{t\in[a_{k-1},a_k]} f(t) \leq \lambda_k \left(\overset{\text{Déf}}{=} \inf_{t\in]a_{k-1},a_k[} f(t)\right) \leq l_k \left(\overset{\text{Déf}}{=} \sup_{t\in]a_{k-1},a_k[} f(t)\right) \leq \overline{l}_k \overset{\text{Déf}}{=} \sup_{t\in[a_{k-1},a_k]} f(t)$$

L'*oscillation de f sur* $[a_{k-1}, a_k]$ est

$$s_k \overset{\text{Déf}}{=} \sup_{t,s\in[a_{k-1},a_k]} |f(t) - f(s)| = \sup_{t\in[a_{k-1},a_k]} f(t) - \inf_{s\in[a_{k-1},a_k]} f(s) = l_k - \lambda_k$$

Les *sommes de Darboux inférieures et supérieures étendues de f associées à α* sont :

$$\overline{\Lambda}_\alpha \ (= \overline{\Lambda}_\alpha(f;\alpha)) \overset{\text{Déf}}{=} \sum_{k=1}^{N} \overline{\lambda}_k \cdot e_k, \quad \overline{L}_\alpha \ (= \overline{L}_\alpha(f;\alpha)) \overset{\text{Déf}}{=} \sum_{k=1}^{N} \overline{l}_k \cdot e_k$$

1.3.2 LEMME. *Soit* $0 < \delta < \frac{e}{2}$ *et* $\beta : a = b_0 < \cdots < b_{2k-1} = a_{k-1} + \delta < b_{2k} = a_k - \delta < \cdots < b_{2N+1} = a_N$ *alors :*

$$\Lambda_\alpha - (4N-2)B\delta \leq \overline{\Lambda}_\beta \leq \Lambda_\beta, \quad L_\beta \leq \overline{L}_\beta \leq L_\alpha + (4N-2)B\delta$$

Démonstration : La seconde relation se déduit de la première et de $\sup_{x\in X}(x) = -\inf_{x\in X}(-x)$ qui implique $L_\alpha(f) = -\Lambda_\alpha(-f)$, $L_\beta(f) = -\Lambda_\beta(-f)$ et $\overline{L}_\beta = -\overline{\Lambda}_\beta(-f)$.
L'inégalité $\overline{\Lambda}_\beta \leq \Lambda_\beta$ suit de $\overline{\lambda}_k \leq \lambda_k$ et $e_k = a_k - a_{k-1} > 0$.
On a $[b_0, b_1] = [a_0, a_0 + \delta], [b_{2N}, b_{2N+1}] = [a_N - \delta, a_N]$ et, pour $0 < k < N, [b_{2k}, b_{2k+1}] = [a_k - \delta, a_k + \delta]$ et $[b_{2k-1}, b_{2k}] \subset]a_{k-1}, a_k[$ donc :
$\overline{\lambda}_{2k}(\beta; f) \geq -B, \overline{\lambda}_{2k-1}(\beta; f) \geq \lambda_k(\alpha; f)$ et $\overline{l}_{2k}(\beta; f) \leq B, \overline{l}_{2k-1}(\beta; f) \leq l_k(\alpha; f)$ d'où :

$$\overline{\Lambda}_\beta = \sum_{l=1}^{2N+1} \overline{\lambda}_l(\beta; f)(b_l - b_{l-1}) = \sum_{k=0}^{N} \overline{\lambda}_{2k}(\beta; f)(b_{2k+1} - b_{2k}) + \sum_{k=1}^{N} \overline{\lambda}_{2k-1}(\beta; f)(b_{2k} - b_{2k-1}) \geq$$

$$\sum_{k=0}^{N} -B(b_{2k+1} - b_{2k}) + \overline{\lambda}_1(\alpha; f)(a_1 - a_0 - \delta) + \sum_{k=2}^{N-1} \overline{\lambda}_k(\alpha; f)(a_k - a_{k-1} - 2\delta) + \overline{\lambda}_N(\alpha; f)(a_N - a_{N-1} - \delta) =$$

