Integration.

Primitives des fonctions continues et intégrale de Riemann.

Table des matières

Notations

Un intervalle réel fermé borné $I = [a, b]$ est fixé, on note $\mathring{I} =]a, b[$ l'intervalle ouvert correspondant.

Présentation

Dans le cas d'une fonction $f : I \to [0, M]$ bornée à valeurs positives ou nulles pour définir l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ (si cette dernière peut se définir !) une approche est de majorer (resp. minorer) l'aire de son *épigraphe* $e\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq y,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$, par l'aire d'unions finies de rectangles $\cup_{k=1}^N [a_{k-1}, a_k] \times [0, l_k] \supset e\Gamma(f)$ contenants (resp. $\cup_{k=1}^N [a_{k-1}, a_k] \times [0, \lambda_k] \subset e\Gamma(f)$ contenues dans) cet épigraphe. On aura réussi si l'éccart entre ces majorations et minorations peut être rendu arbitrairement petit, ce qui imposera des conditions sur la fonction f (qui, par exemple pour la fonction caractéristique de $I \cap \mathbb{Q}$, ne sont pas toujours remplies).

Dans le cas d'une fonction $f : I \to [m, M]$ bornée, mais pouvant changer de signe, sans référence à l'épigraphe (qui n'est plus défini), les formules calculant les aires précédentes d'union de rectangles gardent un sens, ce sont des *sommes de Darboux supérieures et inférieures* de la fonction f.

Ces définitions demandent un minimum de formalisme, qui sera réduit au début où l'on s'occupera uniquement des sommes de Darboux supérieures, car elles suffiront à prouver de manière effective (*c. a d.* en donnant des approximations à un ordre de précision arbitraire) le premier but du cours :.

0.0.1 Théorème (Primitives des fonctions continues). *Si $f : J \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle J* (plus nécessairement fermé borné) *et $s_0 \in J$ alors il y a $F : J \to \mathbb{R}$ dérivable avec :*

$$F(s_0) = 0 \quad et \qquad F' = f$$

1 Primitives des fonctions continues sur $I = [a, b]$.

1.1 Subdivisions d'un intervalle $I = [a, b]$

1.1.1 Définitions. Une *subdivision* de I est une partie finie de l'intervalle ouvert correspondant.

La subdivision $\alpha \subset \mathring{I} =]a, b[$, identitifiée à la suite des éléments de $\alpha \cup \{a, b\}$ rangés par ordre croissant et numérotée de 0 à $N = N(\alpha) = 1 + \mathrm{card}(\alpha))$ se note $\alpha : a = a_0 < \dots a_k < \dots < a_N = n$.

L'*ordre* de α est $N = N(\alpha) = 1{+}\mathrm{card}(\alpha))$, la subdivision α découpe I en N intervalles consécutifs :

$$I_k = [a_{k-1}, a_k], k = 1, \dots, N \text{ le } k^{\text{ième}} \textit{ pas } \text{de } \alpha \text{ de } \textit{longueur } e_k = a_k - a_k$$

.

1.1.2 Notation. On désigne $A(a, b)$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$ [1)].

[1)] et $A_N(a, b) \subset A(a, b)$ celui des subdivisions d'ordre N.

1.1.3 Exemples.
1. $\alpha_1 : a = a_0 < a_1 = b$ est une subdivision, dite *triviale* de I, plus généralement
2. Pour $0 \leq k \leq N, a_k = a + k\frac{b-a}{N} = \frac{N-k}{N} \cdot a + \frac{k}{N} \cdot b, e_k = \frac{b-a}{N}$, la *subdivision régulière* α_N *d'ordre* N de I.

1.1.4 Exercices.
1. Prouver que subdivision régulière α_N de I est l'unique subdivision $a = a_0 < \dots < a_{k-1} < a_k < \dots < a_N = b$ d'ordre N de $I = [a, b]$ dont les pas sont deux à deux égaux [*c. a d.* si $1 \leq k, l \leq N$ on a $e_k = a_k - a_{k-1} = a_l - a_{l-1} = e_l$]
2. Soit, pour $1 \leq k \leq N, a_k = a + (b - a)^{\frac{k}{N}}$ et $a_0 = a$. Prouver que :
   (a) si $1 \leq k \leq N$ on a $a_{k-1} < a_k$ et $a_N = b : \alpha_N^g : a = a_0 < \dots < a_k < \dots < a_N = b$ est une subdivision de $[a, b]$, dite *géométriquement régulière d'ordre* N.
   (b) La subdivision géométriquement régulière α_N^g de I est l'unique subdivision $a = a_0 < \dots < a_{k-1} < a_k < \dots < a_N = b$ d'ordre N de $I = [a, b]$ dont le rapport de deux pas consécutifs est constant [*c. a d.* si $1 \leq k, l < N$ on a $\frac{e_{k+1}}{e_k} = \frac{e_{l+1}}{e_l}$

