Calcul des primitives.

Intégrales des fonctions élémentaires et Taylor avec reste intégral.

Table des matières

Notations

Soit $I, J, \ldots$ des intervalles réels [1] [contenant plus d'un point].

[1] de l'un des neuf types : $]a,b[,]a,b], [a,b[, [a,b]$, $]-\infty,b[,]-\infty,b],]a,+\infty[, [a,+\infty[$, $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont deux réels avec $a < b$. L'*interieur* $\overset{\circ}{I}$ de l'intervalle I est alors $\mathbb{R}$ dans le dernier cas, $]a,b[$ dans les quatre premiers, $]-\infty,b[$ dans les deux suivants et $]a,+\infty[$ dans les deux avant derniers.

1 «Rappels [2]» de calcul différentiel.

À une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ on associe sa (fonction) dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$.

1.0.1 Proposition (Propriétés algébriques de la dérivation).

(i) (a) *Une fonction constante* $f_c : \underset{t \mapsto c}{I \to \mathbb{R}}$ *est dérivable et* $f_c' = 0 : \underset{t \mapsto 0}{I \to \mathbb{R}}$.

(b) *L'inclusion* $i = i_I : \underset{t \mapsto t}{I \to \mathbb{R}}$ *est dérivable et* $i' = 1 (= f_1) : \underset{t \mapsto 1}{I \to \mathbb{R}}$.

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ *dérivables et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *alors :*

(ii) La combinaison linéaire $\lambda f + \mu g : I \to \mathbb{R}$ *est dérivable et :*

(Linéarité de la dérivation)

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \lambda f'(t) + \mu g'(t)$$

(iii) Le produit $f \cdot g : I \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t)g(t)$ *est dérivable et :*

(Formule de Leibniz)
Si les deux fonctions f et g ne s'annullent pas en divis
par le produit fg Leibniz donne la :
formule d'addition de la dérivée logarithmique :

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$$

qui permet des calculs plus simples, comme :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' : I \to \mathbb{R}, t \mapsto f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

(iv) Si pour tout $t \in I$, $g(t) \neq 0$ *alors le quotient* $\underset{t \mapsto \frac{f(t)}{g(t)}}{I \to \mathbb{R}}$ *est dérivable et :*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)}$$

1.0.2 Remarques.

1. (a) L'ensemble $\mathcal{D}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \,|\, f \text{est dérivable}\}$ des fonctions réelles sur l'intervalle I qui sont dérivables est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\}$,
l'espace vectoriel de toutes les fonctions réelles sur I et
   (b) l'application dérivée $D : \underset{f \mapsto f'}{\mathcal{D}(I) \to \mathcal{F}(I)}$ est linéaire.
2. En admettant la première partie du dernier point de la proposition 4.1.3 (que le quotient est dérivable), la formule pour la dérivée du quotient découle de la formule de Leibniz :

1.0.3 Exercice. Soit I un intervalle réel et $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $gh = f$.
En utilisant la formule de Leibnitz, vérifier $gh' = f' - g'h$, en déduire, si $\forall t \in I,\ g(t) \neq 0$, que $\forall t \in I, h'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g(t)^2}$.

[2] Une liste de propriétés de la dérivation des fonctions dérivables sont utilisées pour le calcul des primitives.
Ici on prendra ces propriétés comme des «Axiomes», les définitions de *dérivable, fonctions dérivée,...* et les preuves, tiellement vues en terminale, seront données en Mat121.

1.0.4 Proposition (dérivée des fonctions composées et réciproques).
Soit $\varphi : J \to I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivables alors

(i) La fonction composée $f \circ \varphi : \underset{t \mapsto,\ f(\varphi(t))}{J \to \mathbb{R}}$ *est dérivable et :*

(dérivée des fonctions composées)
("chain rule" dans les livres en anglais)

$$\big(f \circ \varphi\big)' = \big(f' \circ \varphi\big) \cdot \varphi' : J \to \mathbb{R}, t \mapsto f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

(ii) Si φ est bijective et pour tout $t \in J$, $\varphi'(t) \neq 0$ alors $\varphi^{-1} : I \to J$ est dérivable et pour tout $t \in J$ on a :

(dérivée des fonctions réciproques)

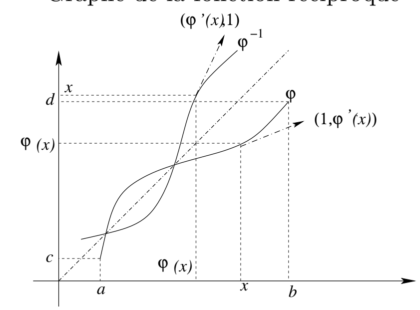
$$\big(\varphi^{-1}\big)'(\varphi(t)) = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

1.0.5 Remarques. 1. Dans le second point de 1.0.4 la condition $\varphi'(t) \neq 0$ est nécessaire et la formule de pour la dérivée de φ^{-1} découle de la dérivabilité de φ^{-1} :
On a $\mathrm{Id}_J = \varphi^{-1} \circ \varphi$ donc, en admettant la dérivabilité de φ^{-1}, on a par point de 1.0.4 :

$$\text{pour tout } t \in J \quad 1 = \mathrm{Id}_J'(t) = \big(\varphi^{-1}\big)'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \text{donc } \varphi'(t) \neq 0 \text{ et } \big(\varphi^{-1}\big)'(\varphi(t)) = \frac{1}{\varphi'(t)} \; \square$$

2. Une preuve géométrique second point de 1.0.4 : Rappelons que :
   (a) i. Si f est une fonction dérivable définie en x, le vecteur $(1, f'(x))$ est tangent au graphe de la fonction f en son point $(x, f(x))$ d'abscisse x.
   ii. Réciproquement si le graphe d'une fonction f a en son point $(x, f(x))$ d'abscisse x un vecteur tangent (s,t) non vertical ($s \neq 0$) alors f est dérivable en x et $f'(x) = \dfrac{t}{s}$.
   iii. Si une courbe plane Γ a en un point $x \in \mathbb{R}^2$ du plan un vecteur tangent $v = (s,t)$ et $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, M \mapsto A(M) + N$ est une application affine du plan de partie linéaire A alors la courbe $D(\Gamma)$ admet le vecteur $A(v)$ comme vecteur tangent au point $D(M)$.
   (b) Si $\varphi : J \to I$ est bijective alors le graphe de sa fonction réciproque $\varphi^{-1} : I \to J$ est le symétrique $\{(y, \varphi^{-1}(y)) \mid y \in I\} = \{(\varphi(x), x) \mid x \in J\}$ du graphe $\{(x, \varphi(x)) \mid x \in J\}$ de φ.