$$-N2B\delta + \sum_{k=1}^{N} \overline{\lambda}_k(\alpha; f)(a_k - a_{k-1}) - \overline{\lambda}_1(\alpha; f)\delta - 2\sum_{k=2}^{N-1} \overline{\lambda}_k(\alpha; f)\delta - \overline{\lambda}_N(\alpha; f)\delta) = \Lambda_\alpha - N2B\delta - \overline{\lambda}_1(\alpha; f)\delta - 2\sum_{k=2}^{N-1} \overline{\lambda}_k(\alpha; f)\delta - \overline{\lambda}_N(\alpha; f)\delta \geq \Lambda_\alpha - (4N-2)B\delta$$

□

1.3.3 Exercice. Reprendre la démonstration pour prouver directement (sans s'y ramener à la première par $\sup_{x\in X}(x) = -\inf_{x\in X}(-x)$) la seconde relation.

1.3.4 COROLLAIRE. *(i)* $\overline{\Lambda}\ (=\overline{\Lambda}(a,b;f)) \overset{Déf}{=} \sup_{\alpha\in A(a,b)} \overline{\Lambda}_\alpha = \Lambda \left(\overset{Déf}{=} \sup_{\alpha\in A(a,b)} \Lambda_\alpha\right)$

(ii) $\overline{L}\ (=\overline{L}(a,b;f)) \overset{Déf}{=} \inf_{\alpha\in A(a,b)} \overline{L}_\alpha = L\ \left(\overset{Déf}{=} \inf_{\alpha\in A(a,b)} L_\alpha\right)$

Le second lemme de subdivision précise la monotonicité pour l'ordre de subdivision des sommes de Darboux (second point de la proposition **1.1.5**) :

1.3.5 LEMME. *Soit $\beta : a = b_0 < \cdots < b_N = b$ une subdivision de $[a,b]$ et $\alpha < \beta$ une subdivision de $[a,b]$ raffinant β : $\alpha : a = a_0 < \cdots < a_{N+M} = b$ (α a M points de plus que β) alors :*

$$\overline{L}_\alpha + 2BMe(\beta) \geq \overline{L}_\beta \geq \overline{L}_\alpha \quad et \quad \overline{\Lambda}_\alpha - 2BMe(\beta) \leq \overline{\Lambda}_\beta \leq \overline{\Lambda}_\alpha$$

Démonstration : Il suffit de traiter le cas où $M = 1$ (la subdivision α est élémentaire) il y a alors $1 \leq k \leq M$ tel que : si $0 \leq l < k, a_l = b_l$, $b_{k-1} = a_{k-1} < a_k < b_k = a_{k+1}$ et si $k < m \leq M+1, a_m = b_{m-1}$ (le nouveau point est intérieur au $k^{\text{ième}}$ intervalle de β) et :
$\overline{L}_\beta - \overline{L}_\alpha = \sum_{l=1}^{N} \overline{l}_l(\beta)e_l(\beta) - \sum_{j=1}^{N+1} \overline{l}_j(\alpha)e_j(\alpha) = \overline{l}_k(\beta)(b_k - b_{k-1}) - \overline{l}_k(\alpha)(a_k - a_{k-1}) - \overline{l}_{k+1}(\alpha)(a_{k+1} - a_k) =$
$= \overline{l}_k(\beta)(a_{k+1} - a_k + a_k - a_{k-1}) - \overline{l}_k(\alpha)(a_k - a_{k-1}) - \overline{l}_{k+1}(\alpha)(a_{k+1} - a_k) = (\overline{l}_k(\beta) - \overline{l}_k(\alpha))(a_k - a_{k-1}) + (\overline{l}_k(\beta) - \overline{l}_{k+1}(\alpha))(a_{k+1} - a_k)$.
Comme $0 \leq \overline{l}_k(\beta) - \overline{l}_k(\alpha), \overline{l}_k(\beta) - \overline{l}_{k+1}(\alpha) \leq 2B$ il vient $0 \leq \overline{L}_\beta - \overline{L}_\alpha \leq 2B(a_k - a_{k-1} + a_{k+1} - a_k) = 2B(a_{k+1} - a_{k-1}) = 2B(b_k - b_{k-1}) \leq 2Be(\beta)$ d'où le premier encadrement. le second, puisque $(\overline{\Lambda}_\beta(f), \overline{\Lambda}_\alpha(f)) = (-\overline{L}_\beta(-f), -\overline{L}_\alpha(-f))$, s'obtient en appliquant ce premier encadrement à la fonction $-f$. $\square$