1.1.5 LEMME. *(i) Les pas sont des nombres positifs : pour* $1 \leq k \leq N$ *on a* $e_k > 0$.

(ii) La somme des pas est la longueur de l'intevalle : $\sum_{k=1}^{N} e_k = b - a$.

Démonstration : Pour $1 \leq k \leq N$ on a $e_k = a_k - a_{k-1}$, d'où (i) : $e_k > 0$, puisque $a_{k-1} < a_k$ et

$$\sum_{k=1}^{N} e_k = \sum_{k=1}^{N} a_k - a_{k-1} = \sum_{k=1}^{N} a_k - \sum_{k=1}^{N} a_{k-1} = \sum_{k=1}^{N} a_k - \sum_{l=0}^{N-1} a_l = \sum_{l=1}^{N-1} a_l + a_N - a_0 - \sum_{l=1}^{N-1} a_l = a_N - a_0 = b - a, \text{ soit } (ii).$$

□

1.1.6 Définitions. Soit α, β deux subdivisions de l'intervalle I on dit que :

α *raffine* (ou *est un raffinement d'*) β, noté $\alpha < \beta$ si $\beta \subset \alpha$ et

α est un *raffinement élémentaire de* β, noté $\alpha <_e \beta$ si $\alpha < \beta$ et $N(\alpha) = N(\beta) + 1$

1.1.7 Exercices. Prouver que :

1. la relation de raffinement sur les subdivisions de I est reflexive, antisymétrique et transitive.
2. (a) Si $M, N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ alors la subdivieon régulière d'ordre N raffine celle d'ordre M si et seulement si M divise N.
   (b) Pour $0 \leq \nu \leq 4$ représenter sur une figure les subdivisions régulières d'ordre 2^ν de $[a, b] = [0, 16]$
   (c) Pour $0 \leq \nu \leq 3$ représenter sur une figure les subdivisions régulières d'ordre 3^ν de $[a, b] = [0, 27]$

1.1.8 PROPOSITION. *Soit α', α deux subdivisions de I avec si $\alpha' < \alpha$ alors il y a $l \in \mathbb{N}$ tel que $N(\alpha') = N(\alpha) + l \geq N(\alpha)$ avec égalité si et seulement si $\alpha' = \alpha$. De plus :*

(i) Si $l = 1$: la subdivision est élémentaire $\alpha <_e \beta$ et il y a $1 \leq k \leq N$ tel que

$$\alpha' : a = a'_0 < \cdots < a'_{N+1} = b, \qquad \alpha : a = a_0 < \cdots < a_N = b$$

où $a'_k \in]a_{k-1}, a_k[$ et si $0 \leq j < k$, $a'_j = a_j$ si $k < h \leq N+1$, $a'_h = a_{h-1}$
En particulier $e_k = e'_k + e'_{k+1}$, si $0 \leq j < k$, $e'_j = e_j$ et si $k < h \leq N+1$, $e'_h = e_{h-1}$

(ii) Pour $0 \leq t \leq l$ il y a des subdivisions α^t où $\alpha^0 = \alpha, \alpha^l = \alpha'$ et pour $0 < t \leq l$ on a $\alpha^t <_e \alpha^{t-1}$.

Démonstration : Comme α', α sont finis et $\alpha \subset \alpha'$ on a $\operatorname{card}(\alpha) \leq \operatorname{card}(\alpha') = \operatorname{card}(\alpha) + l$ où $l = \operatorname{card}(\alpha' \setminus \alpha)$ d'où : $N(\alpha') = 1 + \operatorname{card}(\alpha') = 1 + \operatorname{card}(\alpha) + l = N(\alpha) + l$. L'égalité correspondant à $0 = l = \operatorname{card}(\alpha' \setminus \alpha)$ donc $\alpha' \setminus \alpha = \emptyset$, *c. a d.* $\alpha' = \alpha$.