Graphe de la fonction réciproque



Ainsi le vecteur $(\varphi'(x), 1)$, symétrique par rapport à la première diagonale du vecteur $(1, \varphi'(x))$ tangent en $(x, \varphi(x))$ au graphe de φ, est tangent en $(\varphi(x), x)$ à celui de φ^{-1}.
Si de plus $\varphi'(x) \neq 0$ est non nul, on a $(\varphi'(x), 1) = \varphi'(x)(1, \dfrac{1}{\varphi'(x)})$ d'où le résultat par 2(a)ii

1.0.6 Exemples. 1. La fonction Exponentielle

$$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$

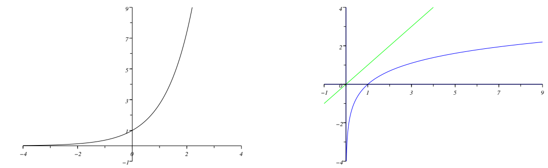
est dérivable, bijective et $\boxed{\exp' = \exp}$ donc sa réciproque, la fonction Logarithme :

$$\operatorname{Log} \overset{\text{Déf}}{=\!=} \exp^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\operatorname{Log}'(\exp(t)) = \dfrac{1}{\exp(t)}$.

Ainsi [3] pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\boxed{\operatorname{Log}'(x) = \frac{1}{x}}$

Graphes des fonctions Exponentielle et Logarithme



[3] car pour tout $x > 0$ il y a un $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \exp(t)$

1.0.7 Remarque. L'exemple précédent suppose la «définition de terminale [4] de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$ comme unique solution de l'équation différentielle $e' = e$ vérifiant $e'(0) = 1$.

Comme $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}, f(t) = \dfrac{1}{t}$ est continue le cours d'intégration assurera que f a une unique primitive $F = \operatorname{Log} :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ telle que $F(1) = 0$, que l'on prouve être bijective.

[4] qui ne serait une **définition** qu'après que l'on ait **prouvé** cette équation différentielle a une unique solution, ce qui n'est (p l'existence du moins) pas fait en terminale !

1.0.8 Exercice. En définissant exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme la bijection réciproque de Log, prouver que l'exponentielle est dérivable et vérifie $\exp' = \exp$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, p_\alpha(t) = \exp(\alpha \operatorname{Log}(t)) = e^{\alpha \operatorname{Log}(t)}$ $(= t^\alpha)$, la *puissance d'ordre* [5] α composée de l'homothétie $t \mapsto \alpha \operatorname{Log}(t)$ et de l'exponentielle $t \mapsto e^t$, est dérivable et pour tout $t \in]0, +\infty[$ alors [6] :

$$\boxed{p'_\alpha(t) = \alpha t^{\alpha - 1}}$$

[5] Dans le cas où $\alpha = \dfrac{1}{n}$, l'inverse d'un entier positif : $x^{\frac{1}{n}} =$ mais la notation $x^{\frac{1}{n}}$ est plus pratique que $\sqrt[n]{x}$.

[6] $p'_\alpha(t) = \exp'(\alpha \log(t)) \cdot \alpha \operatorname{Log}'(t) = \exp'(\alpha \operatorname{Log}(t)) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{t} =$
$= e^{\alpha \operatorname{Log}(t)} \cdot \alpha \cdot e^{-\operatorname{Log}(t)} = \alpha e^{(\alpha-1)\operatorname{Log}(t)} = \alpha t^{\alpha-1}$

1.0.9 Exercice. Pour $\alpha = -1$, déduire la formule précédente de 4.1.3, puis prouver la pour $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ entier relatif par récurrence sur $|n|$ et la formule de Leibniz .

1.0.10 Théorème (caractérisation des fonctions monotones dérivables). [7] *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable alors f est croissante [resp. décroissante] si et seulement si pour tout $t \in I$ on a $f'(t) \geq 0$ [resp. $f'(t) \leq 0$]*

En particulier f est constante si et seulement si sa dérivée est la fonction nulle.

[7] Corollaire *Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables et pour tout $t \in I$ $f'(t) \leq g'(t)$ alors si $x, y \in I$ avec $x \leq y$ on a :*

$$f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x)$$

1.0.11 Exercice. Déduire de la partie de 1.0.10 caractérisant les fonctions croissantes dérivables [l'énoncé sans les respectivement] la caractérisation des fonctions dérivables décroissantes [l'énoncé de 1.0.10 avec les respectivement] et le corollaire en marge.

2 Fonctions circulaires et leurs fonctions réciproques.

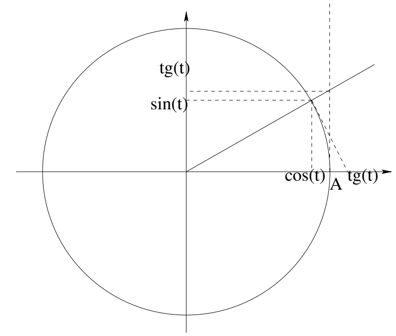
2.1 Les fonctions sinus sin et cosinus cos.

Les fonctions $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont «définies» par :

$M(t) = (\cos(t), \sin(t))$ est le point à distance t du point $A = (1, 0)$ sur le *cercle trigonométrique*, le cercle unité $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ orienté dans le sens trigonométrique. On a donc :

$$\boxed{\cos^2 + \sin^2 = 1}$$

Le cercle trigonométrique



2.1.1 Remarque (Raison des guillemets « » autour de définies).

Sauf pour les segments de droite, la longueur d'une courbe n'a pas été définie.

Dans le cas présent (le cercle unité) où la courbe a des paramérisations[8] $u \mapsto M(u) = (x(u), y(u))$ par des fonctions x, y dérivables à dérivées x', y' continues la fonction $u \mapsto \sqrt{\big(x'(u)\big)^2 + \big(y'(u)\big)^2}$ associant au paramètre u la longueur du vecteur tangent en u de la paramétrisation est continue. Quand on saura qu'une fonction continue admet une primitive on pourra définir la longueur algébrique entre les points $M(u_1)$ et $M(u_2)$ de paramètre u_1 et u_2 par :

$$\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\big(x'(u)\big)^2 + \big(y'(u)\big)^2}\, du$$

Le cercle unité étant de longueur 2π, les fonctions cos et sin sont 2π *périodiques*[9] telles que :

$$\sin^{-1}(0) = \big\{n\pi \bigm| n \in \mathbb{Z}\big\} \qquad \cos^{-1}(0) = \Big\{\frac{2n+1}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} \Bigm| n \in \mathbb{Z}\Big\}$$

et dérivables de dérivées :

$$\boxed{\sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin}$$

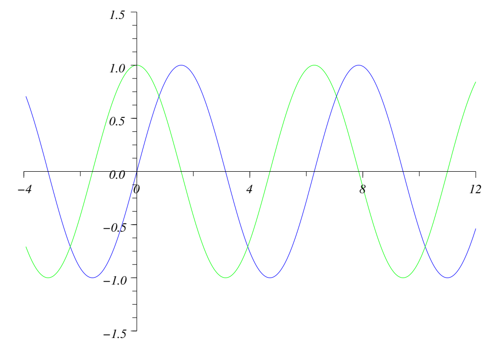
2.1.2 Exercice. Soit $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, s(t) = \frac{\pi}{2} - t$.