1.3.6 Exercice. Ecrire les détails de la preuve du second encadrement, d'abord comme indiqué, puis directement en reprenant la preuve du premier encadrement.

1.3.7 COROLLAIRE. *Pour toute subdivision β, γ on a l'encadrement :*

$$\overline{\Lambda}_\gamma - 2BN(\gamma)e(\beta) \leq \overline{\Lambda}_\beta \leq \overline{L}_\beta \leq \overline{L}_\gamma + 2BN(\gamma)e(\beta)$$

Démonstration : Comme $\alpha = \gamma \cup \beta < \gamma$ donc $\overline{\Lambda}_\gamma \leq \overline{\Lambda}_\alpha \leq \overline{L}_\alpha \leq \overline{L}_\gamma$, cela suit, puisque $\alpha = \gamma \cup \beta < \beta$ raffine β, de **1.3.5** et est d'ordre $N(\alpha) = N(\beta) + M \leq N(\beta) + N(\gamma)$. $\square$

1.3.2 La définition de Riemann de l'intégrale.

1.3.8 Définitions. Un *marquage* d'une subdivision $\alpha : a = a_0 < \cdots < a_N = b$ de l'intervalle $[a,b]$ est $t = (t_1, \ldots t_N) \in \mathbb{R}^N$ tel que pour $1 \leq k \leq N,\ t_k \in [a_{k-1}, a_k]$ [3)]

On dit alors que (α, t) est une *subdivision marquée* de l'intervalle $[a,b]$.

[3)] donc $a = a_0 \leq \cdots \leq a_{k-1} \leq a_{k-1} \leq t_k \leq \cdots \leq a_N = b$ et une des deux inégalités $a_{k-1} \leq t_k, a_{k-1} \leq t_k$ est stricte.

La *somme de Riemann de f associée à la subdivision marquée* (α, t) est :

$$S_{\alpha t}(f) = \sum_{k=1}^{N} f(t_k) \cdot e_k = \sum_{k=1}^{N} f(t_k) \cdot (a_k - a_{k-1})$$

Une fonction[4] $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est *intégrable au sens de Riemann, d'intégrale* $I(f)$ si pour tout $\epsilon > 0$ il y a $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision marquée (α, t) avec $e(\alpha) \leq \delta$ on a $|I(f) - S_{\alpha,t}(f)| \leq \epsilon$

[4] On ne suppose pas f bornée (mais verra en **1.3.10** ci-desous qu'une fonction intégrable au sens de Riemann est bornée)

1.3.9 Remarque. L'intérêt de cette définition par rapport à la première est que d'une part on n'a pas à calculer les bornes supérieures $l_k = \sup\limits_{t \in]a_{k-1}, a_k[} f(t)$ et inférieures $\lambda_k \inf\limits_{t \in]a_{k-1}, a_k[} f(t)$ de f sur les intervalles $[a_{k-1}, a_k]$ de la subdivision $\alpha \in A(a,b)$ de $[a,b]$, mais surtout que au lieu des bornes inférieures $L = \inf\limits_{\alpha \in A(a,b)} L_\alpha$ et supérieures $\Lambda = \sup\limits_{\alpha \in A(a,b)} \Lambda_\alpha$ sur l'ensemble non dénombrable $A(a,b)$ des subdivisions de l'intervalle $[a,b]$ on a un critère portant sur le seul plus grand pas des subdivisions.