Si $l = 1$ alors $\alpha' \setminus \alpha$ est un singleton $\alpha' \setminus \alpha = \{a'_k\}$ et pour $0 \leq j < k < h \leq N(\alpha') = N(\alpha) + 1 = N + 1$ les $a'_j, a'_h \in \alpha$ sont tous les éléments $a_0, \ldots, a_N$ de α. Étant rangés dans le même ordre, on a $a'_j = a_j, a'_h = a_{h-1}$ et $a_{k-1} = a'_{k-1} < a'_k < a_{k+1} = a_k$.

Enfin, si $l > 0$ et les éléments de $\alpha' \setminus \alpha = \{b_1, \ldots, b_l\}$ sont numérotés de 1 à l, il suffit, de poser $\alpha^0 = \alpha$ et pour $1 \leq t \leq l$, de définir α^t par la relation de récurrence $\alpha^t = \alpha^{t-1} \cup \{b_t\}$.

□

1.2 Intégrale supérieure d'une fonction bornée sur un intervalle $I = [a, b]$ fermé borné.

Soit $m, M, x < y \in \mathbb{R}$ et $f : [x, y] \to \mathbb{R}$ une fonction *bornée*[2)] *par m et M sur* l'intervalle $[x, y]$.
Soit $x \leq a < b \leq y$ et $\alpha : a = a_0 < \cdots < a_N = b$ une subdivision d'un sous-intervalle $[a, b] \subset [x, y]$.

[2)] pour tout $t \in [x, y]$ on a : $m \leq f(t) \leq M$

1.2.1 Notations. Pour $1 \leq k \leq N$ on pose ;

$$m \leq \lambda = \inf\{f(t) \,|\, a \leq t \leq b\} \leq l_k = \sup\{f(t) \,|\, a_{k-1} < t < a_k\} \leq l = \sup\{f(t) \,|\, a \leq t \leq b\}$$

1.2.2 Exemple. Si f est continue croissante $l_k = f(a_k)$, si f est continue décroissante $l_k = f(a_{k-1})$

1.2.3 Remarque. Si $a' \in]a_{k-1}, a_k[$ alors $l'_k = \sup\{f(t) \,|\, a_{k-1} < t < a'\}, l''_k = \sup\{f(t) \,|\, a' < t < a_k\} \leq l_k$

1.2.4 Exercice. Prouver $l_k = \max(l'_k, f(a'), l''_k)$

1.2.5 Définition. La *somme de Darboux supérieure de la fonction f associée à la subdivision* α est :

$$L_\alpha(a,b)\ \Big[= L_\alpha(a,b:f)\Big] = \sum_{k=1}^{N} l_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^{N} \sup\{f(t)\,|\,a_{k-1} < t < a_k\} \cdot (a_k - a_{k-1})$$

En particulier si f est continue croissante $L_\alpha(a,b) = \sum_{k=1}^{N} f(a_k) \cdot e_k$

1.2.6 Exemples. 1. Si $f = c$ est constante $L_\alpha(a,b) = \sum_{k=1}^{N} c \cdot e_k = c \cdot (b-a)$.

2. Si $f = i : [x,y] \underset{t \mapsto t}{\to} \mathbb{R}$ est l'inclusion de $[x,y]$ dans $\mathbb{R}$ et $e = \max\{e_1, \dots, e_N\}$, le plus grand pas, alors $\frac{1}{2}(b^2-a^2) \le L_\alpha(a,b) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot e_k \le \frac{1}{2}(b^2-a^2) + \frac{e}{2}(b-a)$

Démonstration : Pour $1 \le k \le N$, par 1.2.2 on a $\frac{a_{k-1}+a_k}{2} \le a_k = l_k$ d'où $\frac{a_k^2 - a_{k-1}^2}{2} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2}(a_k - a_{k-1}) \le l_k e_k = (\frac{a_k + a_{k-1} + e_k}{2}) e_k \le \frac{a_k + a_{k-1}}{2} e_k + \frac{e}{2} e_k$:
$\frac{1}{2}(b^2-a^2) = \frac{a_N^2 - a_0^2}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^2 - a_{k-1}^2}{2} \le \sum_{k=1}^{N} l_k e_k = L_\alpha(a,b) \le \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k + a_{k-1}}{2} e_k + \frac{e}{2} e_k = \frac{1}{2}(b^2-a^2) + \sum_{k=1}^{N} \frac{e_k}{2} e_k = \frac{1}{2}(b^2-a^2) + \frac{e}{2}(b-a)$ □