1. Expliquer géométriquement la relation $\cos = \sin \circ s$
2. Déterminer $s \circ s$. En déduire
   (a) la relation $\sin = \cos \circ s$, puis
   (b) de ce que sin est dérivable avec $\sin' = \cos$, que cos est dérivable avec $\cos' = -\sin$ et
   (c) de $\sin^{-1}(0) = \{n\pi\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ que l'on a $\cos^{-1}(0) = \left\{ \frac{2n+1}{2}\pi = n\pi + \frac{\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

[8] ici, si $x > 0,\ y \mapsto (\sqrt{1-y^2}, y)$, si $y > 0,\ x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$ si $x < 0,\ y \mapsto (-\sqrt{1-y^2}, y)$, si $y < 0,\ x \mapsto (x, -\sqrt{1-x^2})$

[9] pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$ et $\sin(t + 2\pi) = \sin($

Graphes des fonctions sinus (en bleu) et cosinus (en ve



2.2 Tangente tg, arctangente Arctg, arcsinus Arcsin et arccosinus Arccos.

La fonction *tangente* : $\mathrm{tg} : \mathbb{R} \setminus \cos^{-1}(0) \to \mathbb{R}, \mathrm{tg}(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$ est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \cos^{-1}(0)$ on a :
$\mathrm{tg}'(t) = \dfrac{\sin'(t)\cos(t) - \sin(t)\cos'(t)}{\cos(t)^2} = \dfrac{\cos(t)\cos(t) - \sin(t)(-\sin(t))}{\cos(t)^2} = \dfrac{\cos(t)^2 + \sin^2(t)}{\cos(t)^2}$ donc :

$$\boxed{\mathrm{tg}' = 1 + \mathrm{tg}^2 = \frac{1}{\cos^2}}$$

La fonction tangente induit une bijection $\mathrm{tg}_| :]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.
Donc la bijection réciproque $\mathrm{Arctg} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est dérivable de dérivée :

$$\boxed{\mathrm{Arctg}' : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ \mathrm{Arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad [x = \mathrm{tg}(t)]}$$

De même les fonctions sinus et cosinus induisent des bijections :

$$\sin_| : [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}] \to [-1,1], \qquad \cos_| : [0,\pi] \to [-1,1]$$

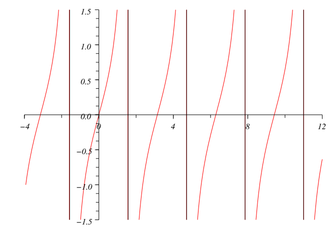
dérivables, de dérivées : $\sin' = \cos, \ \cos' = -\sin$ ne s'anullant pas sur les intervalles ouverts correspondants $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$ et $]0, -\pi[$.

Leurs bijections réciproques $\mathrm{Arcsin} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ et $\mathrm{Arccos} : [-1,1] \to [0,\pi]$ sont donc dérivables sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ et pour tout $u, v \in]-1,1[$ on a :

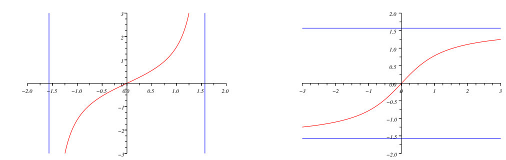
$$\boxed{\mathrm{Arcsin}'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \qquad \mathrm{Arccos}'(v) = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \qquad [u = \sin(t), \ v = \cos(t)]}$$

2.2.1 Exercice. 1. Vérifier si $s, t \in]-1,1[$ les relations
   (a) $\sin(\mathrm{Arccos}(s)) = \sqrt{1-s^2}$
   (b) $\cos(\mathrm{Arcsin}((t)) = \sqrt{1-t^2}$
2. Déterminer les applications $\mathrm{Arccos} \circ \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ et $\mathrm{Arcsin} \circ \cos : [0,\pi] \to [-1,1]$.

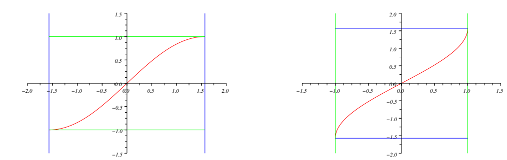
Graphe des fonctions tangente tg et arctangente Arctg



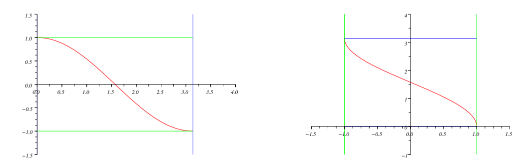
Graphe de tangente $\mathrm{tg}_|$ et arctangente Arctg



Graphe de sinus $\sin_|$ et arcsinus Arcsin



Graphe de cosinus $\cos_|$ et arccosinus Arccos



3 Primitives et leur calcul.

3.1 Primitives et intégrales d'une fonction.

3.1.1 Définition et Proposition. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet une *primitive* $F : I \to \mathbb{R}$ (f est *primitivable*) si F est continue, dérivable sur l'intérieur [10] $\overset{\circ}{I}$ de l'intervalle I et $f = F'$.

En ce cas F_1 est une autre primitive de f si et seulement si $F_1 - F$ est constante. $\square$

3.1.2 Définition. Soit F une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$ et $x, y \in I$ deux points de l'intervalle I.

L'*intégrale (au sens des primitives) de x à y* de f est :

$$\int_x^y f \overset{\text{syn}}{=\!=} \int_x^y f(t)\,dt \overset{\text{Déf}}{:=} F(y) - F(x) \overset{\text{Déf}}{=:} \big[F\big]_x^y$$

3.1.3 Remarques. 1. Comme F est dérivable sur l'intérieur $\overset{\circ}{I}$ de l'intervalle I, sa continuité est automatique dans $\overset{\circ}{I}$. Ce n'est donc une hypothèse qu'aux extrémités éventuelles $\{a, b\} \cap I$.