Ce critère permet une fois que l'on sait la fonction intégrable d'avoir (par exemple en prenant des subdivisions régulières assez fines et pour t_k soit une extrémité soit le milieu du $k^{\text{ième}}$ intervalle $[a_{k-1}, a_k]$) des approximations explicites de l'intégrale $I(f)$. Alors que pour la première définition on n'avait à priori aucune manière de déterminer une subdivision $\alpha \in A(a,b)$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que L_α (ou Λ_α) approche $L = \Lambda$.

De plus la définition de Riemann implique que les fonctions intégrables en ce sens sont bornées :

1.3.10 Proposition. *Une fonction intégrable au sens de Riemann est bornée.*

Démonstration : Soit $s \in [a,b]$. On applique la définition avec $\epsilon = 1$. Si (α, t) vérifie $e(\alpha) \leq \delta$ et, si $a_{k-1} \leq s \leq a_k$ on considère (α, s) tel que $s_k = s$ et si $1 \leq l \neq k \leq N, s_l = t_l$ alors : $|f(s)| \cdot e_k = |\sum\limits_{l=1}^{N} f(s_l) - \sum\limits_{\substack{1 \leq l \leq N \\ l \neq k}} f(s_l)_l \cdot e_l| \leq |I(f)| + 1 + \sum\limits_{\substack{1 \leq l \leq N \\ l \neq k}} f(t_k)_l \cdot e_l \leq |I(f)| + 1 + \sum\limits_{l=1}^{N} |f(t_l)|\delta$ d'où

$$|f(s)| \leq \Big[|I(f)| + 1 + \sum_{l=1}^{N} |f(t_l)|\delta\Big]\Big)\Big[\min_{1 \leq k \leq N} e_k\Big]^{-1}$$

□

La définition suivante est, d'après le théorème fondamental **1.3.12** ci-dessous, un critère équivalent à ce qu'une fonction soit intégrable au sens de Riemann sans avoir à connaître son intégrale $I(f)$, comme le critère de Cauchy permet de décider qu'une suite converge sans connaître sa limite :

1.3.11 Définition. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifie la *condition de Riemann* si pour tout $\epsilon > 0$ il y a $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision α avec $e(\alpha) \leq \delta$ on a $\sum\limits_{k=1}^{N(\alpha)} s_l \cdot e_k \leq \epsilon$

1.3.3 Equivalence des définitions.

$\left(\begin{array}{c}\text{théorème fondamental :}\\ \text{équivalence des définitions}\end{array}\right)$

1.3.12 Théorème. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée alors sont équivalents :*

(i) f est $\mathcal{R}$-intégrable au sens de la première définition ($\Lambda(f) = L(f)$)

(ii) $\overline{\Lambda}(f) = \overline{L}(f)$

(iii) f est intégrable au sens de la définition de Riemann.

(iv) f vérifie la condition de Riemann.

En ce cas on note $\Lambda(f) = \overline{\Lambda}(f) = \overline{L}(f) = L(f) = I(f) \overset{\text{noté}}{=} \int_a^b f \overset{syn}{=} \int_a^b f\,dt$

Démonstration : $(i) \Rightarrow (ii)$ est le corollaire **1.3.4** du premier lemme de subdivision **1.3.2**