Les sommes de Darboux supérieures s'encadrent en fonction des bornes de la fonction et sont, relativement au raffinement des subdivisions, décroissantes :

1.2.7 PROPOSITION. *(i)* $\lambda \cdot (b-a) \le L_\alpha(a,b) \le l \cdot (b-a)$
(ii) si $\alpha' < \alpha$ *alors* $\le L_{\alpha'}(a,b) \le L_\alpha(a,b)$

Démonstration : Pour tout $t \in [a,b], \lambda \le f(t) \le l$, d'où pour $1 \le k \le N, \lambda \le l_k \le l$ et, les pas e_k étant de somme $b-a$ et positifs :
$\lambda(b-a) = \sum_{k=1}^{N} \lambda e_k \le \sum_{k=1}^{N} l e_k = L_\alpha(a,b) \le \sum_{k=1}^{N} l e_k = l(b-a)$.

D'après 1.1.8, on peut supposer $\alpha' <_e \alpha$ décrit dans 1.1.8, et [en interprétant comme 0 une somme $\sum_p^q$ où $q < p$] par 1.2.3 : $L_{\alpha'} = \sum_{i=1}^{N+1} l'_i e'_i =$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} l'_i e'_i + l'_k e'_k + l'_{k+1} e'_{k+1} + \sum_{h=k+2}^{N+1} l'_h e'_h = \sum_{j=1}^{k-1} l_i e_i + l'_k e'_k + l'_{k+1} e'_{k+1} + \sum_{h=k+2}^{N+1} l_{h-1} h e_{h-1} \le \sum_{j=1}^{k-1} l_i e_i + l_k(e'_k + e'_{k+1}) + \sum_{i=k+1}^{N} l_i e_i = L_\alpha(a,b)$$ □

D'après 1.2.7 l'ensemble $\{L_\alpha(a,b)\,|\,\alpha \in A(a,b)\}$ est un ensemble borné de nombres réels. Comme il est (par exemple d'après 1) non vide il a une borne inférieure [3] et on peut poser la

1.2.8 Définition. L'*intégrale supérieure de f sur* $[a,b]$ est $L(a,b)\ (= L(a,b;f)) = \inf_{\alpha \in A(a,b)} L_\alpha(a,b)$

[3] La *borne inférieure* $\inf(X)$ d'une partie non vide minorée $X \subset \mathbb{R}$ des réels est le plus grand de ses minorants elle est caractérisée par :
1. Pour tout $x \in X$ on a $\inf(X) \le x$
2. Si $\inf(X) < y \in \mathbb{R}$ il y a $x \in X$ tel que $x < y$.

1.2.9 Remarque. Comme $A(a,b) = \cup_{N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} A_N(a,b)$ on a $L(a,b) = \inf_{N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \inf_{\alpha\in A(a,b)_N} L_\alpha(a,b)$ définissant $L(a,b)$ comme borne inférieure de la suite [4] $L_n = \inf_{\alpha\in A(a,b)_N} L_\alpha(a,b)$ plus propice l'approximation numérique que la définition comme borne inférieure de la partie (qui non dénombrable) $\{L_\alpha(a,b) \,|\, \alpha \in A(a,b)\} \subset \mathbb{R}$

[4] qui d'après l'exercice 1.2.10 2 ci-dessous est décroissante, donc cette borne inférieure est en fait une limite.

1.2.10 Exercices (ensembles et borne inférieure dans $\mathbb{R}$).

1. Soit $(X_j)_{\in J}$ une famille de parties $X_j \subset \mathbb{R}$ non vide des réels et $X = \cup_{j\in J} X_j$
   (a) Prouver que si X est minorée alors chaque X_j est minorée.
   (b) Prouver que si chaque $X_j \neq \emptyset$ est non vide alors $X \neq \emptyset$ est non vide.
   (c) Est-ce que $X \neq \emptyset$ non vide implique chaque $X_j \neq \emptyset$ est non vide ?
   (d) Donner un exemple où chaque X_j est minorée mais X ne l'est pas.
   (e) Prouver que si chaque $X_j \neq \emptyset$ est non vide et X est minoré alors $\inf(X) = \inf_{j\in J} \inf(X_j)$.
2. Prouver que la suite $L_N = \inf_{\alpha\in A(a,b)_N} L_\alpha(a,b)$ est décroissante.