2. (a) D'après le théorème 1.0.10, si $x \leq y$ l'intégrale de x à y est monotone [11] en f.
   (b) Mais dans la définition de l'intégrale, contrairement aux rappels ci-dessus pour les extrémités a, b des intervalles où $a < b$, on ne suppose aucun ordre entre x et y, ainsi :

$$\int_y^x f = -\int_x^y f \qquad \text{donc} \qquad \int_y^x f = 0$$

3. «Lire à l'envers» les tables de dérivation [12] suffit, dans des cas simples à calculer ces intégrales.

3.1.4 Exemples. (a) $\int_x^y \cos = \big[\sin\big]_x^y$; $\int_x^y \sin = \big[-\cos\big]_x^y$

(b) Si $n \in \mathbb{N}$ alors $\int_x^y x^n = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_x^y$ En particulier $\int_x^y ut^2 + vt + w\,dt = [\frac{ut^3}{3} + \frac{vt^2}{2} + wt]_x^y$

Si de plus $xy > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alors :

(c) $\int_x^y \frac{1}{t}\,dt = \big[\mathrm{Log}\,(|t|)\big]_x^y = \mathrm{Log}\,(|\frac{y}{x}|) = \mathrm{Log}\,(\frac{y}{x})$

(d) Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alors : $\int_x^y x^\alpha = [\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_x^y$

[10] Rappelons que si I est un intervalle à plus d'un point, il est c
des neuf types :
$]a, b[,]a, b], [a, b[, [a, b]$,
$]-\infty, b[,]-\infty, b],]a, +\infty[, [a, +\infty[$,
$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont deux réels avec $a < b$.
L'*interieur* $\overset{\circ}{I}$ de l'intervalle I est alors $\mathbb{R}$ dans le dernier cas, $]a, b[$ dans les quatre premiers, $]-\infty, b[$ dans les deux suivants et $]a, +\infty[$ dans les deux avant derniers

[11] COROLLAIRE *Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont primitivables et pour tout $t \in I$ $f(t) \leq g(t)$ alors si $x, y \in I$ avec $x \leq y$ on a :*

$$\int_x^y f \leq \int_x^y g$$

[12] et d'appliquer la linéarité

3.2 Propriétés des primitives.

3.2.1 Proposition (Changement de variable). *Soit $\varphi : J \to I$ continue, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction* [13] *admettant une primitive F. Alors $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi' : \underset{t \mapsto \varphi(t) \cdot \varphi'(t)}{J \to \mathbb{R}}$ admet $F \circ \varphi$ comme primitive, ainsi pour tout $x, y \in J$ on a :*

$$\int_x^y f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(s)\, ds$$

Démonstration : $\displaystyle\int_x^y f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \big[F \circ \varphi\big]_x^y = F(\varphi(y)) - F(\varphi(x)) = \big[F\big]_{\varphi(x)}^{\varphi(y)}$

3.2.2 Exemple. Soit $u, v, w \in \mathbb{R}$ avec $uw \neq 0$ (donc $u \neq 0 \neq w$) et la fonction [14]

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{u^2t^2 + 2uvt + v^2 + w^2}$$

Comme $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(s) = \dfrac{ux + v}{w}$ est dérivable et pour tout $s \in \mathbb{R}, \varphi'(s) = \dfrac{u}{w} \neq 0$ et :

$$f(t) = \frac{1}{(ut + v)^2 + w^2} = \frac{1}{w^2 + (ut + v)^2} = \frac{1}{wu} \frac{1}{1+\left(\frac{ut+v}{w}\right)^2} \cdot \frac{u}{w} = \frac{u}{w} \operatorname{Arctg}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

la fonction $F = \dfrac{1}{wu} \operatorname{Arctg} \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(t) = \dfrac{u}{w} \operatorname{Arctg}(\dfrac{ut + v}{w})$ est une primitive de f.

3.2.3 Exercice. Soit $f :] - 1, 1[\to \mathbb{R}, f(t)\dfrac{t}{\sqrt{1 - t^2}}$.

Remarquer $f(t) = \frac{1}{2}(1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}(-2t)$ et $f(t) = \cos(\operatorname{Arccos}(t))\dfrac{-1}{\sqrt{1 - t^2}} = \sin'(\operatorname{Arccos}(t)) \operatorname{Arccos}'(t)$.

En déduire, si $x \in] - 1, 1[$, deux calculs de $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ dont vous déduirez une autre solution de 1a de l'exercice 2.2.1

[13] de source I, le but de φ

[14] qui est bien définie car $u^2t^2 + 2uvt + v^2 + w^2 = (ut + v)^2 + w^2 \geq w^2 > 0$

N'apprennez pas par coeur ces formules, mais refaites le calcul dans chaque cas :

$$f(t) = \frac{1}{4t^2 + 12t + 34} = \frac{1}{4t^2 + 12t + 9 + 25} = \frac{1}{5^2 + (2t + 3)^2} = \frac{1}{5 \cdot 2} \frac{1}{1+\left(\frac{2t + 3}{5}\right)^2} \cdot \frac{2}{5}$$

$$= \frac{1}{10} \operatorname{Arctg}'\left(\frac{2t + 3}{5}\right) \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10} \operatorname{Arctg}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

où $\varphi(t) = \dfrac{2t + 3}{5}$.

3.2.4 Proposition (intégration par partie). *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ avec g dérivable, f admettant une primitive F et Fg' admettant une primitive.*

Alors fg admet une primitive et si $x, y \in I$ on a :

$$\int_x^y fg = \big[Fg\big]_x^y - \int_x^y Fg'$$

Démonstration : Par la proposition 4.1.3 la fonction Fg est dérivable et $\big(Fg\big)' = F'g + Fg' = fg + Fg'$ donc $fg = \big(Fg\big)' - Fg'$ admet une primitive et :
$$\int_x^y fg = \int_x^y \{\big(Fg\big)' - Fg'\} = \int_x^y \big(Fg\big)' - \int_x^y Fg' = \big[Fg\big]_x^y - \int_x^y Fg'.$$ □

3.2.5 Exemple. $\displaystyle\int_x^y \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_x^y \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\cdot\Big(-\frac{t}{2}\Big)\,dt = \Big[\frac{1}{1+t^2}\cdot\Big(-\frac{t}{2}\Big)\Big]_x^y - \int_x^y \frac{1}{1+t^2}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)\,dt = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Arctg}(t) - \frac{t}{1+t^2}\Big]_x^y.$

donc $\displaystyle\int_x^y \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_x^y \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_x^y \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \Big[\mathrm{Arctg}(t)\Big]_x^y - \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Arctg}(t) - \frac{t}{1+t^2}\Big]_x^y = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Arctg}(t) + \frac{t}{1+t^2}\Big]_x^y$

3.2.6 Exercice. Calculer la dérivée de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(t) = \frac{1}{2}[\mathrm{Arctg}(t) + \frac{t}{1+t^2}]$ et retrouver le résultat de l'exemple précédent 3.2.5.