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision marquée (α, t) avec $e(\alpha) \leq \delta$ on a $\left|S_{\alpha,t}(f) - I(f)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Si $\alpha : a = a_0 < \cdots < a_N = n$ est telle que $e(\alpha) \leq \delta$ et pour $1 \leq k \leq N$ soit $a_{k-1} \leq t_k, u_k \leq a_k$ avec $f(u_k) \leq f(t_k)$ alors :

$$\left|\sum_{k=1}^{N}(f(t_k) - f(u_k))e_k\right| = \sum_{k=1}^{N} f(t_k)e_k - \sum_{k=1}^{N} f(u_k)e_k = S_{\alpha,s}(f) - S_{\alpha,t}(f) = S_{\alpha,s}(f) - I(f) + I(f) - S_{\alpha,t}(f) \leq \left|S_{\alpha,s}(f) - I(f)\right| + \left|I(f) - S_{\alpha,t}(f)\right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

D'où, puisque $s_k = \sup\limits_{t_k, u_k \in [a_{k-1}, a_k]} f(t_k) - f(u_k)$, $\sum_{k=1}^{N} s_k \cdot e_k \leq \epsilon$ et la condition de Riemann est vérifiée.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Pour toute subdivision $\alpha \in A(a,b)$ de $[a,b]$ on a $0 \leq L_\alpha - \Lambda_\alpha \leq \overline{L}_\alpha - \overline{\Lambda}_\alpha = \sum_{k=1}^{N} s_k(\alpha) \cdot e_k(\alpha)$.

Donc si f vérifie la condition de Riemann pour tout $\epsilon > 0$ il y a un $\delta > 0$ tel que si $e(\alpha) \leq \delta$ [par exemple si $\alpha = \alpha_N$ est la subdivision régulière d'ordre $N \geq \frac{b-a}{\delta}$] on a $0 \leq L_\alpha - \Lambda_\alpha \leq \epsilon$ et donc pour tout $\epsilon > 0$ il y a $\alpha \in A(a,b)$ tel que $0 \leq L - \Lambda \leq L_\alpha - \Lambda_\alpha \leq \epsilon$ et donc $L - \Lambda = 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ (C'est la partie cruxiale). Soit $\epsilon > 0$ et $\gamma : a = c_0 < \cdots < c_M = b$ une subdivision de $[a,b]$ vérifiant $0 \leq \overline{\Lambda}_\gamma - \overline{L}_\gamma \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Soit $\beta \in A(a,b)$ avec $e(\beta) \leq \frac{\epsilon}{8MB} = \delta$. Le corollaire **1.3.7** donne $\overline{L}_\beta - \overline{L}_\gamma \leq 2MBe(\beta) \leq 2MB\frac{\epsilon}{8MB} \leq \frac{\epsilon}{4}$ et $\overline{\Lambda}_\gamma - \overline{\Lambda}_\beta \leq 2MBe(\beta) \leq 2MB\frac{\epsilon}{8MB} \leq \frac{\epsilon}{4}$

donc $\overline{L}_\beta - \overline{\Lambda}_\beta = \overline{L}_\beta - \overline{L}_\gamma + \overline{L}_\gamma - \overline{\Lambda}_\gamma + \overline{\Lambda}_\gamma - \overline{\Lambda}_\beta \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$.

Ainsi si $\beta : a = b_0 < \cdots < b_K = b$ est marquée par t : pour $1 \leq k \leq K$ on a $t_k \in [a_{k-1}, a_k]$ alors $\overline{\Lambda}_\beta = \sum_{k=1}^{K} \overline{\lambda}_k \cdot e_k \leq \sum_{k=1}^{K} f(t_k) \cdot e_k = S_{\beta,t}(f) \leq \sum_{k=1}^{K} \overline{l}_k \cdot e_k = \overline{L}_\beta$.

De $\overline{\Lambda}_\beta \leq \overline{\Lambda} = \overline{L} \leq \overline{L}_\beta$ et en posant $I(f) = \overline{\Lambda} = \overline{L}$ il vient $\left|S_{\beta,t}(f) - I(f)\right| \leq \overline{L}_\beta - \overline{\Lambda}_\beta \leq \epsilon$ et f est intégrable au sens de la définition de Riemann. $\square$