1.2.11 THÉORÈME. *(i)* $\lambda \cdot (b-a) \leq L(a,b) \leq l \cdot (b-a)$ (encadrement de l'intégrale supérieure)

(ii) Si $x \leq a < b < c \leq y$ *alors* $L(a,c) = L(a,b) + L(b,c)$ (relation de Chasles pour l'intégrale supérieure)

Démonstration : Le premier point suit de 1.2.7.

Pour le second il suffit pour tout $\epsilon > 0$ d'établir (1) $L(a,c) \leq L(a,b) + L(b,c) + 2\epsilon$ et (2) $L(a,b) + L(b,c) \leq L(a,c) + \epsilon$:

Soit $\alpha : a = a_0 < \cdots < a_M = b,\ \beta : b = b_0 < \cdots < b_N = c$ subdivisions de $[a,b],[b,c]$ avec $L(a,b) \leq L_\alpha(a,b) + \epsilon$ et $L(b,c) \leq L_\beta(b,c) + \epsilon$. Considérons la *subdivision juxtaposée* $\gamma = \alpha * \beta : a = c_0 = a_0 < \cdots < c_M = a_m = b = b_0 < c_{M+1} = b_1 < \cdots < c_{M+N} = b_N = b$ de $[a,c] = [a,b] \cup [b,c]$. On a $L(a,c) \leq L_\gamma(a,c) = \sum_{k=1}^{M+N} l_k(\gamma)e_k(\gamma) = \sum_{k=1}^{M} + \sum_{k=M+1}^{M+N} = \sum_{j=1}^{M} l_j(\alpha)e_j(\alpha) + \sum_{h=1}^{N} l_h(\beta)e_h(\beta) = L_\alpha(a,b) + L_\beta(b,c) \leq L(a,b) + \epsilon + L(b,c) + \epsilon$.

Soit γ une subdivision de $[a,c]$ avec $L(a,c) \leq L_{\gamma(a,c)} + \epsilon$ et $\gamma' = \gamma \cup \{b\}$. On a $\gamma' < \gamma$ donc, par 1.2.7, $L_{\gamma'}(a,c) \leq L_\gamma(a,c)$ et $L(a,c) \leq L_{\gamma'}(a,c) \leq L(a,c) + \epsilon$. Comme $b \in \gamma'$ il y a des subdivisions $\alpha : a = a_0 < \cdots < a_M = b,\ \beta : b = b_0 < \cdots < b_N = c$ de $[a,b],[c,d]$ telles que $\gamma' = \alpha * \beta$ donc $L(a,b) + L(b,c) \leq L_\alpha(a,b) + L_\beta(b,c) = L_{\gamma'}(a,c) \leq L(a,c) + \epsilon$. $\square$

1.3 Existence des primitives des fonctions continues.

1.3.1 COROLLAIRE. *On considère les applications* $F, G : [x,y] \to \mathbb{R}$ *définies par :*
$F(x) = 0,$ *si* $x < t, F(t) = L(x,t);$ $G(y) = 0,$ *si* $t < y, G(t) = -L(t,y)$.

Si f *est continue en* $t_0 \in [x,y]$, *alors* F *et* G *sont dérivables en* t_0 *et* $F'(t_0) = f(t_0) = G'(t_0)$.

Démonstration : Le résultat suit de ce que, pour tout $\epsilon > 0$ il y a $\delta > 0$ tel que si $t \in [x, y]$, $|t - t_0| < \delta$ on a l'encadrement :

$$-|t - t_O| \cdot \epsilon \leq F(t) - F(t_0) - f(t_0)(t - t_0) = G(t) - G(t_0) - f(t_0) \cdot (t - t_0) \leq |t - t_O| \cdot \epsilon \tag{1}$$

ce δ est donné par la continuité de f en t_0 : pour tout $\epsilon > 0$ il y a $\delta > 0$ tel que si $t \in [x, y]$, $|t - t_0| < \delta$ on a $f(t_0) - \delta \leq f(t) \leq f(t_0) - \delta$ et l'encadrement (1) suit, dans chacun des trois cas $t_0 < t$, $t_0 = t$ et $t < t_0$, du théorème 1.2.11 d'encadement et de relation de Chasles :

Si $t_0 < t$ on a $(f(t_0) - \epsilon)(t - t_0) \leq L(t_0, t) \leq (f(t_0) + \epsilon)(t - t_0)$ et $L(x, t) = L(x, t_0) + L(t_0, t)$, $\quad L(t_0, y) = L(t_0, t) + L(t, y)$,
c. a d. $F(t) - F(t_0) = L(x, t) - L(x, t_0) = L(t_O, t) = -L(t, y) - (-L(t_0, y)) = G(t) - G(t_0)$, d'où l'encadrement (1).