3.2.7 Exercice. Soit $x \in \mathbb{R}$. En adaptant la méthode de l'exemple 3.2.5 calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^3}\,dt$ [il faut deux intégrations par partie].

3.2.8 Exemple. Soit $x \in]-1,1[$ et $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(t) = \dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{1+t} + \dfrac{1}{1-t}]$

donc : $\displaystyle\int_0^x f = \int_0^x \frac{1}{2}[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}]\,dt = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Log}(1+t) - \mathrm{Log}(1-t)\Big]_0^x = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Log}(\frac{1+t}{1-t})\Big]_0^x = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(\frac{1+x}{1-x})$

3.2.9 Exemple. Soit $x \in]-1,+\infty[$ et $g :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, g(t) = \dfrac{3t^2+3t+2}{t^3+t^2+t+1} = \dfrac{t^2+1+(2t+1)(t+1)}{(t^2+1)(t+1)} = \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{2t+1}{t^2+1} = \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{2t}{t^2+1} + \dfrac{1}{t^2+1}$

donc : $\displaystyle\int_0^x g = \int_0^x \frac{1}{t+1} + \frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}\,dt = \Big[\mathrm{Log}(t+1) + \mathrm{Log}(t^2+1) + \mathrm{Arctg}(t)\Big]_0^x = \Big[\mathrm{Log}((t+1)(t^2+1)) + \mathrm{Arctg}(t)\Big]_0^x = \mathrm{Log}(x^3+x^2+x+1) + \mathrm{Arctg}(x)$

Le procédé des exemles précédent se généralise à toutes les fractions rationnelles réelles :

3.3 Primitives des fractions rationnelles réelles.

Soit I un intervalle réel et $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle réelle *définie sur* l'intervalle I, *c. a d.* pour tout $s \in I$ on a $Q(s) \neq 0$. La fonction associée est aussi notée

$$\frac{P}{Q} : I \to \mathbb{R}, s \mapsto \frac{P(s)}{Q(s)}$$

3.3.1 Rappel. Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme réel de degré $q \geq 1$, de factorisation réduite [15] :

$$Q = a_q \prod_{k=1}^{r} (X - t_k)^{m_k} \prod_{l=1}^{s} ((X - b_k)^2 + c_k^2)^{\nu_k}$$

[15] voir Corollaire 1.3.21 2 de polynômes et fractions rationnelles
$r, s \in \mathbb{N}$ sont des entiers naturels non tous deux nuls.
Si l'un est nul le produit correspondant s'interprette comme 1.
Si $r \geq 1 m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour $1 \leq i \neq k \leq r$ $t_i \neq t_k \in \mathbb{R}$
$s \geq 1 \nu_1, \dots, \nu_s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour $1 \leq l \leq r$ $0 \neq c_l \in \mathbb{R}$ et
pour $1 \leq j \neq l \leq r$ $0 \neq c_l$ $(b_j, c_j) \neq (b_l, c_l) \in \mathbb{R}^2$

alors il y a un polynôme réel $E \in \mathbb{R}[X]$ et pour $1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq s$ et $1 \leq m \leq m_k, 1 \leq n \leq \nu_l$ des nombres réels $\lambda_{k,m}, \alpha_{l,n}, \beta_{l,n} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,m}}{(X - t_k)^m} + \sum_{l=1}^{s} \sum_{n=1}^{\nu_l} \frac{2\alpha_{l,n}(X - b_k) + \beta_{l,n}}{\left((X - b_k)^2 + c_k^2\right)^n}$$

Cette décomposition en éléments simples permet, par linéarité, de calculer une primitive de $\dfrac{P}{Q}$;

Si $E = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ alors $F = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{j-1}}{j} X^j$ est une primitive de E.

Si $m, n > 1$ alors : $\dfrac{1}{1-m} \dfrac{\lambda}{(X-t)^{m-1}}$ et $\dfrac{1}{1-n} \dfrac{\alpha}{(X-b)^2 + c^2)^{n-1}}$ sont primitives de $\dfrac{\lambda}{(X-t)^m}$ et $\dfrac{2\alpha(X-b)}{\left((X-b)^2 + c^2\right)^n}$.

Les fonctions $I \ni s \mapsto \lambda \operatorname{Log}(|s - t|), \alpha \operatorname{Log}((s-b)^2 + c^2)$ sont primitives de $I \ni s \mapsto \dfrac{\lambda}{X - t}, \dfrac{2\alpha(X-b)}{(X-b)^2 + c^2}$.

Il reste donc, pour $1 \leq n \in \mathbb{N}$ de connaître des primitives des fonctions associées à $\dfrac{\beta}{\left((X-b)^2 + c^2\right)^n}$. Il suffit, pour $u, v \in \mathbb{R}$ de calculer l'intégrale :

$I_n = \displaystyle\int_v^w \frac{1}{\left(u^2+1\right)^n}\, du$ car par changement de variable $s = cu + b$: $\displaystyle\int_x^y \frac{\beta}{\left((s-b)^2 + c^2\right)^n}\, ds = \int_{\frac{x-b}{c}}^{\frac{y-b}{c}} \frac{\beta}{\left(c^2u^2 + c^2\right)^n}\, cdu = \beta c^{1-2n} \int_{\frac{x-b}{c}}^{\frac{y-b}{c}} \frac{1}{\left(u^2+1\right)^n}\, du$. Ce qui s'obtient par intégration par partie et la fonction arctangente :

3.3.2 Lemme. *1.* $I_1 = \left[\operatorname{Arctg}(u)\right]_v^w$

2. si $n > 1$ *on a* $I_n = \dfrac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \left[\dfrac{u}{(2n-2)(u^2+1}\right]_v^w$

3.3.3 Exemples. 1. $\displaystyle\int_x^y \frac{ds}{s^3 - s} = \int_x^y \left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1}\right) ds = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Log} \frac{|(s-1)(s+1)|}{s^2}\right]_x^y$

2. $\displaystyle\int_x^y \frac{s+2}{s^4 + s^2}\, ds = \int_x^y \left(\frac{2}{s^2} - \frac{2+s}{s^2+1} + \frac{1}{s}\right) ds = \left[-\frac{2}{s} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{s^2}{s^2+1} - 2\operatorname{Arctg}(s)\right]_x^y$

4 La formule de Taylor avec reste ~~i n t é g r a l~~ primitive.

4.1 Dérivées et formule de Leibniz d'ordre supérieur.

On rappelle que $I, \mathcal{D}(I), F(I)$ désignent un intervalle réel, l'ensemble des fonctions réelles dérivables et celui de toutes les fonctiontions sur I. L'application dérivée $D : \mathcal{D}(I) \to \mathcal{F}(I)$, ayant son image $\mathrm{Im}(D) \subset \mathcal{F}(I)$ distincte de sa source $\mathcal{D}(I)$ ne peut se composer avec elle même :

4.1.1 Exemples. On montrera dans le cours que toute fonction continue $g : I \to \mathbb{R}$ admet une primitive f, donc $g = D(f) \in \mathrm{Im}(D)$ est dans l'image de D, mais il y a des fonctions continues non dérivables, et même des fonctions dérivables dont la dérivée est non continues :

1. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x|$ est continue mais, son graphe n'ayant en son point d'abscisse 0 pas de tangente, elle est non dérivable en 0.
2. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x^{\frac{4}{3}} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4$ est dérivable de dérivée $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \frac{4}{3}\, x^{\frac{1}{3}}$.
   Le graphe de h' ayant, en son point d'abscisse 0 une tangente verticale, h' n'est pas dérivable en 0.
3. $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $k(x) = x^{\frac{4}{3}} \sin(\frac{1}{x})$ est dérivable, de dérivée $k' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k'(0) = 0$ et si $x \neq 0$,
   $k'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} \sin(\frac{1}{x}) - x^{-\frac{2}{3}} \cos(\frac{1}{x})$ non continue en 0 (ni même bornée près de 0) [encore moins dérivable] :
   elle oscille, pour x proche de 0, entre des valeurs arbitrairement grandes et petites.
4. Il y a des exemples où ces phénomènes, au lieu de se produire en des points isolés [0 ici], se produisent en tout point de I.

4.1.2 Définitions. Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel.
L'*ensemble des applications n-fois dérivables* [ou ayant *dérivées jusqu'à l'ordre n*] $\mathcal{D}^n(I)$ et, pour $0 \leq k \leq n$, les *applications dérivée $k^{\text{ième}}$* [ou *dérivée d'ordre k*] :

$$D^k \,(= D^{k,n}) : \mathcal{D}^n(I) \to \mathcal{D}^{n-k}(I),\ D^k(f) = f^{(k)}$$

qui à une fonction n-fois dérivable f associe sa *dérivée $k^{ième}$* [ou *d'ordre k*] sont définis par :

$$\mathcal{D}^0(I) = \mathcal{F}(I), \quad \mathcal{D}^1(I) = \mathcal{D}(I), \qquad D^0 = \mathrm{Id}, \quad D^1 = D$$

les ensembles respectivement de toutes les fonctions réelles sur I et de celles qui sont dérivables, l'identité et la dérivation, puis les relations de récurrence :

$$\mathcal{D}^{n+1}(I) = \left(D^n\right)^{-1}(\mathcal{D}(I))$$

pré-image par la dérivée $n^{\text{ième}}$ déjà définie $D^n \,(= D^{n,n}) : \mathcal{D}^n(I) \to \mathcal{D}^{n-n=0}(I) = \mathcal{F}(I)$ de la partie $\mathcal{D}(I) \subset \mathcal{F}(I)$ des fonctions dérivables et [16)], pour $0 \leq k \leq n$:

$$D^k \ (= D^{k,n+1}) = D^{k,n}_{|\mathcal{D}^{n+1}(I)}, f \mapsto f^{(k)}$$

la restriction à $\mathcal{D}^{n+1}(I) \subset \mathcal{D}^n(I)$ de l'application $D^k = D^{k,n}$ déjà définie sur $\mathcal{D}^n(I)$ et enfin :

$$D^{n+1} \,(= D^{n+1,n+1}) = D \circ D^{n,n}, f \mapsto f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

la composée avec $\mathcal{D}(I)$ de la dérivation de la dérivée $n^{\text{ième}} D^{n,n}$ déjà définie sur $\mathcal{D}^n(I) \supset \mathcal{D}^{n+1}(I)$

16) En toute rigueur il faudrait pour chaque $k \leq n$ que la nota soit $D^{k,n}$ indiquant la source (et le but) de la dérivée $k^{\text{ième}}$.
Sauf dans le cas (que nous essayerons d'éviter) où il peut y a ambiguité dans le contexte sur ces sources et but on utilise la nota D^k ci-contre et abrège D^1 en D.

4.1.3 Proposition (Propriétés algébriques des dérivations d'ordre supérieur).

(i) *(a) Une fonction constante* $f_c : \underset{t \mapsto c}{I \to \mathbb{R}}$ *a des dérivées de tout ordre* $k \geq 1$ *et* $f_c^k = 0 : \underset{t \mapsto 0}{I \to \mathbb{R}}$.

(b) L'inclusion $i = i_I : \underset{t \mapsto t}{I \to \mathbb{R}}$ *a des dérivées de tout ordre* $k \geq 1$ *et* $i^1 = 1$ *et pour* $k \geq 2, .i^k = 0$

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ *ayant des dérivées jusqu'à l'ordre* n *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *alors :*

(ii) La combinaison linéaire $\lambda f + \mu g : I \to \mathbb{R}$ *a des dérivées jusqu'à l'ordre* n *et, pour* $0 \leq k \leq n$ *:* (Linéarité des dérivations d'ordre supérieur)

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)} : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \lambda f^{(k)}(t) + \mu g^{(k)}(t)$$

(iii) Le produit $f \cdot g : I \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t)g(t)$ *a des dérivées jusqu'à l'ordre* n *et, pour* $0 \leq k \leq n$ *:*

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)} \cdot g^{(i)} : I \to \mathbb{R}$$

(Formules de Leibniz d'ordre supérieur)

$$t \mapsto f^{(k)}(t)g(t) + kf^{(k-1)}(t)g(t) \cdots + \binom{k}{i} f^{(i)}(t)g^{(k-i)}(t) + \cdots + kf(t)g^{(k-1)}(t) + f(t)g^{(k)}(t)$$

Démonstration des formules de Leibniz : Par récurrence sur k : Pour $k = 0$ on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} \binom{k}{i} f^{(i)} \cdot g^{(k-i)} = f^{(0)} \cdot g^{(0)} = f \cdot g = \big(f \cdot g\big)^{(0)}$.