Si $t = t_0$ on a $L(x, t_0) = L(x, t)$ et $L(t, y) = L(t_0, y)$, soit $F(t) - F(t_0) = 0 = L(t, t_0) = G(t) - G(t_0)$, d'où aussi l'encadrement (1).

Si $t < t_0$ on a $(f(t_0) - \epsilon)(t_0 - t) \leq -L(t, t_0) \leq (f(t_0) + \epsilon)(t_0 - t)$ et $L(x, t_0) = L(x, t) + L(t, t_0)$, $\quad L(t, y) = L(t, t_0) + L(t_0, y)$,
c. a d. $F(t) - F(t_0) = L(x, t) - L(x, t_0) = -L(t, t_O) = -L(t, t_O) = -L(t, y) - (-L(t_0, y)) = G(t) - G(t_0)$, d'où encore l'encadrement (1). □

1.3.2 Rappel. Si $f :]u, v[\to \mathbb{R}$ est continue alors pour tout $x < y \in]u, v[$, $f_{|[x,y]}$ est bornée.

D'où, par 1.3.1 (pour $[a, b]$ et pour la première partie et des intervalles [5] $[x, s_0]$ et $[s_0, y]$ pour la seconde) le :

[5] où $[x, y] \subset]u, v[$ est choisi tel que $s, s_0 \in]x, y[$

1.3.3 CO-COROLLAIRE. *(i) Si f est continue sur $[a, b]$ alors F et G sont des primitives de f.*
(ii) si $f :]u, v[\to \mathbb{R}$ est continue et $t_0 \in]u, v[$ alors f a une primitive s'annulant en s_0 :

$$F :]u, v[\to \mathbb{R},\ t < t_0\ F(t) = -L(t, t_0);\ F(s_0) = 0;\ t > t_0\ F(t) = L(t_0, t)$$

1.3.4 Application. Ceci définit en particulier les fonctions Logarithme et Arc tangente [6] :

[6] nécessaires au calcul des primitives des fractions ratioonelles

1. $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{t}$ d'où, avec $s_0 = 1, F = \text{Log} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ d'où, avec $s_0 = 0, G = \text{Arctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1.3.5 Exercice. Soit $1 < x \in \mathbf{R}$ et $h : [1, x] \to \mathbf{R}, h(t) = \frac{1}{t}$.

1. Prouver, en notant pour $1 \leq u < w \leq x$ et $v \in]u, w[$ $\alpha(v)$, la subdivision $\alpha(v) : u = u_0 < u_1 = v < u_2 = w$ de $[u, w]$:

$$L_{\alpha(v)}(u, w; h) = \frac{1}{u}(v - u) + \frac{1}{v}(w - v) = \frac{v}{u} + \frac{w}{v} - 2 \geq \frac{\sqrt{uw}}{u} + \frac{w}{\sqrt{uw}} - 2 = L_{\alpha(\sqrt{uw})}(u, w, h)$$

2. Admettant que parmi les subdivisions α d'ordre N de $[a, b]$ il y en a une qui minimise la somme de Darboux supérieure $L_\alpha(a, b; h)$, en déduire que c'est la subdivision géométriquement régulière $\gamma_N : 1 = x^{\frac{0}{N}} < \cdots < x^{\frac{k}{N}} < \cdots < x^{\frac{N}{N}} = x$, qu'elle est de k ième pas $e_k = (x^{\frac{1}{N}} - 1)\, x^{\frac{k-1}{N}}$ et, pour toute α d'ordre N :

$$L_\alpha(1, x; h) \geq L_{\gamma_N}(1, x; h) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x^{\frac{k-1}{N}}} (x^{\frac{1}{N}} - 1) x^{\frac{k-1}{N}} = N(x^{\frac{1}{N}} - 1)$$

3. Déduire de ce qui précède $\text{Log}(x) = L(1, x; h) = \text{Lim}_{N \to +\infty} N(x^{\frac{1}{N}} - 1)$