Si $k > 0$ alors par définition, linéarité de la dérivation, formule de Leibniz usuelle et celle du triangle de Pascal on a : $(f \cdot g)^{(k+1)} =$

$$\big((f \cdot g)^{(k)}\big)' = \Big[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)} \cdot g^{(i)}\Big]' = \sum_{i=0}^{k} \Big(\binom{k}{i} f^{(k-i)} \cdot g^{(i)}\Big)' = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} [\big(f^{(k-i)}\big)' \cdot g^{(i)} + f^{(k-i)} \cdot \big(g^{(i)}\big)'] = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} [f^{(k+1-i)} \cdot g^{(i)} + f^{(k-i)} \cdot g^{(i+1)}] =$$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k+1-i)} \cdot g^{(i)} + \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1}] f^{(k+1-j)} \cdot g^{(j)} = f^{(k+1)} \cdot g^{0} + \Big(\sum_{j=1}^{k} [\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}] f^{(k+1-j)} \cdot g^{(j)}\Big) + f^{(0)} \cdot g^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} f^{(k+1-i)} \cdot g^{(i)}.$$

4.1.4 Remarques. 1. (a) Les ensembles $\mathcal{D}^n(I) \subset \cdots \subset \mathcal{D}^n(I) \cdots \subset \mathcal{D}^0(I) = \mathcal{F}(I)$ des fonctions réelles sur l'intervalle I qui ont des dérivées jusqu'à l'ordre $0 \leq k \leq n$ est une suite de $n+1$ sous-espaces vectoriels emboités de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\}$ de toutes les fonctions réelles sur I et

(b) les applications dérivée $k^{\text{ième}}$ $D^k : \underset{f \mapsto f^{(k)}}{\mathcal{D}^n(I) \to \mathcal{D}^{n-k}(I)} \subset \mathcal{F}(I)$ sont linéaires.

2. Si $f \in \mathcal{D}^n(I)$ alors [17], pour $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\mathcal{D}^n(I) = \big(D^k\big)^{-1}(D^{n-k}(I)), f^{(n-k)} \in \mathcal{D}^k(I) \quad \text{et} \quad f^{(n)} = \big(f^{(n-k)}\big)^{(k)}$$

La définition **4.1.2** qui est donc équivalente à : $\mathcal{D}^n(I) = D^{-1}(D^{n-1}(I)), f^{(0)} = f$ et si $0 < k \leq n, f^{(k)} = \big(f'\big)^{(k)}$, que l'on rencontre parfois.
[Remarquer cependant que la démonstration des formules de Leibniz d'ordre supérieur donnée ici utilise bien **4.1.2**]

[17] ceci s'obtient par récurrence sur k car si $A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} D$ trois applications composables et $E \subset D$ une partie de D :

$$\big(f \circ g\big)^{-1}(E) = g^{-1}(f^{-1}(E)) \quad \text{et} \quad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

4.1.5 Exemples. Les fonctions suivantes ont des dérivées de tout ordre :

1. Si $m \in \mathbb{N}$ la fonction $p_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto p_n(x) = x^m$, puissance $m^{\text{ième}}$ et si $k \geq 1$ on a :

$$p_n^{(k)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p_n^{(k)}(x) = [\prod_{h=0}^{k-1}(m-h)]x^{m-k} = k!\binom{m}{k}x^{m-k}$$

en particulier, si $k > m$ la dérivée $k^{\text{ième}}$ $p_m^{(k)}$ d'une fonction puissance d'exposant entier naturel p_m est nulle.

Plus généralement les puissances d'exposants entiers relatifs et réels :

(a) Si $n \in \mathbb{Z}, p_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, p_n(x) = x^n$ et si $k \geq 1$ on a :

$$p_n^{(k)} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto p_n^{(k)}(x) = [\prod_{h=0}^{k-1}(n-h)]x^{n-k} = k!\binom{n}{k}x^{n-k}$$

(b) Si $\alpha \in \mathbb{R}, p_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto p_n(x) = x^\alpha$ et si $k \geq 1$ on a :

$$p_\alpha^{(k)} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, p_\alpha^{(k)}(x) = [\prod_{h=0}^{k-1}(\alpha-h)]x^{\alpha-k} = k!\binom{n}{k}x^{\alpha-k}$$

2. La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x) = e^x$ exponentielle et si $k \geq 0$ on a :

$$\exp^{(k)} = \exp$$

3. La fonction Log $:]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{Log}(x), \mathrm{Log}^{(k)} = p_{-1}$ t si $k \geq 2$ on a :

$$\mathrm{Log}^{(k)} = p_{-1}^{(k-1)} = [\prod_{h=0}^{k-2}(-(1+h))]p_{-k} = (k-1)!\binom{-1}{k-1}p_{-k}, x \mapsto (-1)^{k-1}\,(k-1)!\,x^{-k}$$

4. Les fonctions trigonométriques $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et si $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sin^{(2m)} = (-1)^m \sin, \quad \sin^{(2m+1)} = (-1)^m \cos, \quad \cos^{(2m)} = (-1)^m \cos, \quad \cos^{(2m+1)} = (-1)^{m-1} \sin$$

4.1.6 Exercices. 1. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction ayant des dérivées jusqu'à l'ordre n.
Prouver que la fonction $h_a, f_a = f \circ h_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h_a(x) = ax, f_a(x) = f(ax)$ a des dérivées jusqu'à l'ordre n et que si $0 \leq k \leq n$ on a $f_a^{(k)} = a^k f^{(k)}$.

(b) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{ax}, g(x) = e^{bx}$.
Déterminer la fonction produit $f \cdot g$, puis sa dérivée $n^{\text{ième}}$ d'abord directement, puis à l'aide de la formule de Leibniz.
Que retrouve-t-on ainsi ?

2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Déterminer la fonction produit $p = p_\alpha \cdot p_\beta :]0, \infty[, x \mapsto x^\alpha \cdot x^\beta$.
Calculer si $n \in \mathbb{N}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de p, d'abord directement à partir du résultat précédemment obtenu, puis à l'aide de la formule de Leibniz.
En déduire une relation reliant les coefficients binomiaux généralisés $\binom{\alpha+\beta}{n}, \binom{\alpha}{k}, \binom{\beta}{l}$ pour $0 \leq k, l \leq n$.
Puis dans le cas où $\alpha = m, \beta = p \in \mathbb{N}$ sont entiers naturels, par un argument de dénombrement, démontrer la relation obtenue.

4.2 La formule de Taylor.

4.2.1 LEMME. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ alors :*

$$\Big(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l f^{(n-l)} \cdot g^{(l)}\Big)' = f^{(n+1)} \cdot g + (-1)^n f \cdot g^{(n+1)}$$

Démonstration : $\Big(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l f^{(n-l)} \cdot g^{(l)}\Big)' = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l \big(f^{(n-l)}\big)' \cdot g^{(l)} + f^{(n-l)} \cdot \big(g^{(l)}\big)' = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l \big(f^{(n+1-l)} \cdot g^{(l)} + f^{(n-l)} \cdot g^{(l+1)}\big) =$

$= \sum_{l=0}^{n}(-1)^l f^{(n+1-l)} \cdot g^{(l)} + \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l f^{(n+1-[l+1])} \cdot g^{(l+1)} = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l f^{(n+1-l)} \cdot g^{(l)} + \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1} f^{(n+1-j)} \cdot g^{(j)} =$

$= (-1)^0 f^{(n+1-0)} \cdot g^{(0)} + \Big(\sum_{j=1}^{n}[(-1)^j + (-1)^{j-1}] f^{(n+1-j)} \cdot g^{(j)}\Big) + (-1)^n f^{(n-n)} \cdot g^{(n+1)} = f^{(n+1)} \cdot g^{(0)} + (-1)^n f \cdot g^{(n+1)}$

4.2.2 THÉORÈME. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ a des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ et $a, b \in I$.*

Alors la fonction $t \mapsto f^{(n+1)}(t) \cdot \dfrac{(b-t)^n}{n!}$ admet une primitive et ($(n+1)^{\text{ième}}$ formule de Taylor)

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt = f(a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^i + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(b-a)^n + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt$$

Démonstration : On applique le lemme **4.2** aux fonctions f et $g = g_n$ où pour $0 \le l \le n, g_l : I \to \mathbb{R}, g_l(t) = \dfrac{(b-t)^l}{l!}$.
Comme $g^{(n+1)} = 0$ et, pour $1 \le l \le n, g^{(l)} = (-1)^l\, g_{n-l}$ et $g_l(b) = 0$ on a :
$f^{(n+1)} \cdot g = \Big(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l f^{(n-l)} \cdot g^{(l)}\Big)' = \Big(\sum_{l=0}^{n} f^{(n-l)} \cdot g_{n-l}\Big)' = \Big(\sum_{k=0}^{n} f^{(k)} \cdot g_k\Big)'$. Donc $f^{(n+1)} \cdot g$ a $\sum_{k=0}^{n} f^{(k)} \cdot g_k$ pour primitive et :
$\int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot \dfrac{(b-t)^n}{n!}\,dt = \Big[\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t) \cdot \dfrac{(b-t)^k(t)}{k!}\Big]_{t=a}^{b} = f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t) \cdot \dfrac{(b-a)^k(t)}{k!}$

Démonstration : [alternative par récurrence et intégration par partie] On suppose que $t \mapsto f^{(n)}(t) \cdot \dfrac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ admet une primitive et
$\int_a^b f^{(n)}(t) \cdot \dfrac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = f(b) - \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k$ [c'est vrai pour $n = 1$ car f est primitive de $f' : t \mapsto f^{(1)}(t) \cdot \frac{(b-t)^{1-1=0}}{(1-1)!}$ et $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$]
Par intégration par partie (Proposition **3.2.4**), puisque $f^{(n)}$ est primitive de $f^{(n+1)}$, la fonction $t \mapsto f^{(n+1)}(t) \cdot \dfrac{(b-t)^n}{n!}$ admet une primitive et $\int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot \dfrac{(b-t)^n}{n!} = \Big[f^{(n)}(t) \cdot \dfrac{(b-t}{n!}$
$\int_a^b f^{(n)}(t) \cdot \Big(-\dfrac{(b-t)^{n-1]}}{(n-1)!}\Big)\,dt = -f^{(n)}(a) \cdot \dfrac{(b-a)^n}{n!} + f(b) - \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k$

4.2.3 Exemples. On reprend les exemples **4.1.5** et, si $n \in \mathbb{N}$, applique la $(n+1)^{\text{ième}}$ formule de Taylor.
Pour simplifier l'expression de $f^{(k)}(a)$ on suppose, suivant les cas $a = 1$ ou $a = 0$, posant $b = x$.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ alors $b^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}(b-a)^k + \int_a^b \binom{m}{n+1}(n+1)(b-t)^n \cdot t^{m-(n+1)}\,dt$ où, si $n \geq m$, sous le signe $\int$ est, car $\binom{m}{n+1} = 0$, la fonction nulle, comme dans la somme les termes d'indice $k > m$ sont aussi nuls, on retrouve la formule du binôme de Newton. Plus généralement :
   (a) Soit $m \in \mathbb{N}$ et $a, b \in]-\infty, 0[$ (ou et $a, b \in]0, +\infty[$ alors : $\frac{1}{b^m} = b^{-m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-m}{k} a^{-(m+k)}(b-a)^k + \int_a^b (n+1)\binom{-m}{n+1}(b-t)^n \cdot t^{-(m+n+1)}\,dt$
   $= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{m+k-1}{k} a^{-(m+k)}(b-a)^k + \int_a^b (-1)^{n+1}(n+1)\binom{m+n}{n+1}(b-t)^n \cdot t^{-(m+n+1)}\,dt$. En particulier :
   $$\frac{1}{b} = b^{-1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a^{-(1+k)}(b-a)^k + \int_a^b (-1)^{n+1}(n+1)(b-t)^n \cdot t^{-(n+2)}\,dt$$
   (b) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1, +\infty[$ alors : $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \int_0^x (n+1)\binom{\alpha}{n+1}(x-t)^n \cdot (1+t)^{\alpha-(n+1)}\,dt$
2. Si $x \in \mathbb{R}$ alors :
   $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt$$
3. Si $x \in]-1, +\infty[$ alors :
   $$\text{Log}(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x (-1)^n \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$
4. Si $x \in \mathbb{R}$ alors :
   $$\sin(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_0^x (-1)^{m+1} \frac{(x-t)^{2m+1}}{(2m+1)!} \sin(t)\,dt = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_0^x (-1)^{m+1} \frac{(x-t)^{2m+2}}{(2m+2)!} \cos(t)\,dt$$
   $$\cos(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x (-1)^{m+1} \frac{(x-t)^{2m}}{(2m)!} \sin(t)\,dt = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x (-1)^{m+1} \frac{(x-t)^{2m+1}}{(2m+1)!} \cos(t)\,dt$$

4.2.4 Remarque. Comme, dans ces exemples **4.1.5** on connait les variations de la fonction $f^{(n+1)}$ dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ de la fonction f, on peut encadrer le «reste primitive» $\int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt$: si $a < b$ et pour $a \leq t \leq b$ on a $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$ alors :

$$m\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt \leq M\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

par exemple si $0 \leq t \leq x$ on a $1 \leq e^t \leq e^x$ donc : $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^x$